This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A. L. Crelle.

A. L. Crelle.

# Archiv

der

# reinen und angewandten Mathematik

herausgegeben

von

Carl Friedrich Hindenburg.

---

## Erſter Band

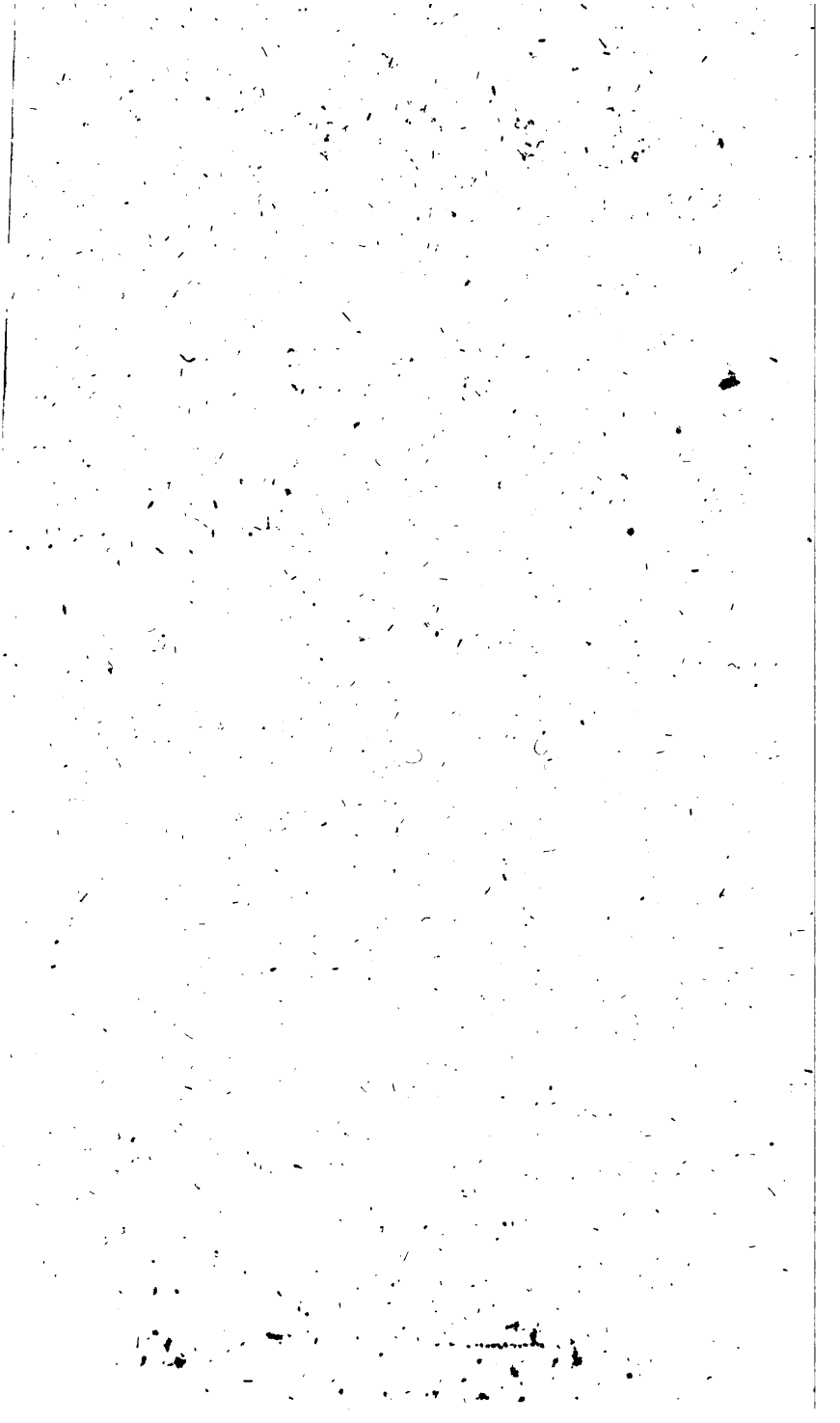
Erſtes bis viertes Heft.

Mit drey Kupfertafeln.

---

Leipzig, 1795.
in der Schäferiſchen Buchhandlung.

187. f. 3 (Stat)



# Vorrede.

Der Beyfall, mit welchem das Publikum die ersten beyden Hefte des gegenwärtigen Archivs der reinen und angewandten Mathematik beehret hat, läßt eine gleich gute Aufnahme der beyden folgenden, die mit jenen zusammen den ersten Band ausmachen, um so mehr erwarten, da das Feld, in welches das Journal bereits vorgeschritten war, beträchtlich dadurch erweitert worden ist. Der Plan ist im Ganzen derselbe, wie bey dem vormals von mir herausgegebenen Leipziger Magazine der Mathematik. Eigene Abhandlungen wechseln auch hier mit ausführlichen Recensionen und mannichfaltigen Nachrichten ab; und hoffentlich wird man die Absicht nicht verkennen, neue und interessante, überhaupt gemeinnützige, Kenntnisse durch diese Zeitschrift weiter zu verbreiten, auch neue Erfindungen, nützliche Bemerkungen und andere, den itzigen Zustand der Wissenschaft betreffende, Nachrichten zeitig durch selbige bekannt

kannt zu machen. Der gelehrte Kenner, dem die Vervollkommnung und Erweiterung ſeiner Wiſſenſchaft vornehmlich am Herzen liegt, wird hier, wie ich verſichern kann, Nahrung für den Geiſt und Veranlaſſung zu weiterm Nachdenken finden; aber auch der bloße Liebhaber — der angenehme Blumen und eßbare Früchte, nicht ſelbſt zu ziehen, nur zu ſeinem Vergnügen zu brechen und zu ſeinem Nutzen einzuſammeln gewohnt iſt — ſoll nicht vergeſſen werden, geſetzt auch, daß er in dieſem Bande weniger bedacht wäre, als er wohl wünſchen möchte.

Dieſe doppelte Ausſicht glaube ich um ſo zuverläßiger geben zu können, je gewiſſer ich der thätigen Mitwirkung der Mitarbeiter am Archive verſichert bin, unter denen ſich Mehrere befinden, deren, auch im Auslande berühmte, Namen in Deutſchland nicht anders als mit Hochachtung und Dankgefühl genannt werden. Dieſe würdigen Männer haben mich ſo reichlich mit ihren Beyträgen verſehen, daß ſie der erſte Band, für welchen ſie größtentheils beſtimmt waren, nicht alle faſſen konnte; und dies zugleich als Entſchuldigung, warum manche der eingeſendeten Abhandlungen vorizt noch nicht iſt abgedruckt worden. An dem fortdaurenden Eifer ſolcher Mitarbeiter zum Beſten des Archivs läßt ſich nicht zweifeln; und ſo wird es ganz allein von dem mathemati-

ſchen

ſchen Publikum abhängen, ob es dieſe neueröffnete periodiſche Schrift für die Mathematik — eine Wiſſenſchaft von ſolchem Umfange, von ſolcher Bedeutung und Brauchbarkeit! die doch wohl ihre eigene Zeitſchrift haben könnte und haben ſollte! — unterſtützen; ob es ein Unternehmen aufrecht erhalten will, das, wie der Herr Verleger (der hierbey nicht auf Gewinn, blos auf den Erſatz ſeiner Koſten rechnet) bereits ſehr wahr angemerkt hat, noch von keiner Nation, als der teutſchen, entworfen und ausgeführt worden iſt.

Ich habe, nach dem Wunſche mehrerer Kenner, einige Aufſätze über combinatoriſche Analyſis in dieſem Bande mit eingerückt, um die Dunkelheit zu zerſtreuen, die über der Sache, wie man mich ſchriftlich und mündlich verſichert hat, noch ſchwebte. Man kann dieſe iſolirten Abhandlungen ohne Schwierigkeit für ſich verſtehen, und ohne Anſtrengung leſen; und ich zweifle nicht, ſie werden den Reichthum der combinatoriſchen Hülfsmittel, auf analytiſche Probleme und Formeln angewendet, auch wie innig hier Simplicität und Allgemeinheit, Leichtigkeit in der Darſtellung und Behendigkeit in der Entwickelung, mit einander verbunden ſind, deutlich vor Augen legen. Auch habe ich hierüber die überzeugendſten Zuſicherungen von Kennern erhalten, die dieſe Aufſätze mit Aufmerkſamkeit geleſen haben. Ich habe

mich darinn über gewiſſe Gegenſtände ausführlicher ausgebreitet, als es in einem Syſteme der Wiſſenſchaft ſelbſt, das ich nächſtens dem Publikum vorzulegen gedenke, nicht geſchehen darf. Man wird finden, daß es der ſtrengſten geometriſchen Schärfe und Evidenz fähig ſey; und ſo werden auch die hier beygebrachten combinatoriſch-analytiſchen Abhandlungen, ſelbſt nach Aufſtellung eines ſolchen Syſtems, für das Publikum nicht verloren gehen, in ſo fern ich, als weitere Nachweiſung, öfters darauf mich beziehen werde.

Leipzig, im September 1795.

Der Herausgeber.

---

Inhalts-

# Inhaltsanzeige.

## Erſtes Heft.


I. J. F. Hennerts Verſuch einer Theorie über die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in Flüſſen. Seite 1

II. C. F. Hindenburg, über combinatoriſche Involutionen und Evolutionen, und ihren Einfluß auf die combinatoriſche Analytik. 13

III. Deſſelben combinatoriſche Verfahren, zu Beſtimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, in und außer der Ordnung. 47

IV. A. G. Käſtner, über Kettenglieder von regelmäßig zunehmender Dicke. 69

V. L. Euler, vom Drucke eines mit einem Gewichte beſchwerten Tiſches auf eine Fläche. 74

VI. J. F. Pfaff, Analyſis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange. 81

VII. Deſſelben Ableitung der Localformel für die Reverſion der Reihen, aus dem Satze des Herrn de la Grange. 85

VIII. C. F. Hindenburg, über das Umkehrungsproblem des Herrn de la Grange. 88

IX. Deſſelben Ueberſicht der Hauptſätze der allgemeinen Differenzen und Summen. 93

X. Auszüge und Recenſionen neuer Bücher. 106

C. F. Rüdigers Darſtellung der neuen Methode von du Sejour, zu Berechnung der Sonnen- und Mondfinſterniſſe.

C. F. Hindenburgs kritiſches Verzeichniß aller die combinatoriſche Analytik betreffenden Schriften. Vorerinnerung.

XI. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 119


## Zweytes Heft.


I. J. F. Hennerts Verſuch einer Theorie über die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in Flüſſen. Fortſetzung. S. 129

II. J. J. Beitler, über eine beſondere Methode, die Polhöhen zu finden. 141

III. C. F. Hindenburg, combinatoriſche Verfahren, zu Beſtimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, in und außer der Ordnung. Fortſetzung. 154

IV. A. G. Käſtner, zwo Fragen zur Aſſecuranzrechnung. 195

V. C. F. Hindenburg, über den Taylorſchen Satz, ſeine verſchiedenen Formen und Erweiterungen. 201

VI. H. A. Rothe, Lokalformeln für Producte der Potenzen der Reihen. 220

VII. C. F. Hindenburg, Reduktion der vorhergehenden Aufgabe auf das allgemeine Potenzenproblem. 224

VIII. H. A. Rothe, Lokalformeln für höhere Differenziale von Potenzen und ihren Producten. 228

IX. Auszüge und Recenſionen neuer Bücher. 233

A. G. Käſtners Anfangsgründe der Analyſis endlicher Größen; dritte Auflage.


J. L.

# Inhaltsanzeige.


T. C. Mayers vollſtändige und gründliche Anweiſung zur Verzeichnung der Land- See- und Himmelscharten und der Netze zu Conigloben und Kugeln.

C. F. Hindenburgs hiſtoriſch-kritiſches Verzeichniß aller die combinatoriſche Analytik betreffenden Schriften.

X. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 254


## Drittes Heft.


I. Ueber die Unterſuchung aſtronomiſcher Kreiſe; aus dem Engliſchen des Herrn Grafen von Brühl zu London. Seite 257

II. Fr. von Zach, Anhang und Anmerkungen zu der vorhergehenden von ihm überſetzten Abhandlung des Herrn Grafen von Brühl. 278

III. G. S. Klügel, über die Lehre von den entgegengeſetzten Größen 309

IV. C. F. Hindenburg, wie nahe mehrere große Mathematiker der Erfindung der combinatoriſchen Involutionen ſchon gekommen ſind. 319

V. J. F. Pfaff, allgemeine Summation einer Reihe, worinn höhere Differenziale vorkommen. 337

VI. Fragen eines Ungenannten über die Art durch Gitter geheim zu ſchreiben, und vorläufige Beantwortung derſelben vom Herausgeber des Archivs. 347

VII. Auszüge und Recenſionen neuer Bücher. 358

A. G. Käſtners Nachricht von Herrn Glenie's Antecedental Calcul.

Della Specola aſtronomica de' regj ſtudj di Palermo. Libri quattro; di *Giuſeppe Piazzi*. C. R.

VIII. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 369


## Viertes Heft.


I. C. F. Hindenburgs allgemeine Darſtellung des Polynomialtheorems nach de Moivre und Boscovich, nebſt verſchiedenen Bemerkungen über die dabey zum Grunde liegenden Involutionen. S. 385

II. A. G. Käſtner, über den Druck einer flüßigen Kugelſchale, auf die von ihr umgebene Kugelfläche. 424

III. H. A. Rothe's Lokal- und combinatoriſch-analytiſche Formeln für höhere Differenziale; Fortſetzung. 431

IV. Fr. von Zach, über die Bordaiſchen oder Lenoiriſchen ganzen Kreiſe, mit zwey beweglichen Fernröhren, und von ihrem geodätiſchen und aſtronomiſchen Gebrauche. 450

V. G. S. Klügel, über die Lehre von entgegengeſetzten Größen; Fortſetzung. 470

VI. Auszüge und Recenſionen neuer Bücher. 488

A. G. Käſtners Nachricht von Herrn Glenie's Antecedentalcalcul; Fortſetzung.

Della Specola aſtronomica de' regj ſtudj di Palermo. Libri quattro; di *Giuſeppe Piazzi*. Fortſetzung.

VII. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 503

# Archiv

der

# reinen und angewandten Mathematik.

Erſtes Heft. 1794.

## I.

## Verſuch einer Theorie über die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in Flüſſen; durch J. F. Hennert, Profeſſor der Mathematik zu Utrecht.

§. 1. Man pflegt den Lauf des Waſſers in Flüſſen oder Canälen mit dem Ausfluſſe des Waſſers durch die Seitenöffnung eines Gefäßes zu vergleichen. Es würde der Wahrheit angemeſſener ſeyn, wenn man die Bewegung des ſtrömenden Waſſers mit dem Lauf des Waſſers durch wagerechte oder geneigte Röhren vergliche. Aber aus meiner Abhandlung im dritten Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie vom Jahre 1787. S. 337 ꝛc. wird man die Schwierigkeiten ſolcher Vorſtellung leicht einſehen. Der Querſchnitt des Fluſſes vertritt die Stelle der Seitenöffnung des Gefäßes. Doch um die Höhe des Gefäßes, oder die der Geſchwindigkeit des ſtrömenden Waſſers zugehörige Höhe zu beſtimmen, hat man verſchiedene Mittel vorgeſchlagen. Guglielmini, der das erſte Syſtem über die Bewegung der Flüſſe verfertiget hat, nahm den Urſprung des Fluſſes oder das Gefälle

# Inhaltsanzeige.


T. T. Mayers vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land- See- und Himmelscharten und der Netze zu Conglobien und Kugeln.

C. F. Hindenburgs historisch-kritisches Verzeichniß aller die combinatorische Analytik betreffenden Schriften.

X. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 254

## Drittes Heft.

I. Ueber die Untersuchung astronomischer Kreise; aus dem Englischen des Herrn Grafen von Brühl zu London. Seite 257

II. Fr. von Zach, Anhang und Anmerkungen zu der vorhergehenden von ihm übersetzten Abhandlung des Herrn Grafen von Brühl. 278

III. G. S. Klügel, über die Lehre von den entgegengesetzten Größen 305

IV. C. F. Hindenburg, wie nahe mehrere große Mathematiker der Erfindung der combinatorischen Involutionen schon gekommen sind. 319

V. J. F. Pfaff, allgemeine Summation einer Reihe, worinn höhere Differenziale vorkommen. 337

VI. Fragen eines Ungenannten über die Art durch Witter geheim zu schreiben, und vorläufige Beantwortung derselben vom Herausgeber des Archivs. 347

VII. Auszüge und Recensionen neuer Bücher. 358

A. G. Kästners Nachricht von Herrn Glenie's Antecedental Calcul.

Della Specola astronomica de' regj studj di Palermo. Libri quattro; di *Giuseppe Piazzi*. C. R.

VIII. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 369

## Viertes Heft.

I. C. F. Hindenburgs allgemeine Darstellung des Polynomialtheorems nach de Moivre und Boscovich, nebst verschiedenen Bemerkungen über die dabey zum Grunde liegenden Involutionen. S. 385

II. A. G. Kästner, über den Druck einer flüßigen Kugelschale, auf die von ihr umgebene Kugelfläche. 424

III. H. A. Rothe's Lokal- und combinatorisch-analytische Formeln für höhere Differenziale; Fortsetzung. 431

IV. Fr. von Zach, über die Bordaischen oder Lenoirischen ganzen Kreise, mit zwey beweglichen Fernröhren, und von ihrem geodätischen und astronomischen Gebrauche. 450

V. G. S. Klügel, über die Lehre von entgegengesetzten Größen; Fortsetzung. 470

VI. Auszüge und Recensionen neuer Bücher. 481

A. G. Kästners Nachricht von Herrn Glenie's Antecedentalcalcul; Fortsetzung.

Della Specola astronomica de' regj studj di Palermo. Libri quattro; di *Giuseppe Piazzi*. Fortsetzung.

VII. Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen. 503

# Archiv

der

# reinen und angewandten Mathematik.

Erſtes Heft. 1794.

## I.

## Verſuch einer Theorie über die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in Flüſſen; durch J. F. Hennert, Profeſſor der Mathematik zu Utrecht.

§. 1. Man pflegt den Lauf des Waſſers in Flüſſen oder Canälen mit dem Ausfluſſe des Waſſers durch die Seitenöffnung eines Gefäßes zu vergleichen. Es würde der Wahrheit angemeſſener ſeyn, wenn man die Bewegung des ſtrömenden Waſſers mit dem Lauf des Waſſers durch wagerechte oder geneigte Röhren vergliche. Aber aus meiner Abhandlung im dritten Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie vom Jahre 1787. S. 337 ꝛc. wird man die Schwierigkeiten ſolcher Vorſtellung leicht einſehen. Der Querſchnitt des Fluſſes vertritt die Stelle der Seitenöffnung des Gefäßes. Doch um die Höhe des Gefäßes, oder die der Geſchwindigkeit des ſtrömenden Waſſers zugehörige Höhe zu beſtimmen, hat man verſchiedene Mittel vorgeſchlagen. Guglielmini, der das erſte Syſtem über die Bewegung der Flüſſe verfertiget hat, nahm den Urſprung des Fluſſes oder das Gefälle

fälle für die Höhe an, der die Geschwindigkeit in der Oberfläche des Flusses entspricht. Die Unrichtigkeit dieser Theorie ist durch die Erfahrung genugsam bestätiget. Grandi näherte sich mehr der Wahrheit. Er suchte aus einer beobachteten Geschwindigkeit den Scheitelpunkt der Parabel, oder die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe, nahm aber, wie Guglielmini, 4.15=60 Fuß für den Parameter an. Der berühmte Frisi vertheidigt die Hypothese des Grandi im 2ten Theile seiner Operum, pag. 284. Zendrini und Lecchi verwerfen dieselbe, und zwar nicht ohne Grund, wie ich hernach beweisen werde.

§. 2. Lecchi hat eine einfache Methode, die mittlere Geschwindigkeit des strömenden Wassers in der Idrostatica esaminata ne' suoi principi etc. in Milano. 1785. pag. 355 und 373 angegeben. Er beobachtet die Geschwindigkeiten in vier oder fünf Tiefen unter der Oberfläche, und nimmt das Mittel der beobachteten Geschwindigkeiten für die mittlere. Er nimmt sich noch mehr Freyheit, die Rechnung zu verkürzen. Weil er seine Beobachtungen mit dem bekannten Quadranten gemacht hat, so nimmt er das Mittel zwischen den beobachteten Abweichungs-Winkeln des Fadens, an welchem die Kugel befestiget ist: Die Quadrat-Wurzel der Tangente dieses mittlern Winkels bezeichnet die mittlere relative Geschwindigkeit, welche der mittlern Zahl der Quadrat-Wurzeln der Tangenten der beobachteten Winkel hätte entsprechen müssen. Ich werde die Gründe dieser Methode, welche Lecchi nicht angeführt hat, aufsuchen, um dadurch die Methode besser beurtheilen zu können. Endlich werde ich meine Methode angeben.

§. 3. Die Linie OL bezeichnet die Oberfläche des Wassers (Fig. 1.), und AI dessen Tiefe. Die Perpendikularlinien AB, CD, EF u. s. w. stellen die Geschwindigkeiten vor, welche man an der Oberfläche und in

den

den Tiefen AC, AE u. ſ. w. beobachtet hat. Die Waſſer-Menge kann alſo ohngefähr durch den Inhalt der Fläche ABDKI vorgeſtellt werden, und je näher der Wahrheit, je mehrere Beobachtungen angeſtellt ſind; anders würde die Fläche als durch eine krumme Linie BDFHK begränzt, vorgeſtellt werden müſſen.

Der Inhalt des Trapezium ABCD iſt $= \frac{AC}{2}$ (AB+CD); folglich iſt der Inhalt der ganzen Fläche $= \frac{AC}{2}(AB+CD) + \frac{CE}{2}(CD+EF) + \frac{EG}{2}(EF+GH) + \frac{GI}{2}(GH+IK)$. Wenn man nun dieſer Fläche Inhalt durch die Waſſerhöhe oder Tiefe AI, theilt, bekommt man die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers.

§. 4. Sind die Tiefen $AC = CE = EG = GI$ *gleich*, in welchen die Geſchwindigkeiten beobachtet ſind, ſo kann der Inhalt der Fläche durch eine leichte Formel ausgedrückt werden; dieſe wird ſeyn $= AC\left(\frac{AB}{2} + CD + EF + GH + etc + \frac{IK}{2}\right)$. Hat man *n* Geſchwindigkeiten gemeſſen, ſo wird die Waſſertiefe AI $= (n-1)\,AC$ ſeyn. Alſo iſt die mittlere Geſchwindigkeit $= \frac{1}{n-1}\left(\frac{AB}{2} + CD + EF + GH + etc + \frac{IK}{2}\right)$, das heiſt, man addire die halbe Summe der zwey äußerſten Geſchwindigkeiten zu der Summe der zwiſchen fallenden Geſchwindigkeiten; die ganze Summe theile man durch die Anzahl der Geſchwindigkeiten weniger eine, ſo wird der Quotient die mittlere Geſchwindigkeit anzeigen.

§. 5. Suchte man die mittlere Geschwindigkeit nach der Methode des Lecchi, so würde dieselbe $\frac{1}{n}$(AB+CD +EF+GH+etc +IK) seyn.

§. 6. Sollten nun die mittlern Geschwindigkeiten, im Fall des (4. §.) gleich seyn, so müßte $\frac{1}{n-1}\left(\frac{AB}{2}+S+\frac{IK}{2}\right)=\frac{1}{n}(AB+S+IK)$ seyn, wenn man die Summe der zwischenfallenden Geschwindigkeiten CD + EF + GH + etc = S setzt. Hieraus würde folgen, $\frac{n.AB}{2}+\frac{n.IK}{2}=n.AB-AB-S+n.IK-IK$, also $S=\frac{n.AB}{2}-AB+\frac{n.IK}{2}-IK$, und endlich $S=\frac{n-2}{2}(AB+IK)$. Daß die Gleichheit im Allgemeinen nicht bestehen könne, ist klar. Es ist auch nur ein Fall, wo diese Gleichheit statt finden kann, nämlich, wenn die Geschwindigkeiten in einer arithmetischen Progression fortgehen. Denn die äußersten Geschwindigkeiten AB, IK können das erste und letzte Glied einer arithmetischen Progression vorstellen, und die zwischen liegenden Geschwindigkeiten, die Zwischenglieder der Progression. Nun ist bekannt, daß die Summe des ersten und letzten Gliedes, oder AB+IK, gleich ist der Summe zweier mittlern Glieder, die vom ersten und letzten Gliede gleich weit entfernt sind. Aber die Anzahl dieser Zwischenglieder ist n—2, wenn n die Zahl der Glieder anweist. Nun ist in der Summe dieser Zwischenglieder, oder in S, die Summe AB + IK so oft enthalten, als Einheiten sind in $\frac{n-2}{2}$; folglich ist $S=\frac{n-2}{2}(AB+IK)$

§. 7.

§. 7. Ich werde die vorzutragenden Methoden beſonders durch die Beobachtungen erläutern und prüfen, welche Herr Brünings, Generalinſpektor der Flüſſe in der Provinz Holland, angeſtellt hat, und welche ich aus ſeiner Preißabhandlung über die beſte Art und Weiſe, die Geſchwindigkeiten der Flüſſe zu meſſen, genommen habe. Dieſe Beobachtungen haben wegen ihrer Vollſtändigkeit viel vorzügliches vor den meiſten Beobachtungen, die ich bey den italiäniſchen Hydraulikern gefunden habe, und ſind mit einem Werkzeuge von ſeiner Erfindung gemacht. Die erſten Colonnen enthalten die Tiefen unter den Oberflächen, denen in der zweiten Colonne die beobachteten Geſchwindigkeiten entſprechen. Beide ſind in Zollen und Hundertheilen von Zollen ausgedrückt.

| Tiefen unter der Oberfläche in Zollen. | Geſchwindigkeiten in einer Secunde. | Tiefen unter der Oberfläche in Zollen. | Geſchwindigkeiten in einer Secunde. |
|---|---|---|---|
| 0 | 34,029 | 48 | 37,387 |
| 6 | 34,906 | 54 | 36,797 |
| 12 | 35,870 | 60 | 35,152 |
| 18 | 36,810 | 66 | 34,525 |
| 24 | 37,727 | 72 | 33,981 |
| 30 | 38,135 | 78 | 33,791 |
| 36 | 37,557 | 84 | 33,697 |
| 42. | 37,473 | 90 | 33,217 |

§. 8. Dieſe Beobachtungen beziehen ſich auf die Formel des 4ten §s, weil die Beobachtungen in gleichen Entfernungen gemacht ſind. Es iſt aber AC = 6, ferner AB = 34,029 und IK = 33,217; alſo $\frac{AB+IK}{2}$ = 33,623; ferner iſt CD = 34,906, EF = 35,870 etc., alſo die Summe der Zwiſchengeſchwindigkeiten oder S = 503,808, alſo $\frac{AB+IK}{2}+S$ = 571,

§. 5. Suchte man die mittlere Geschwindigkeit nach der Methode des Lecchi, so würde dieselbe $\frac{1}{n}$(AB+CD +EF+GH+etc +IK) seyn.

§. 6. Sollten nun die mittlern Geschwindigkeiten, im Fall des (4. §.) gleich seyn, so müßte $\frac{1}{n-1}\left(\frac{AB}{2}+S+\frac{IK}{2}\right)=\frac{1}{n}(AB+S+IK)$ seyn, wenn man die Summe der zwischenfallenden Geschwindigkeiten CD + EF + GH + etc = S setzt. Hieraus würde folgen, $\frac{n.AB}{2}+\frac{n.IK}{2}=n.AB-AB-S+n.IK$ $-IK$, also $S=\frac{n.AB}{2}-AB+\frac{n.IK}{2}-IK$, und endlich $S=\frac{n-2}{2}(AB+IK)$. Daß die Gleichheit im Allgemeinen nicht bestehen könne, ist klar. Es ist auch nur ein Fall, wo diese Gleichheit statt finden kann, nämlich, wenn die Geschwindigkeiten in einer arithmetischen Progression fortgehen. Denn die äußersten Geschwindigkeiten AB, IK können das erste und letzte Glied einer arithmetischen Progression vorstellen, und die zwischen liegenden Geschwindigkeiten, die Zwischenglieder der Progression. Nun ist bekannt, daß die Summe des ersten und letzten Gliedes, oder AB+IK, gleich ist der Summe zweier mittlern Glieder, die vom ersten und letzten Gliede gleich weit entfernt sind. Aber die Anzahl dieser Zwischenglieder ist n—2, wenn n die Zahl der Glieder anweist. Nun ist in der Summe dieser Zwischenglieder, oder in S, die Summe AB + IK so oft enthalten, als Einheiten sind in $\frac{n-2}{2}$; folglich ist $S=\frac{n-2}{2}(AB+IK)$

§. 7.

das Gewicht und den Durchmeſſer der Kugel angemerkt haben, ſo konnten ſie nicht die abſoluten, ſondern nur die relativen Geſchwindigkeiten beſtimmen, die ſich wie die Quadratwurzeln der Tangenten der Abweichungswinkel verhalten. Das war auch für ihre Abſichten zureichend. Denn ſie wollten nur die Verhältniſſe der Waſſermengen der Flüſſe unterſuchen, um eine gewiſſe Vertheilung des Waſſers in den Flüſſen zu machen; dem einen Fluſſe das überflüſſige Waſſer zu entziehen, dem andern mehr Waſſer zu verſchaffen. Auf die Art hat Lecchi im angeführten Werke (pag. 375) gefunden, daß die Waſſermengen in den Flüſſen Chieſe und Naviglio, in ihren niedrigſten Waſſerſtänden ſich wie 13 : 11½ verhalten.

§. 11. Zendrini hat in ſeiner Schrift über die Leggi e Fenomini delle Acque correnti (ſiehe die Nuova Raccolta etc. Tom. 5.) eine Menge Beobachtungen mit dem Quadranten angeſtellt. Ich will nur einige wählen, um des Lecchi Methode zu prüfen. Die Länge des Pendels war ſo groß als die Tiefe des Fluſſes Po, nämlich 8 Schuh 8 Zoll. Er tauchte den Quadranten ganz unter Waſſer, und zog denſelben allmählich von Schuh zu Schuh heraus, bis einen Schuh unter der Oberfläche des Waſſers. Man muß aber daraus nicht ſchließen, daß die Beobachtungen in gleichen Entfernungen eines Schuhes gemacht ſind; weil das Pendel durch den Stoß des Waſſers eine ſchiefe Lage bekommt, in welcher die Kugel nicht ſo tief unter der Oberfläche des Waſſers ſteht, als bey der Eintauchung des Quadranten vor dem Stoße, wie Lecchi (l. c. pag. 264) wohl bemerkt hat. Es ſey AF (Fig. 2.) die Oberfläche des Waſſers, CA die Höhe des Mittelpunkts des Quadranten über dem Waſſer, alſo iſt AB die Tiefe der Kugel unter der Oberfläche AF, vor dem Stoße. Aber nach dem Stoße wird das Pendel bis CQ fortgetrieben; alſo iſt nun DE die Tiefe der Kugel unter der Oberfläche. Es iſt aber $CP = CD \times \text{Cof} BCD$,

also die wahre Tiefe der Kugel = ED = AP = CP — CA = CD × Cof BCD — CA. In der ersten Beobachtung war die Tiefe AB = der Länge des Pendels = CB, also CA = 0; der Abweichungswinkel war 24°; also CP = 104 × Cof 24° = 95,01 Zollen = ED. In der zweiten Beobachtung wurde das Pendel nur einem Schuh über dem Wasser herausgezogen, also CA = 12 Zoll. Nun war der Abweichungswinkel 23°, also CP = 104 × Cof 23° = 95,73, und die Tiefe der Kugel, oder DE = CP — CA = 83,73 Zoll. Auf diese Weise ist die zweite Colonne berechnet; die dritte enthält die Quadratwurzeln der Tangenten der Abweichungswinkel, oder die relativen Geschwindigkeiten.

| Abweichungswinkel. | 24° | 23° | 22° | 21° |
|---|---|---|---|---|
| Tiefen der Kugel unter der Oberfläche | 95,01. | 83,73 | 72,42 | 61,09 |
| Quadratwurzeln der Tangenten. | 6672 | 6315 | 6357 | 6195 |

| Abweichungswinkel | 19° | 17° | 15° | 12° |
|---|---|---|---|---|
| Tiefen der Kugel unter der Oberfläche | 50,34 | 39,46 | 28,45 | 17,72 |
| Quadratwurzeln der Tangenten. | 5867 | 5429 | 5177 | 4610 |

§. 12. Obgleich die Geschwindigkeiten und die Tiefen ungleichartige Größen sind, kann man doch die mittlere Geschwindigkeit nach der Formel des 3. §s. bestimmen. Es ist (Fig. 1.) CE = 28,45 — 17,72 = 10,73 und CD = 4610, und EF = 5177, folglich $\frac{CE}{2}$ (EF + CD) = 52501,89 u. s. w. Und so wird man die Fläche CDIK = 456533,18 finden, welche durch die Tiefe CI = 95,01 — 17,72 = 77,29 getheilt, giebt 5906 für

das Gewicht und den Durchmeſſer der Kugel angemerkt haben, ſo konnten ſie nicht die abſoluten, ſondern nur die relativen Geſchwindigkeiten beſtimmen, die ſich wie die Quadratwurzeln der Tangenten der Abweichungswinkel verhalten. Das war auch für ihre Abſichten zureichend. Denn ſie wollten nur die Verhältniſſe der Waſſermengen der Flüſſe unterſuchen, um eine gewiſſe Vertheilung des Waſſers in den Flüſſen zu machen; dem einen Fluſſe das überflüſſige Waſſer zu entziehen, dem andern mehr Waſſer zu verſchaffen. Auf die Art hat Lecchi im angeführten Werke (pag. 375) gefunden, daß die Waſſermengen in den Flüſſen Chieſe und Naviglio, in ihren niedrigſten Waſſerſtänden ſich wie $13 : 11\frac{1}{2}$ verhalten.

§. 11. Zendrini hat in ſeiner Schrift über die Leggi e Fenomini delle Acque correnti (ſiehe die Nuova Raccolta etc. Tom. 5.) eine Menge Beobachtungen mit dem Quadranten angeſtellt. Ich will nur einige wählen, um des Lecchi Methode zu prüfen. Die Länge des Pendels war ſo groß als die Tiefe des Fluſſes Po, nämlich 8 Schuh 8 Zoll. Er tauchte den Quadranten ganz unter Waſſer, und zog denſelben allmählich von Schuh zu Schuh heraus, bis einen Schuh unter der Oberfläche des Waſſers. Man muß aber daraus nicht ſchließen, daß die Beobachtungen in gleichen Entfernungen eines Schuhes gemacht ſind; weil das Pendel durch den Stoß des Waſſers eine ſchiefe Lage bekommt, in welcher die Kugel nicht ſo tief unter der Oberfläche des Waſſers ſteht, als bey der Eintauchung des Quadranten vor dem Stoße, wie Lecchi (l. c. pag. 264) wohl bemerkt hat. Es ſey AF (Fig. 2.) die Oberfläche des Waſſers, CA die Höhe des Mittelpunkts des Quadranten über dem Waſſer, alſo iſt AB die Tiefe der Kugel unter der Oberfläche AF, vor dem Stoße. Aber nach dem Stoße wird das Pendel bis CQ fortgetrieben, alſo iſt nun DE die Tiefe der Kugel unter der Oberfläche. Es iſt aber $CP = CD \times \text{Cof} BCD$,

Nimmt man das Mittel der relativen Geschwindigkeiten, so findet man 563,3 für die mittlere Geschwindigkeit, welche für den Abweichungswinkel 17° 36′ ist. Endlich nach der Methode des Lecchi würde der mittlere Abweichungswinkel 17° 40′, der zur mittlern Geschwindigkeit gehört, gefunden.

§. 14. Noch ein Exempel aus den Versuchen, die Lecchi in dem Flusse Chiese gemacht hat (Idrostatica pag. 373). Die Tiefe des Flusses war eine Milansche Braccia und 10 Oncen (Ich glaube, eine Milansche Braccia hält 1 französischen Fuß und 10 Zoll; eine Braccia hat 16 Oncen). Er machte diese Versuche zwar mit dem Quadranten, doch dergestalt, daß der Quadrant in derselben Erhöhung über das Wasser gehalten wurde. Der Faden des Pendels wurde verlängert, bis die Kugel unter dem Wasser die verlangte Tiefe erreichte. Die Beobachtungen wurden unter gleichen Entfernungen angestellt.

| Abweichungswinkel | 24° | 32° | 36° | 40° |
|---|---|---|---|---|
| Tiefen unter der Oberfläche in Oncen | 8 | 14 | 20 | 26 |
| Quadratwurzeln der Tangenten | 6672 | 7908 | 8524 | 9161 |

Die mittlere Geschwindigkeit wird nach dem 4ten §. $= \frac{24348}{3} = 8136$, welcher der Abweichungswinkel 33° 32′ entspricht.

Nimmt man das Mittel zwischen den Geschwindigkeiten, so wird die mittlere Geschwindigkeit = 8066, der dazu gehörige Abweichungswinkel ist 33° 3′.

Endlich nach der Methode des Lecchi ist der mittlere Abweichungswinkel 33°, also die mittlere Geschwindigkeit = 8058.

Man

für die mittlere Geſchwindigkeit; dieſe iſt aber die Quadratwurzel der Tangente von 19° 13′.

Wenn man aber die Summe der Geſchwindigkeiten durch ihre Menge oder durch 8 theilt, bekömmt man 5864 für die mittlere Geſchwindigkeit, welche dem Abweichungswinkel von 19° entſpricht. Nun macht es Lecchi noch kürzer: er nimmt das Mittel der beobachteten Abweichungswinkel, welches 19° 7′ ausmachet; die Quadratwurzel der Tangente dieſes Winkels, oder 5888 iſt die mittlere Geſchwindigkeit. Er giebt keine andern Gründe von ſeiner Methode (pag. 355) als die Kürze der Rechnung an, welche ziemlich richtig ſey, wenn die Abweichungswinkel nicht groß ſind.

Es erhellet auch aus dieſen Rechnungen, daß dieſe Methode von der wahren nicht viel abweichet.

§. 13. Zendrini hat ein Pendel von 6 Schuhen gebraucht, der Fluß war $4\frac{1}{2}$ Schuh tief (pag. 164) (Fig. 2.). Er maß die Geſchwindigkeit am Boden des Fluſſes, er erhöhete den Quadranten allmählig bis 2 Schuhe unter der Oberfläche. Der Mittelpunkt des Quadranten war alſo in dem erſten Verſuche um $1\frac{1}{2}$ Fuß = AC erhöhet, alſo AP = 72. Cof 19° = 68,07 Zollen, folglich die Tiefe der Kugel unter dem Waſſer = 68,07 — 18 = 50,07 Zollen.

| Abweichungswinkel. | 19° | 20° | 19° | 18° | 16° | 14° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiefen unter dem Waſſer | 50,07 | 43,65 | 38,07 | 32,47 | 27,21 | 21,86 |
| Quadratwurzeln der Tangenten. | 586 | 603 | 586 | 570 | 535 | 499 |

Man findet den Inhalt der Fläche = 16042,93 welcher durch die ganze Tiefe 50,07 — 21,86 = 28,21 dividirt, giebt 561,1 für die mittlere Geſchwindigkeit, welche dem Abweichungswinkel von 17° 30′ entſpricht.

§. 16. Ich werde mich der Versuche des Herrn Brünings bedienen (§. 7.), und die Geschwindigkeit in der Oberfläche $BC = 34,029$ und $NQ = 36,810$, in der Tiefe $BN = 18$ annehmen; folglich ist $BC + NQ = 70,839$ und $NQ - BC = 2,781$, folglich der Parameter $p = 70,839 \times 2,781 : 18 = 10,944$ Zollen. Dieser Parameter müßte nach der gewöhnlichen Theorie 60 Schuhe seyn; woraus die Unrichtigkeit dieser Theorie erhellet.

Ferner ist $AB = BC^2 : p = 105,89$, also die ganze Höhe der Parabel $AD = AB + BD = 105,89 + 90 = 195,89$. Also ist der Inhalt der Fläche $BCED = \frac{2}{3}(AD \sqrt{p.AD} - AB.BC) = \frac{2}{3}(9065,077 - 3603,330) = 3641,098$ welche durch die Höhe $BD = 90$ dividirt, die mittlere Geschwindigkeit $= 40,456$ Zolle in einer Secunde giebt; welche doch durch die Versuche $= 35,918$ gefunden ward (§. 8.). Die paraboliſche Fläche ist also zu groß, und bedarf einer Verbesserung, die den zweyten Theil meiner Theorie ausmacht.

Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.

---

## II.

## Ueber combinatoriſche Involutionen und Evolutionen, und ihren Einfluß auf die combinatoriſche Analytik.

1. **Combinatoriſche Involutionen** (Involutiones combinatoriae) nenne ich diejenigen Verfahren, nach welchen, für jede auſſer der Ordnung geforderte Glieder, Coefficienten oder Werthe, die Anordnung aus gegebenen Gröſſen, durch Zifern oder andere Zeichen zu Complexionen, ſo getroffen wird, daß in dem Ausdrucke dafür nichts Ueberflüſſiges enthalten iſt, was zu dem geforderten Gliede nicht gehört, zugleich aber alle vorhergehende Glieder, wie ſie, **in und neben einander liegend, die folgenden beſtimmen**, aufs klärſte und deutlichſte mit vor Augen *liegen*. Eine ſolche Anordnung verſtattet, **vorhergehende Glieder** durch gerade, horizontale und verticale, Linien leicht **abzuſondern** und als ſo viele Evolutionen (beſondere Involutionen) gleichſam **auszuſchneiden**, ſo wie **folgende Glieder** durch **bloßes Zuſetzen** an die **vorhergehenden** (durch Erweiterung der Involution nach der Breite und in die Tiefe) ſogleich **darzuſtellen**.

Sehr häufig (und in dieſer Abhandlung faſt durchgängig) werden die durch ſolche Verfahren bewürkten Darſtellungen ſelbſt, Involutionen oder Evolutionen genannt.

2. Dergleichen **figürliche Anordnungen** (1) ſind, wie unzählige Beyſpiele bereits gelehrt haben, ſehr erheblich in der Anwendung. Durch ſie iſt es möglich geworden, die combinatoriſchen Operationen auf das einfachſte Verfahren, die **Geſetze des Zählens**, (ad ſimpliciſſimas numerandi leges) zurückzuführen; die allgemeinſte Anwen-

wendung der Combinationslehre auf die Analysis zu begründen; die so enge Verbindung beyder auf deutliche Vorstellungen; die Einwirkung jener auf diese auf sichere Vorschriften, und endlich das Ganze in einen streng systematischen Zusammenhang zu bringen *).

3. Diese Involutionen und Evolutionen gehören also zu den vorzüglichsten Hülfsmitteln der combinatorischen Analytik, vornehmlich in Absicht auf leichte Darstellung und prompte Entwickelung der gesuchten Resultate. Durch sie lassen sich, auf die einfachste und regelmäßigste Art, größere Ganze aus kleinern, durch **bloße Anfügung des Ermangelnden**, kleinere Ganze aus grössern, durch **bloße Absonderung des Ueberflüssigen**, bequem durch und aus einander herleiten; und so führt ein solches Verfahren auf die **Darstellung eines allgemeinen Gliedes**, aus welchem man jedes besondere, ohne weitere Rechnung oder mühsame Reduction ausdrücken kann, giebt verlangte Glieder ausser der Ordnung, auch da, wo sonst keiner der bekannten Kunstgriffe der Analysis sie geben kann. Selbst die combinatorisch-analytischen Formeln, die sich auf solche Darstellungen beziehen, erscheinen in den einfachsten regelmässigsten Gestalten, und die Entwickelung derselben wird dadurch noch ungemein erleichtert, daß die für das **neue System der Combinationslehre** getroffene Einrichtung verstattet, die Werthe der Combinationselemente solcher Formeln im Voraus in Tafeln anzuordnen; deren man sich in vorkommenden Fällen mit großem Nutzen bedienen kann. (Leipz. Mag. 1786. S. 281-283; 320-324.).

4. Der Vortheil der Involutionen und Evolutionen erstreckt sich zwar über das ganze unermeßliche Gebiete com-

*) Das lezte gilt vornehmlich von dem itzigen Zustande der Wissenschaft, wo alles aus rein combinatorischen Begriffen abgeleitet wird, und alle Hülfesätze den strengsten systematischen Zusammenhang unter einander haben.

binatorischer Veränderungen, nach den drey *) Hauptabtheilungen: der Zahlenordnung, durch Anordnung der Ziffern oder anderer stellvertretenden Zeichen in horizontaler Lage, zu Complexionen oder Zahlen; der alphabetischen oder lexikographischen Darstellung für Worte; und der noch wenig bekannten senkrechten Fortschreitung gegebener Elemente, Zahlen oder Buchstaben, in mehrern verticalen Reihen neben einander (das Schreiben der Zahlen oder Buchstaben in die Tiefe); gleichwohl behauptet die Zahlenordnung, in Rücksicht ihres unmittelbaren Einflusses und der so ganz natürlichen Anwendung auf die Analysis, grosse Vorzüge vor den beyden übrigen Abtheilungen, weil die combinatorischen Veränderungen bey ihr, nach Gesetzen erfolgen, wie sich Zahlen ändern; wodurch sie in die Arithmetik und ihre Zahlensysteme eingreift. Ich habe auch daher die dahin gehörigen Regeln und Vorschriften, in den bekannten beyden Schriften (Infinit. Dignit. und Nov. Syst. Perm. etc.) zuerst in Ordnung gebracht und ausführlich abgehandelt, sowohl was die Versetzung gegebener Dinge, als auch ihre Vereinigung zu Combinations- und Variations-Complexionen nach Classen, an sich und zu bestimmten Summen, anbetrift. Anlangend die Verbindung mehrerer senkrechten Zahlen- oder Buchstaben-Reihen neben einander, so habe ich ein dahin gehöriges Hauptproblem (die cyklischen Perioden) bereits gelöset und angewendet **); und was die alphabetische Ordnung und ihre Gesetze betrift, so werde

*) Ich habe mehrmalen darüber nachgedacht, ob es nicht mehrere, als diese drey von mir hier erwähnten Hauptabtheilungen für die combinatorischen Veränderungen, geben möchte? Ich habe aber nicht« gefunden, was nicht zu einer von diesen dreyen gehörte, oder sich nicht, ohne Schwierigkeit, darauf bringen liess.

**) Leipz. Magaz. für reine und angewandte Mathematik, 2tes St. 1786. S. 281-324.

werde ich in einem der folgenden Hefte dieſes Archivs beſonders davon handeln. Ob ſie zwar ſchon ganz iſolirt zu ſeyn, und ihr Nutzen blos auf Wörterbücher und Repertorien ſich zu beſchränken ſcheint: ſo ſteht ſie doch, nach einer von mir vorlängſt gemachten Bemerkung, mit der Zahlenordnung in der genaueſten Verbindung. Aus dieſer in jene giebt es nehmlich einen eben ſo leichten und natürlichen Uebergang, wie aus der Reihe der ganzen Zahlen in die der Decimalzahlen. Daher kann auch zuweilen, wie die Folge zeigen wird, die alphabetiſche Ordnung bey der Auflöſung analytiſcher Aufgaben vortheilhaft benutzt und angewendet werden.

5. Zerlegung der Beſtandtheile einer Aufgabe in ihre, ſo viel ſich immer thun läßt, einfachſte Elemente; Scheidung der heterogenen und Sammlung der homogenen; ſchickliche Benennung dieſer Elemente durch ſtellvertretende Zeichen; zweckmäſſige Verbindung und Stellung derſelben; Aufſuchung der einzelnen Geſetze der verſchiedenartigen Größen, wie ſie durch die Bedingungen der Aufgabe beſtimmt werden; Nebeneinanderſtellung und Zuſammenfügung der zuſammengehörigen Glieder dieſer Geſetze, ohne Verſchmelzung der Elemente, in die combinatoriſch-analytiſche Hauptformel — die ſchönen Künſte können nicht mächtiger auf die Einbildungskraft wirken, als eine ſolche Darſtellung auf den Verſtand! Und dennoch iſt, zur endlichen Vollendung, beſonders bey verwickelten, aus vielgliedrigen Größen und deren Potenzen, aus höhern Differenzialausdrücken ꝛc. zuſammengeſezten Reſultaten, noch ein wichtiger Schritt zu thun übrig: die Auflöſung der Formel auf dem kürzeſten Wege, nach Vorſchriften, die gewöhnlich auf combinatoriſche Involutionen führen; wodurch das Beſchwerliche anderer Formeln und Methoden, beſonders die vielfachen ſo weitläuftigen und verdrüßlichen Subſtitutionen und Reductionen, das oft ſo langweilige Recurriren

riren auf mehrere vorhergehende Glieder und Coefficienten ꝛc. glücklich übersprungen und vermieden werden *).

6. Wesentliche Stücke bey solchen Involutionen sind: Auswahl der stellvertretenden Zeichen, wo gewöhnlich Zahlen oder ihre Ziffern, statt der Buchstaben, gebraucht werden; Beziehung dieser Zeichen auf Zahlensysteme aller Art; Versetzung oder Verbindung derselben zu Zahlencomplexionen; figürliche Darstellung solcher Verbindungen und Complexionen neben und unter einander.

Ziffern und Zahlen statt der Buchstaben, hat zwar Leibnitz schon gebraucht, und ihre Verbindung auf ein sehr verwickeltes Problem angewendet (Infin. Dign. Praef. p. XV-XVIII); aber die erste und einfachste, und in Absicht auf Anwendung zugleich ausgedehnteste aller combinatorischen Aufgaben, welche die Gesetze des Zählens nach allen Zahlensystemen enthält, hat er dennoch bey seinem Verfahren nicht zum Grunde gelegt, und es fehlte so viel daß seine neue Darstellung Beyfall fand, oder in ihrer chaotischen Gestalt finden konnte, daß selbst de Moivre, der sich doch sehr wohl auf Combinationen verstand, sie für schwierig erklärte, und sein Freund,

Johann

*) Die Erleichterung, welche die combinatorische Analytik selbst den verwickeltsten Aufgaben verschaft, ist nun schon bekannt, und braucht nicht erst weitläuftig nachgewiesen zu werden. Aehnliche Erinnerungen, wie hier vorkommen, welche die Vervollkommnung der Analysis zur Absicht haben, sind von mir bereits (Nov. Syst. Perm. p. I-III. und die dortige Anmerkung a) beygebracht worden. Ein Beyspiel einer so vollendeten Darstellung, in Absicht auf Auswahl und Verbindung der Zeichen, wo die verschiedenen Elemente unverschmelzt neben einander, und die einzelnen Fortschreitungsgesetze derselben deutlich vor Augen liegen, wo alles in eine verständliche Hauptformel zusammengefaßt, die Localausdrücke dieser Formel in gleichgültige combinatorische umgesetzt, und daraus die Werthe der einzelnen Glieder und Coefficienten mit größter Leichtigkeit hergeleitet werden; ein Beyspiel dieser Art, bey einer sehr zusammengesetzten Aufgabe, findet man in meiner Abhandlung: Problema solutum maxime vniversale, ad Serierum Reuersionem — Paralipomenon. Lipsiae 1793.

Johann Bernoulli! selbige sogar als zu abstract und unbrauchbar verwarf. Es giengen nehmlich, außer der eben angezeigten Reduction aller übrigen auf ein einziges sehr einfaches combinatorisches Grundproblem, Leibnitzen, wie Herr M. Toepfer sehr wohl erinnert *), verschiedene nützliche Einrichtungen, Sätze und bequeme Zeichen (die ganze Zeichensprache) in der Combinationslehre noch ab, vornehmlich: genaue Abtheilung der zu verbindenden Dinge nach Classen zu bestimmten Summen, bequeme Bezeichnung solcher Classen, und promte Darstellung ihrer Werthe (nach den beyden von mir aufgestellten Discerptionsproblemen, Infin. Dign. p. 73-87; 129-134.); wo man noch hinzusetzen kann: figürliche Anordnung der Zahlen- oder Buchstabencomplexionen neben und untereinander.

Die figürliche Darstellung nehmlich, ist sowohl an sich, als auch wegen der Involutionen, die sie giebt, für die combinatorische Analytik, bey welcher auf Ordnung und Stellung so viel ankommt, von der größten Erheblichkeit. Sie dient als Erfindungsmittel für allgemeine Sätze; enthält den Stoff zu unzähligen Beobachtungen; stellt den Zusammenhang mehrerer Sätze anschaulich dar; erleichtert theils die Einsicht in die Gründe und Beweise dieser Sätze, theils läßt sie selbige, als unmittelbare Folgen der gewählten Form, ungezwungen abfließen; sie stellt das Gesetz der Fortschreitung, für mehrere Dinge so wie für folgende Classen, aufs deutlichste vor Augen, und giebt dadurch Veranlassung speciellere Verfahren zu generalisiren; sie ist endlich nicht selten das einzige ausschliessende Mittel, gegebene Vorschriften mit möglichster Kürze und

*) Combinat. Analytik. S. 9. Herr Toepfer hat in den dortigen Anmerkungen mehrere Stellen aus meinen Schriften citirt, die man über die Sache nachlesen kann, wenn man sich darüber genauer unterrichten will.

und Deutlichkeit zu befolgen, recurrirende, und dadurch dependente, Ausdrücke anderer Methoden, die oft sehr beschwerliche Operationen veranlassen, mit absoluter Independenz auszuführen, und hinwiederum die Dependenzen, mit ihren Einwirkungen auf einander, kurz und faßlich nachzuweisen.

7. Die Veranlassung, dergleichen Involutionen überall aufzusuchen, und in die Combinationslehre einzuführen, gab mir eine etwas aufmerksamere Betrachtung nachstehender figürlichen Darstellung der Zahlen:

## A. Zahlensysteme in und um einander; Fortschreitungsgesetz für Zahlen.

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 00 | 01 |
| | 10 | 11 |
| 1 | 00 | 01 |
| | 10 | 11 |
| 2 | 00 | 01 |
| | 10 | 11 |
| 3 | 00 | 01 |
| | 10 | 11 |
| | etc | etc |

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 01 | 02 |
| | 10 | 11 | 12 |
| | 20 | 21 | 22 |
| 1 | 00 | 01 | 02 |
| | 10 | 11 | 12 |
| | 20 | 21 | 22 |
| 2 | 00 | 01 | 02 |
| | 10 | 11 | 12 |
| | 20 | 21 | 22 |
| | etc | etc | etc |

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 01 | 02 | 03 |
| | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 30 | 31 | 32 | 33 |
| 1 | 00 | 01 | 02 | 03 |
| | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 30 | 31 | 32 | 33 |
| | etc | etc | etc | etc |

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | etc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | etc |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | etc |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | |
| etc | | | etc | | | etc | | | et | |

Dieſe figürlichen ſämmtlich combinatoriſchen Anordnungen zeigen zweyzifrige Geſetze, für das dyadiſche Syſtem im erſten, für das triadiſche im zweyten, für das tetradiſche im dritten Parallelogramm, mit den überſchriebenen Ziffern 0, 1, 2, 3 ... als einfachen Grundzeichen. Durch die zur Seite beygeſchriebenen 0, 1, 2, 3 ... wird die Fortſchreitung der Zahlen in jedem Syſtem nach der Ordnung, deutlich nachgewieſen.

Insbeſondere gehört hieher das vierte Parallelogramm, in Form eines Quadrats, mit den überſchriebenen Grundzeichen 0, 1, 2, 3 ... 9 des dekadiſchen Zahlengebäudes, in welchem zugleich alle kleinere, von weniger als 10 Grundzeichen, enthalten ſind und deutlich vor Augen liegen, ſo wie alle größere, von mehr als 10 Grundzeichen, daraus ſogleich hergeſtellt werden können. Das zweyzifrige Geſetz von zwey Grundzeichen $\begin{matrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{matrix}$ liegt oben linker Hand; daraus entſteht, durch Anlegung des Winkels

kels oder Gnomons $\begin{smallmatrix}02\\20\cdot22\end{smallmatrix}$ das zweyzifrige Geſetz von drey Grundzeichen $\begin{smallmatrix}00\cdot02\\20\cdot22\end{smallmatrix}$ und daraus, durch Anlegung des Winkels oder Gnomons $\begin{smallmatrix}03\\30\cdot33\end{smallmatrix}$ das zweizifrige Geſetz von vier Grundzeichen $\begin{smallmatrix}00\cdot03\\30\cdot33\end{smallmatrix}$ u. ſ. w. die Geſetze von 5, 6... bis auf 10 Grundzeichen, für das dekadiſche Syſtem, welches hier vollſtändig dargeſtellt iſt. Aus dem dekadiſchen findet man weiter, für ein angenommenes 11tes Grundzeichen, durch Anlegung eines neuen Winkels oder Gnomons, wie vorher, das zweyzifrige Geſetz für das hendekadiſche (11zifrige) Zahlengebäude, u. ſ. w. für mehrere Grundzeichen und Zahlenſyſteme.

Dieſe figürliche Darſtellung der Zahlenſyſteme in und um einander, zeigt alſo eine wahre Involution (1). Auch habe ich dieſe Erſcheinung zuerſt bey den Unterſuchungen über die Zahlengebäude wahrgenommen; dieſe und ähnliche Anordnungen (in quadratiſchen, rectangulären, triangulären, polygoniſchen, regulären und irregulären, Formen) bey meinen Unterſuchungen über die mechaniſche Fortſchreitung der Zahlen, bey verlangter Zahlen Aufſuchung durch Abzählung nach Fächern oder deren Abmeſſung nach vorgeſchriebenen Diſtanzen *) vielfältig benutzt; den Vortheil, den ſie auch in der Combinationslehre gewähren können, erkannt, und ſolchen über die geſamte Wiſſenſchaft erſtreckt; um ſo mehr, da aus dergleichen Darſtellungen, die Geſetze der Fortſchreitung der Zahlen,

*) Meine Beſchreibung einer neuen Art — Zahlen durch Abzählen oder Abmeſſen zu finden.. Leipz. bey Cruſius 1776. mit Kupfern und Beylagen.

Zahlen, nach jedem Systeme, in der Ordnung und sprungweise, sogleich in die Augen fallen, die ich dann zum Grunde meiner neuen Combinationslehre gelegt habe, bey welcher **gut geordnete** Complexionen und Classen wie Zahlen wachsen oder abnehmen Nov. Syst. Perem. IX. 25, 26.

Der Erfolg davon war in der That außerordentlich. Denn nun erschien die Combinationslehre auf einmal in der ursprünglichen Simplicität, die ihr als **selbstständiger Grundwissenschaft** zukommt, aus welcher die Arithmetik und Analysis hervorgehen. Die Regeln der so **einfachen combinatorischen Operationen** ließen sich nun sehr kurz abfassen, und waren äußerst leicht, leichter als die schon **zusammengesetztern arithmetischen Operationen**, die nur **bedingte** combinatorische sind. Bey jenen nehmlich beruht alles auf **bloßer Zusammenstellung**, Ordnung und Versetzung **der Elemente zu Complexionen**; bey diesen hingegen muß zugleich mit auf derselben **besondere Werthe, Lagen** und **Beziehungen**, wie sie als **Zahlen** auf und in einander wirken sollen, Rücksicht genommen werden. **Was** endlich über alles wichtig ist, die ausgedehnteste Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis war nun eine natürliche und nothwendige Folge einer solchen Umänderung, und zog die Erfindung bequemer combinatorischer und anderer harmonirenden Zeichen (Nov. Syst. Perm. p. XXXII-XLIX) herbey, die gleich geschickt sind, die, größtentheils neuen, combinatorischen, einfachen und zusammengesetzten, Begriffe (Ebend. p. IV-XV) kurz und deutlich darzustellen, und zu **Local- und combinatorisch-analytischen** Formeln sich anordnen zu lassen *).

Hier-

*) Ueber Localausdrücke und Localformeln sehe man Hn. M. Toepfers Erläuterungen (Comb. Anal. S. 159-164) und die dort angeführten Stellen. Hierher gehört vornehmlich meine (hier S. 17 Note angeführte) Abhandlung, wo die Anordnung der einzelnen Localausdrücke in die Hauptformel, die Reduction der

Hierbey ward die Einführung

des Zeigers (*index*, *indiculus*)

$\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}$; oder $\binom{1,2\ 3,4\ldots}{b,c,d,e\ldots}$; etc

unentbehrlich; die simpelste Nachweisung, die man sich denken kann.

Die von mir (Infin. Dign. und Nov. Syst. Perm.) angewiesenen und mannichfaltig benutzten Vorschriften, gegebene Dinge $\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}$ zu permutiren, combiniren und variiren, führen auf dergleichen Involutionen, die nun etwas näher erwogen werden sollen.

## B. Involutionen für Permutationen (*Nov. Syst. Perm.* p. LVII.).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1234, *abcd* | 2134, *bacd* | 3124, *cabd* | 4123, *dabc* |
| 1243, *abdc* | 2143, *badc* | 3142, *cadb* | 4132, *dacb* |
| 1324 *acbd* | 2314, *bcad* | 3214 *cbad* | 4213, *dbac* |
| 1342, *acdb* | 2341, *bcda* | 3241, *cbda* | 4231, *dbca* |
| 1423, *adbc* | 2413 *bdac* | 3412, *cdab* | 4312, *dcab* |
| 1432, *adcb* | 2431, *bdca* | 3421, *cdba* | 4321, *dcba* |



der Localausdrücke in combinatorische, und dieser wieder in gemeine, von S. I-IX. aufs deutlichste nachgewiesen und weiterhin auch durch Anwendung auf Beyspiele noch mehr aufgeklärt wird. Das Verfahren hierbey kann nur, wegen seiner Neuheit und Abweichung von allen übrigen bisher bekannten, anfangs auffallen, vielleicht auch wohl etwas schwierig scheinen; an sich aber, und bey genauerer Untersuchung, wird man es, über alle Vorstellung hinaus, leicht und faßlich finden. Nihil est facilius, nihil naturae consentaneum magis — Wenn das Leibnitz von seiner, freilich noch sehr mangelhaften (oben, 6.) und gewissermaßen todten combinatorischen Anordnung sagen konnte: so muß es wohl um so mehr von meiner ungleich vollkommnern, ganz lebendigen Darstellung gelten.

Dieſe Darſtellung (hier nur beyſpielsweiſe auf 4 Dinge bezogen) in welcher die Complexionen wie wachſende Zahlen auf einander folgen, iſt ſo leicht, wie jede andere Vorſchrift zu permutiren, aber in der Anwendung und in ihren Folgen, nützlicher als alle übrigen. In dieſer Involution für vier Dinge, ſind zugleich folgende Evolutionen (beſondere, niedrigere Involutionen) enthalten, für ein Ding 4 oder 1; für zwey Dinge 3, 4 oder 1, 2; für drey Dinge 2, 3, 4 oder 1, 2, 3; wie ſie durch die Winkel in den hier zur Seite ſtehenden Parallelogrameen A, D nachgewieſen werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |

A

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

D

Den Nutzen dieſer Involution zeigen unter andern:

1) Für $n$ Dinge $a, b, c, d \ldots$ ſetze man die Zifern oder Elemente $1, 2, 3, 4 \ldots$ dann gilt folgende **Regel der Verſetzung** dieſer Dinge: „Man ſchreibe die kleinſte $n$zifrige „Complexion $1234 \ldots n$, und alle gleichvielzifrige ſucceſ„ſive größere Complexionen, nach der Ordnung, bis zur „größten $n \ldots 4321$, die ſich aus den gegebenen Elemen„ten (ohne eins mehr als einmal zu ſetzen) ſchreiben laſſen: „ſo hat man alle mögliche Verſetzungen der gegebenen „$n$Dinge in Zifern, und dadurch auch in Buchſtaben (Nov. „Syſt. Perm. p. XVII, XVIII.)“

Größere oder kleinere **Complexionen** ſind hier mit größern oder kleinern **Zahlen** gleichgültig, und der Ausdruck der Regel zeigt ſchon, daß ſie jede Complexion, in ihrer unabänderlichen Ordnung, nothwendig herbey führen muß. Daraus fließt, theils unmittelbar, theils durch eine leichte Folge:

2) Die Regel, **folgende Complexionen aus unmittelbar vorhergehenden** abzuleiten. Meine Vorrede zu Rüdig. Spec. an. de lin. curv. ſec. ord. p. XLVI.

3) Der

3) Der Ausdruck 1.2.3.4...n für die Anzahl der Verſetzungen von n verſchiedenen Dingen.

4) Die Beantwortung der Fragen: die wievielte eine gegebene Complexion z. B. 4213 oder *dbac* in ihrer Ordnung ſey, und wie eine durch ihre Ordnungszahl angegebene, z. B. die 21ſte Complexion ausſehe?

Das alles läßt ſich auf dem Wege der Involution leichter, als auf andern Wegen, finden und beantworten.

Ich habe hier die Complexionen, in Zifern und Buchſtaben, neben einander geſtellt. In der Folge werde ich, zu Erſparung des Raums, nur eins von beyden, Zifer- oder Buchſtaben-Complexionen beybringen.

## C. Involutionen für Combinationen an ſich (*ſimpliciter*)

nach Claſſen, mit und ohne Wiederholung

α) mit Wiederholungen.

| 1 | 2 | 3 | = A |
|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | = B |
| | 22 | 23 | |
| | | 33 | |
| 111 | 112 | 113 | = C |
| | 122 | 123 | |
| | | 133 | |
| | 222 | 223 | |
| | | 233 | |
| | | 333 | |
| etc | etc | etc | etc |

β) ohne Wiederholungen.

| 1 | 2 | 3 | 4 | = A' |
|---|---|---|---|---|
| | 12 | 13 | 14 | = B' |
| | | 23 | 24 | |
| | | | 34 | |
| | | 123 | 124 | = C' |
| | | | 134 | |
| | | | 234 | |
| | | | 1234 | = D' |

Es giebt in β nur ſo viel Claſſen, als Dinge zu combiniren gegeben worden ſind.

Das Geſetz der Combination, und die Fortſchreitung bey mehrern Dingen und mehrern Claſſen, fällt, ſo wie die Involution ſelbſt, wie ſie durch (hier nicht gezogene) verticale Linien, neben den Endzifern 1, 2, 3... ſich zeigt,

deutlich in die Augen. Die Darſtellung in α iſt (Infin. Dign. p. 17. 18.) noch etwas weiter, aber in Buchſtaben, ausgeführt. Regeln dafür (wie die in B, 1, 2), ſtehen Nov. Syſt. Perm. p. XIX. 8 und 10. Die Involution für die nte Claſſe, in einer Tafel (Infin. Dign. p. 157. 158.), Tafel, für Combinationen ohne Wiederholungen. (Ebend. p. 161.)

Die Darſtellungen in α, β, ſo wie die etwas erweiterte (Infin. Dign. p. 17. 18.) geben Veranlaſſung zu mannichfaltigen Beobachtungen und Folgerungen, in Beziehung auf Anfangs- und Endziffern, horizontal und vertical fortſchreitende Complexionen, Entwickelung folgender Claſſen aus vorhergehenden, folgender Complexionen aus vorhergehenden, in horizontaler und verticaler Lage, Anzahl der Complexionen überhaupt und für jede Claſſe insbeſondere, für jede beliebige Menge gegebener Dinge u. ſ. w. (Ebendaſ. S. 19–22.). Man vergleiche B, 1, 2, 3, 4, und man wird dadurch einen Theil von dem beſtätiget finden, was (in 6, am Ende) von dem Nutzen der figürlichen Darſtellungen iſt geſagt worden, die man bisher viel zu wenig in Betrachtung gezogen hat.

## D. Involution für Combinationen und Variationen zu beſtimmten Summen

mit Widerholungen

α) Combinationen für 5. β) Variationen für 4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $^5A$ | 5 | 4 | $^4A$ |
| $^5B$ | 1 4 | 1, 3 | |
| | 2, 3 | 2, 2 | $^4B$ |
| | | 3, 1 | |
| $^5C$ | 1, 1 3 | 1, 1, 2 | |
| | 1, 2, 2 | 1, 2, 1 | $^4C$ |
| $^5D$ | 1, 1, 1, 2 | 2, 1, 1 | |
| $^5E$ | 1, 1, 1, 1, 1 | 1, 1, 1, 1 | $^4D$ |

Die

Die Auflösungen von beyderley Discerptionsaufgaben, wie ſie Infin. Dign. p. 74-76 für **Combinationen**, und p. 131, 132 für **Variationen**, gegeben worden, führen auf Involutionen, wo die **Discerptionen** aller kleinern Zahlen, durch (hier nicht gezogene) verticale und horizontale Linien, ſich herausſchneiden laſſen. Das Verfahren dafür hat keine Schwierigkeit, und iſt a. a. O. S. 79, 80 und 133, 134 (und am erſten Orte mit Bemerkung der Aehnlichkeit dieſes Ausſchneidens mit dem hier in A beſchriebenen Verfahren für kleinere Zahlenſyſteme aus größern) deutlich beſchrieben worden. Tafeln ſolcher Combinationen und Variationen Inf. Dign. p. 166; 172. 180. Dergleichen Combinationen ohne Widerholungen; Ebend. S. 85, 8 und 87, 9.

Anm. 1. Die Darſtellungen in B, C, D ſind, der Kürze wegen, alle auf beſtimmte Zahlen und Claſſen bezogen, die Regeln ihrer Anordnungen hingegen ſind *allgemein*. Alle kommen ſie mit einander darin überein: 1) Daß ihre Complexionen ſämtlich, wie wachſende Zahlen auf einander folgen, oder die **Claſſen** dieſer Complexionen **gut geordnet** ſind. Bey den Combinationen ſind ſelbſt die **Elemente** der Complexionen **gut geordnet**, welches bey den Verſetzungen und Variationen nicht ſtatt haben kann. 2) Daß ſie wahre Involutionen darſtellen. Wo dieſe beyden Bedingungen beyſammen ſind (wenn ſie es ſeyn können) da iſt, im allgemeinen genommen, die Darſtellung am vollkommenſten.

Anm. 2. Die **Variationen** an ſich (ſimpliciter) mit und ohne Widerholungen, machen hier eine Ausnahme, und ſind daher auch unter den Involutionen nicht mit aufgeführt worden. Es laſſen ſich nehmlich bey ihnen die beyden Bedingungen in Anm. 1. nicht vereinigen. So giebt zwar die zweyte Auflöſung der IIIten Aufgabe (Nov. Syſt. Perm. p. XX, XXI. und die Tafel p. LXI.)

die

die Variationscomplexionen aller Classen wie wachsende Zahlen hinter einander, aber keine Involution, nach der (in 1) festgesetzten Bedeutung des Worts. Denn die hier mögliche Absonderung der Variationen von weniger Dingen, kann nicht so geradezu durch eine mechanische Scheidung bewirkt werden, sondern macht das Aufmerken auf Complexionen nöthig, die nur die gegebenen, keine andern, Elemente enthalten.

Anm. 3. Die Involutionen in B, C, D sind, vornehmlich in Beziehung ihres Gebrauchs bey Auflösung der combinatorisch-analytischen Formeln, selbst der verwickeltsten Aufgaben, wichtig; wie unzählige Beyspiele bereits gelehrt haben. Es giebt aber noch viel andere Involutionen, die die Umstände und Bedingungen der Aufgaben, oder willkührliche Bestimmungen, von selbst herbeyführen. Hieher gehören:

## E. Involutionen bey cyklischen Perioden.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | | | | | 2 | 2 | 2 | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | |
| 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | 2 | 1 | 4 | |
| 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 2 | 5 | 5 | 1 | 2 | 5 | |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 1 | 3 | 6 | 6 | 2 | 3 | 1 | |
| 1 | 1 | 3 | 7 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 3 | |
| 1 | 3 | 1 | 9 | 1 | 3 | 3 | 9 | 1 | 3 | 4 | |
| 1 | 1 | 2 | 10 | 1 | 1 | 4 | 10 | 2 | 1 | 5 | |
| 1 | 2 | 3 | 11 | 1 | 2 | 5 | 11 | 1 | 2 | 1 | |
| 1 | 3 | 4 | 12 | 1 | 3 | 6 | 12 | 2 | 3 | 2 | |
| | | | | | | | | u. s. w. | | | |

Die cyklisch zu verbindenden Reihen sind hier im ersten Parallelogramme: 1; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; im zweyten:

1;

1; 1, 2, 3; 1, 2, 3..6; 1, 2, 3...12; im dritten: 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4, 5. Sie werden so lange in die Tiefe fortgeschrieben, bis man einmal auf die höchste oder größte Complexion (hier, nach der Ordnung, auf 1, 3, 4 oder 1, 3, 6, 12 oder 2, 3, 5) verfällt, welche denn das letzte horizontale Glied des ersten und aller übrigen (ohne Ende fort sich widerholenden Perioden ist; und so fließt die Involution (die Evolutionen werden hier durch eingeschriebene Winkel nachgewiesen) unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe selbst, nach denen man die Glieder der cyklisch zu verbindenden Reihen in senkrechten Colonnen, neben einander in die Breite, so wie ihre Zahlen unter einander in die Tiefe schreibt (Leipz. Mag. für Mathem. 1786. S. 283 ꝛc.).

## F. Involution der Buchstabenreihe

*a, b, c, d, e, f, g, h...*

nach folgendem Gesetze:

| | | |
|---|---|---|
| *a* | (1) | I. Setze man *a* als Anfangsglied. |
| *b* | (2) | II. Setze man *b* einzeln und mit dem vorhergehenden Gliede *a* (in I) verbunden, so hat man *b* und *ab*. |
| *ab* | (3) | |
| *c* | (4) | III. Setze man *c*, einzeln und mit allen vorhergehenden Gliedern (aus I und II) verbunden, so hat man *c, ac, bc, abc*. |
| *ac* | (5) | |
| *bc* | (6) | |
| *abc* | (7) | |
| *d* | (8) | IV. Setze man *d*, einzeln und mit allen vorhergehenden Gliedern (aus I, II und III) verbunden, so hat man *d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd*. |
| *ad* | (9) | |
| *bd* | (10) | |
| *abd* | (11) | |
| *cd* | (12) | |
| *acd* | (13) | |
| *bcd* | (14) | |
| *abcd* | (15) | |
| u. s. w. | etc | V. Setzt man so weiter jeden folgenden Buchstaben in seiner Reihe, einzeln und mit allen vorhergehenden Gliedern verbunden, |

den, so findet man, was jeder Buchstabe für sich und mit den vorhergehenden Gliedern, als Endbuchstabe verbunden, giebt.

VI. Alles zusammen giebt die Verbindungen, wie sie hier unter F stehen. Die in Klammern daneben gesetzten Zahlen, sind die Ordnungszahlen der Glieder, wie sie in der Reihe auf einander folgen.

Zus. 1. Rechnet man die Complexionen, die einerley Endbuchstaben haben, zu einer Classe, so fängt jeder Buchstabe in seiner Ordnung eine neue Classe an, und man hat so viel Classen, als Buchstaben in der gegebenen Buchstabenreihe gesetzt sind. Diese Classen kann man selbst nach diesen Endbuchstaben, die Classe *a*, die Classe *b*, die Classe *c*, die Classe *d* u. s. w. nennen.

Zus. 2. Die Involution liegt klar vor Augen. Denn da, nach dem Verbindungsgesetz, jede folgende Classe durch Setzung ihres Buchstabens, und Anfügung desselben (als Endbuchstabens) an die Complexionen aller vorhergehenden Classen entsteht: so muß auch die Absonderung dieses Buchstabens durch einen (hier nicht gezogenen) Verticalstrich, aus jeder höhern Classe sogleich alle vorhergehenden niedrigern darstellen; z. B. die Absonderung von *d* in der Classe *d*, giebt die sämtlichen Complexionen der vorhergehenden Classen *a*, *b* und *c*, u. s. w. wenn man die Absonderung durch dergleichen Verticalstriche noch weiter fortsetzt.

Zus. 3. Statt der Buchstaben

*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, etc

Die Zahlenwerthe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc gesetzt, die in progressione dupla geometrica fortgehen, so geben die Complexionen der Darstellung in F (wenn man, was dort, combinatorisch betrachtet, blos Verbindung [Nebeneinanderstellung] ist, hier arith-

arithmetiſch als Summe anſieht) die Ordnungszahlen nach der Reihe, wie ſie dort neben den Complexionen in Klammern ſtehen. Den Beweis davon, nebſt Anwendung auf Zuſammenſetzung von Gewichten und den Regiſtern des Blackiſchen Probierofens, habe ich (Leipz. Mag. für Math. 1782. S. 434-439) gegeben. Eine ausführlichere Tafel der Claſſen *a*, *b*, *c* bis *h*, nebſt den Ordnungszahlen zur Seite, von 1 bis mit 255 (Ebendaſ. S. 351, 352).

Anm. Lieſt man die Verbindungen in F rückwärts, ſo, daß man die Buchſtaben *a*, *b*, *c*, *d*... nicht als Endbuchſtaben, ſondern als Anfangsbuchſtaben anſieht: ſo folgen die Complexionen ſo auf einander, daß ſie zu einer alphabetiſch geordneten Reihe paſſen; wie Jeder ſogleich wahrnehmen wird, der ſie als Wörter eines Lexikons betrachten wollte, wo ſie unter andern Wörtern der Sprache, zu der ſie gehörten, in keiner andern Ordnung folgen könnten, als ſie hier haben. Auch unter ſich befolgen ſie eine alphabetiſche Ordnung, die aber, mit der gewöhnlichen allgemein bekannten verglichen, dergeſtalt beſchränkt iſt, daß hier „auf ſchon geſetzte Buchſtaben, kein gleicher und eben ſo wenig ein höherer oder ſpäterer folgen darf.“ Wo z. B. ſchon *bgd* ſteht, kann kein *d*, *e*, *f* u. ſ. w. folgen. Mehr hiervon in dem oben (4) verſprochenen Aufſatze über alphabetiſche Darſtellung.

8. Noch will ich eine, nirgends von mir aufgeſtellte, Involution von ſehr ausgedehnter Anwendung, in Betrachtung ziehen, und in ihre mannichfaltigen Formen zerlegen. Ihr Verbindungsgeſetz hat Aehnlichkeit mit dem in F (7); ich will aber hier das ganze Verfahren, und was dadurch geſucht wird, ganz allgemein in Form einer Aufgabe vortragen.

Aufgabe. Zwo Glieder P, Q, oder ihre Werthe A, B, ſeyen als Anfangsglieder (oder überhaupt als zwey unmittelbar auf einander folgende Glie-

den, ſo findet man, was jeder Buchſtabe für ſich und mit den vorhergehenden Gliedern, als Endbuchſtabe verbunden, giebt.

VI. Alles zuſammen giebt die Verbindungen, wie ſie hier unter F ſtehen. Die in Klammern daneben geſetzten Zahlen, ſind die Ordnungszahlen der Glieder, wie ſie in der Reihe auf einander folgen.

Zuſ. 1. Rechnet man die Complexionen, die einerley Endbuchſtaben haben, zu einer Claſſe, ſo fängt jeder Buchſtabe in ſeiner Ordnung eine neue Claſſe an, und man hat ſo viel Claſſen, als Buchſtaben in der gegebenen Buchſtabenreihe geſetzt ſind. Dieſe Claſſen kann man ſelbſt nach dieſen Endbuchſtaben, die Claſſe *a*, die Claſſe *b*, die Claſſe *c*, die Claſſe *d* u. ſ. w. nennen.

Zuſ. 2. Die Involution liegt klar vor Augen. Denn da, nach dem Verbindungsgeſetz, jede folgende Claſſe durch Setzung ihres Buchſtabens, und Anfügung deſſelben (als Endbuchſtabens) an die Complexionen aller vorhergehenden Claſſen entſteht: ſo muß auch die Abſonderung dieſes Buchſtabens durch einen (hier nicht gezogenen) Verticalſtrich, aus jeder höhern Claſſe ſogleich alle vorhergehenden niedrigern darſtellen; z. B. die Abſonderung von *d* in der Claſſe *d*, giebt die ſämtlichen Complexionen der vorhergehenden Claſſen *a*, *b* und *c*, u. ſ. w. wenn man die Abſonderung durch dergleichen Verticalſtriche noch weiter fortſetzt.

Zuſ. 3. Statt der Buchſtaben

*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, etc

Die Zahlenwerthe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc

geſetzt, die in progreſſione dupla geometrica fortgehen, ſo geben die Complexionen der Darſtellung in F (wenn man, was dort, combinatoriſch betrachtet, blos Verbindung [Nebeneinanderſtellung] iſt, hier arith-

den folgenden Werth C. Welche Lage von A und B man wählen will, ist gleichgültig. Beyde werden hier zunächst (in V, α die erste, in V, β die zweyte) vorkommen.

IV. Da nun A und B gegeben, und C (aus III) gefunden ist: so setze man d oder 8 neben den gefundenen Werth von C, und ferner senkrecht darunter b oder 7, mit B verbunden: so giebt das zusammen den folgenden Werth D (I).

V. Verfährt man so weiter mit den (in III und IV) gefundenen, und ferners weit zu findenden Werthen, und schreibt nach und nach an sie die kleinern Buchstaben, d, b oder die Zahlen 8, 7, ingleichen e, e oder 10, 9, und f, f oder 12, 11 u. s. w. nach den Gleichungen in I, so kommt die gesuchte Involution, für alle Werthe nach der Ordnung, und zwar

| (α) in Buchstaben | | | | | und | (β) in Zahlen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A c | d | e | f | u. | | B. 6 | 8 | 10 | 12 | u. |
| B c | d | e | f | | | A. 5 | 8 | 10 | 12 | |
| B b | e | f | | | | B. 7 | 10 | 12 | | |
| A c c | | f | | | | B. 6. | 9 | 12 | | |
| B c e | | f | | s. | | A. 5. | 9 | 12 | | s. |
| A c d f | | | | | | B. 6. | 8. | 11 | | |
| B c d f | | | | | | A. 5. | 8. | 11 | | |
| B b f | | | | | | B. 7. | 11 | | | |
| u. | s. | w. | | | | u. | s. | w. | | |

wie sie durch die eingesetzten Winkel aufs deutlichste nachgewiesen werden.

Anm. 1. Die verschiedene Lage von A und B in V, bringt zwar für die daraus entstehenden folgenden Werthe dieselben Resultate, aber nicht dieselbe Ordnung der Complexionen, die für beyderley Lagen verschieden ausfällt.

Anm. 2. So wie in V die Anfangswerthe A, B unter einander stehen, so können sie auch in besondern Fällen und nach den verschiedenen Bestimmungen von A und B, neben einander gesetzt, selbst in einander verschränkt werden; wie aus folgendem mit mehrerm erhellen wird.

9. Da in der Aufgabe (8) alles auf den Werthen von A und B beruht, so will ich noch hier ein Paar Bestimmungen derselben in Betrachtung ziehen, die in der Folge nützlich seyn werden.

I. Die Involution (8) für $A = 1$, und $B = 1.4$ mag $\gamma$; eine andere für $A = 2$ und $B = 2.4 + 3$ soll $\delta$ heißen: so findet man die Lage von A, B nach $\alpha$, $\beta$ gebraucht, und die Zahlen dafür so wie hier gesetzt:

($\gamma$)

| A | B | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1.4 | 6 | 8 | 10 | u. |
| B | 1.5 | 8 | 10 | | |
| | 1.4.7 | 10 | | | f. |
| | 1.4.6.9 | | | | |
| | 1.5.9 | | | | |

u. f. w.

($\delta$)

| A | B | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10, |
| | 3 | 6 | 8 | 10 | |
| B | 2.5 | 8 | u. | | |
| | 2.4.7 | f. | | | |
| | 3.7 | | | | |

u. f. w.

Hier liegen die angenommenen Zahlenwerthe für A, B, neben, in und unter einander.

Läßt man in den Complexionen von $\gamma$ überall die 1 weg (die man leicht zusetzen kann, wenn man $\gamma$ complet haben will) so kommt 4. 6. 8. 10 etc als erste Complexion für $\gamma$, wie 2. 4. 6. 8. 10 etc für $\delta$; und so entstehen, vermittelst der Anfänge $\begin{matrix} 4.6 \\ \hline 5 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 2.4 \\ \hline 3 \end{matrix}$ die Involution für $\gamma$ und $\delta$, beyde nach einerley Gesetze, unabhängig von einander.

II. Ab-

II. Abhängig findet man, wenn man von jeder Zahl der (um 1 verkürzten, 1) Complexionen in $\gamma$, 2 abzieht, oder zu jeder Zahl der Complexionen in $\delta$, 2 zusetzt, die Involution für $\delta$ aus $\gamma$, oder für $\gamma$ aus $\delta$. Auch entsteht $\delta$ aus $\gamma$, wenn man überall in den Complexionen

wo in $\gamma$ steht: 1.4 und 1.5
für $\delta$ setzt: (2.4+3) . 2.5

alle übrige Zahlen, oder Factoren in $\gamma$ hingegen auch für $\delta$ unverändert beybehält.

III. Das Gesetz (und was weiter damit zusammenhängt) für $\gamma$ recht anschaulich zu machen, mag nachstehende Involution für mehrere Werthe hinter einander dienen:

$\gamma$

| | A | B | C | D | E | F | G | .... | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1. | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | .... | 2n |
| C | | 1. | 5 | 8 | 10 | 12 | 14 | .... | 2n |
| D | | 1. | 4. | 7 | 10 | 12 | 14 | .... | 2n |
| | | 1. | 4. | 6. | 9 | 12 | 14 | .... | 2n |
| E | | | 1. | 5. | 9 | 12 | 14 | .... | 2n |
| | | 1. | 4. | 6. | 8. | 11 | 14 | .... | 2n |
| | | | 1. | 5. | 8. | 11 | 14 | .... | 2n |
| F | | | 1. | 4. | 7. | 11 | 14 | .... | 2n |
| | 1. | 4. | 6. | 8. | 10. | 13 | | .... | 2n |
| | | 1. | 5. | 8. | 10. | 13 | | .... | 2n |
| | | 1. | 4. | 7. | 10. | 13 | | .... | 2n |
| | | 1. | 4. | 6. | 9. | 13 | | .... | 2n |
| G | | | 1. | 5. | 9. | 13 | | .... | 2n |
| | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ |
| | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ |
| | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ | ▪ |
| N | etc | | | etc | | | etc | | 2n—1 |

(A) Involution. Alles entſteht hier aus den beyden erſten Werthen A = 1 und B = 1.4 (I), oder aus dem

Anfange $\begin{matrix} A\ B \\ 1.4 \\ B\text{—} \end{matrix}$ durch bloße Beyfügung der Endfactoren:

6 neben B und 5 an A, für den dritten Werth C; dann 8 neben C und 7 an B, für den vierten Werth D u. ſ. w. in Anſehung der folgenden Werthe E, F, G ꝛc. nach den Gleichungen (8, I). Zugleich ſind hier, der bequemern Ueberſicht wegen, die ſucceſſiven Werthe A, B, C ꝛc. bis zum 7den, G, wie ſie, in einander liegend (involutio) einander beſtimmen, durch die Winkel, BB, CC, ... GG, welche die verticalen und horizontalen Linien mit einander machen, nachgewieſen worden.

(B) Beyſpiele. Um alſo z. B. den 7den Werth G = F. 14 + E. 13. (I) aus den hier dargeſtellten Complexionen für den 6ten Werth F und den 5ten Werth E (wie ſie hier innerhalb der Winkel FF und EE liegen) herzuleiten, ſetze man

1) Die gerade Zahl 2. 7 = 14 an den Verticalſtrich F rechter Hand, neben die, linker Hand deſſelben Striches liegenden Zahlen 12 und 11, ſo viel es dergleichen Zahlen giebt, in eine ſenkrechte Reihe unter einander.

2) Unter dieſe Reihe der 14 ſetze man die ungerade Zahl 2. 7 — 1 = 13, ſo vielmal unter einander, als die Zahl 12 neben dem Verticalſtriche E ſteht.

3) Neben und an dieſe (nach 2 geſetzte) Endzahlen 13, ſetze man linker Hand, und unter den Horizontalſtrich F, die ſämtlichen Zahlen der Complexionen, wie ſie (bis an und mit 1) neben und an den Zahlen 12 (in dem Winkel EE) liegen.

Alles zuſammen giebt die Complexionen für den verlangten 7den Werth G: Eben ſo könnte man auch die

Com-

Complexionen für den folgenden 8ten Werth H = G. 16 + F. 15; durch bloßes Ansetzen der zugehörigen Zahlen 16, 15, auf die so eben beschriebene Weise, u. s. w. die folgenden Werthe finden.

(c) **Evolution.** Umgekehrt, kann man aus jedem involutorisch dargestellten nten Werthe sogleich jeden niedrigern (n — 1)ten, (n — 2)ten, (n — 3)ten ... 3ten, 2ten, 1sten Werth entwickeln (euolutio) oder durch Winkel von den übrigen absondern und gleichsam herausschneiden. Ein Verticalstrich z. B. rechter Hand neben den Zahlen 12 und 11, und ein Horizontalstrich unter die Complexion 1. 4. 7. 11 (die letzte in welcher 11 vorkommt) bestimmen zusammen den 6ten Werth F in dem Winkel FF. Eben so werden der 5te Werth E und alle übrige niedrigere Werthe, durch die Winkel EE, DD, CC, BB, bestimmt, und (als so viele euolutiones) ausgeschnitten.

(d) **Unmittelbare Folgen.** Noch fließen aus dem in γ anschaulich dargestellten involutorischen Verfahren folgende Bemerkungen:

1) Für den nten Werth, vom 3ten an gerechnet, (denn die beyden ersten sind gegebene Werthe, I) ist,

die erste Complexion: 1. 4. 6. 8. 10 ... 2n

die letzte abwechselnd: { 1. 5. 9. 13. 17 ... 2n — 1
                        { 1. 4. 7. 11. 15 ... 2n — 1

jenes für n = 3, 5, 7, 9 ... dieses für n = 4, 6, 8 ...

2) Alle Complexionen in γ fangen sich theils mit 1.4 theils mit 1.5 an, und endigen sich in 2n oder 2n — 1. In Absicht auf diese Endzahlen sind sie genau von einander abgesondert, jene gehen voran und diese folgen; in Absicht aber auf die Anfänge 1.4 und 1.5 sind beyderley Complexionen durch einander gemengt.

(A) Involution. Alles entſteht hier aus den beyden erſten Werthen A = 1 und B = 1.4 (I), oder aus dem

Anfange 1.4 | durch bloße Beyfügung der Endfactoren:

6 neben B und 5 an A, für den dritten Werth C; dann 8 neben C und 7 an B, für den vierten Werth D u. ſ. w. in Anſehung der folgenden Werthe E, F, G ꝛc. nach den Gleichungen (8, I). Zugleich ſind hier, der bequemern Ueberſicht wegen, die ſucceſſiven Werthe A, B, C ꝛc. bis zum 7den G, wie ſie, in einander liegend (involutio) einander beſtimmen, durch die Winkel, BB, CC, ... GG, welche die verticalen und horizontalen Linien mit einander machen, nachgewieſen worden.

(B) Beyſpiele. Um alſo z. B. den 7den Werth G = F. 14 + E. 13. (I) aus den hier dargeſtellten Complexionen für den 6ten Werth F und den 5ten Werth E (wie ſie hier innerhalb der Winkel FF und EE liegen) herzuleiten, ſetze man

1) Die gerade Zahl 2. 7 = 14 an den Verticalſtrich F rechter Hand, neben die, linker Hand deſſelben Striches liegenden Zahlen 12 und 11, ſo viel es dergleichen Zahlen giebt, in eine ſenkrechte Reihe unter einander.

2) Unter dieſe Reihe der 14 ſetze man die ungerade Zahl 2. 7 — 1 = 13, ſo vielmal unter einander, als die Zahl 12 neben dem Verticalſtriche E ſteht.

3) Neben und an dieſe (nach 2 geſetzte) Endzahlen 13, ſetze man linker Hand, und unter den Horizontalſtrich F, die ſämtlichen Zahlen der Complexionen, wie ſie (bis an und mit 1) neben und an den Zahlen 12 (in dem Winkel EE) liegen.

Alles zuſammen giebt die Complexionen für den verlangten 7den Werth G. Eben ſo könnte man auch die

Com-

Reihe der Factoren 12. 14. 16...2n so oft vorkommt, so viel es einzelne Complexionen für den fünften Werth giebt.

5. Gehörten die Zahlen zwischen zwey Verticalstrichen (4) zum mten Werthe (ich nehme hier $m < n$ an), so enthielten die Fächer: $\alpha$ den $(m-2)$ten, a den $(m-1)$ten, b und $\beta$ die geraden und ungeraden Endzahlen $(2m$ und $2m-1)$ für den mten Werth; auch gäben die Producte a. b und $\alpha.\beta$ zusammen, den mten Werth in dem zugehörigen Winkel linker Hand, dessen Nebenwinkel den Abschnitt c c rechter Hand bestimmen würde, in welchem die Reihe der Factoren $(2m+2).(2m+4).(2m+6)...2n$ so oft vorkommt, so viel es einzelne Complexionen für den mten Werth giebt.

6. Hier wird, vermittelst des figürlich dargestellten Verfahrens, 5 durch 4 unmittelbar nachgewiesen; und so kann man eine solche Anordnung unter andern sehr zweckmäßig auch dazu benutzen: das Allgemeine im Besondern anzuschauen. Von einer Arithmetica figurata sind nur Bruchstücke vorhanden. Sie wird viel zu wenig benutzt. Hausen, Segner, Kästner, Karsten haben gleichwohl, gleich zu Anfange der Arithmetik figürliche Anordnungen mit aufgestellt, um allgemeine Vorstellungen über Zahlen und ihre Operationen zu geben, und allgemeine Sätze daraus herzuleiten. Gegenwärtige Abhandlung hat vornehmlich mit zur Absicht, den überwiegenden Nutzen der figürlichen Anordnung und Darstellung recht einleuchtend zu zeigen.

Da bey den Complexionen, die weiterhin in dieser und in der ganzen folgenden Abhandlung vorkommen, alles auf der Involution $\gamma$ (S. 35) beruht, so wird das, was hier darüber ausführlich ist beygebracht worden, nicht überflüssig seyn.

IV. Drückt man die Summe der mit 1. 4 anfangenden Complexionen durch 1. 4 S, und der mit 1. 5 anfangenden durch 1. 5 Σ aus, wo beyderley Summen zum nten Werthe gerechnet werden: ſo kann man die Involution für S + Σ, hier zur Seite, aus dem Anfange

| 6 | 8 |
|---|---|
| | 8 |
| | 7 |

nach eben dem Geſetze (wie γ in III) finden, ohne 1. 4 und 1. 5 mitzuſchreiben. Die Complexionen für S und Σ ſind übrigens hier für S + Σ eben ſo gemengt, wie die für γ in III, auch erhellet, daß alle Complexionen für S + Σ, die mit 6 oder 7 anfangen zu 1. 4, ſo wie die mit 8 oder 9 anfangenden zu 1. 5 gehören.

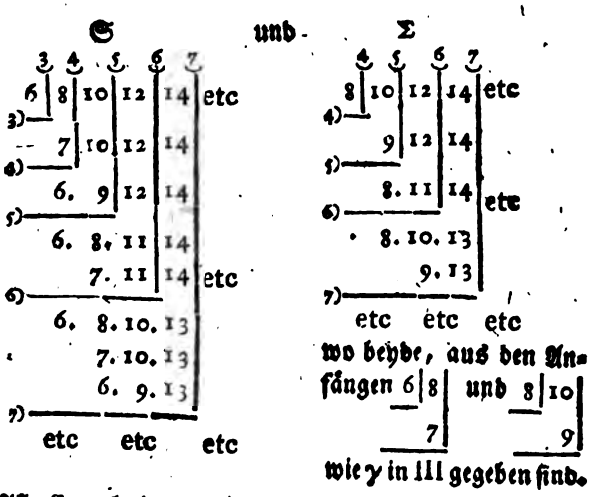
S + Σ

| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | etc |
| 3) | | | | | |
| | 8 | 10 | 12 | 14 | |
| | 7 | 10 | 12 | 14 | |
| 4) | | | | | |
| | 6. | 9 | 12 | 14 | |
| | | 9 | 12 | 14 | etc |
| 5) | | | | | |
| | 6. | 8. | 11 | 14 | |
| | | 8. | 11 | 14 | |
| | | 7. | 11 | 14 | |
| 6) | | | | | |
| | 6. | 8. | 10. | 13 | etc |
| | | 8. | 10. | 13 | |
| | | 7. | 10. | 13 | |
| | | 6. | 9. | 13 | |
| | | | 9. | 13 | |
| 7) | | | | | |
| etc | | etc | | etc | |

Die Schenkel der Winkel ſind hier nicht mit Buchſtaben (wie in III) ſondern mit Zahlen bezeichnet, die ſich auf die Zahlen der Werthe beziehen; welches für die Folge vortheilhafter iſt.

V. Auch laſſen ſich, nach eben dem Geſetze III, beyderley Complexionen 1 . S und Σ von einander abſondern, und jede Art beſonders darſtellen. Es iſt nehmlich

S und




Alle Complexionen in S fangen mit 6 oder 7, alle in Σ mit 8 oder 9 an, und gehören also wirklich, jene zu den Anfangsziffern 1.4, diese zu 1.5 (IV). Auch kann man, wenn einmal S dargestellt worden ist, Σ von S ableiten, wenn man (wie in II) jede Zahl von S in dem vorletzten (hier 6ten Werthe) um 2 für Σ zum letzten (hier 7den Werthe) erhöht; wo alsdenn beyde, zum nten Werthe gehörigen Factoren S und Σ (IV) die Endfactoren $2n$ und $2n-1$ haben werden (III).

VI. Wenn man die Involutionen für γ, δ in I und III mit denen für S und Σ in V vergleicht, so folgen daraus die Gleichungen

$\gamma = 1.4\,S + 1.5\,\Sigma$ und $\delta = (2.4+3)\,S + 2.5\,\Sigma$

wo δ aus γ (nach II) hergeleitet wird. Hier könnte man zwar die Complexionen für S und Σ in der Ordnung vermengen, wie sie in der Form $S+\Sigma$ (IV) vorkommen, aber es ist natürlicher und leichter, die getrennten Formen für S und Σ (V) zu gebrauchen.

VII. Diese Zerlegung in Factoren ist sehr nützlich, auch kann man den Vortheil (nach III S. 38; 4, 5) noch wei-

ter treiben, und auf sehr mannichfaltige Art dabey abwechseln. Da S und Σ sich auf die Anfänge 6 und 8 beziehen (V) die gleich oben an der Spitze ihrer Werthe stehen, so kann man auch $^{[6]}$S statt S, und $^{[8]}$S statt Σ, und überhaupt $^{[4]}$S, $^{[6]}$S, $^{[8]}$S, $^{[10]}$S, $^{[12]}$S, $^{[14]}$S, ... in ähnlicher Bedeutung, für dergleichen, zum nten Werthe gehörige, Factoren brauchen, die 4, 6, 8, 10. 12, 14 ... an der Spitze haben, und sämtlich in jeder Complexion mit $2n$ oder $2n-1$ sich endigen. Die Anfänge sind hier

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.6 | für $^{[4]}$S; | 6.8 | für $^{[6]}$S; | 8.10 | für $^{[8]}$S; | 10.12 | |
| 5 | | 7 | | 9 | | 11 | |

für $^{[10]}$S; u. s. w. und aus diesen Anfängen werden die Complexionen der vollständigen Factoren, wie in III oder V, entwickelt.

Man kann sie auch alle aus γ (III) so herleiten: Man lasse von allen Complexionen in γ die 1 weg, so hat man $^{[4]}$S; jede Zahl in $^{[4]}$S um 2 vermehrt, giebt $^{[6]}$S; um 4 vermehrt, $^{[8]}$S; um 6 vermehrt, $^{[10]}$S; um 8 vermehrt, $^{[12]}$S; etc. Hier sind $^{[6]}$S mit S und $^{[8]}$S mit Σ (in V) gleichgültig. und da man durch solche Vermehrungen der Zahlen in $^{[4]}$S, um 2, 4, 6 ... die Zahlen $2n$ und $2n-1$ als Endzahlen, früher erreicht, so werden für einerley n, der Complexionen für solche spätere Involutionen immer weniger.

Dergleichen Umsetzung und Verwandlung der Werthe und Formen, durch bloßes Zusetzen oder Abziehen gewisser Zahlen zu und von den einzelnen Zahlen der einzelnen Complexionen, sind eben so leicht als nützlich, und haben mir, vorzüglich bey den beyderley Discerptionen gegebener Zahlen zu bestimmten Summen, zu wichtigen Aufschlüssen, Relationen und Reductionen, verholfen, wodurch die Sätze, die Euler in seinem, in combinato-

binatorischer Rücksicht sehr wichtigen, Capitel de Partitione Numerorum (Introd. in Anal. Infin. C. XVI. und Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. T. III. p. 125 seq.) durch die Anwendung zum Theil sehr verwickelter Reihen erwiesen hat, sehr leicht und auf eine äußerst simple Art sich darthun lassen.

VIII. Aus den Gleichungen (8. Aufl. I) folgt der nte Werth, oder

$$\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{N}}^{1}.\,2n + \bar{\mathfrak{N}}^{2}.\,(2n-1)$$

und aus diesem, wenn man darinne n+1 statt n setzt, der (n+1)te Werth, oder

$$\dot{\mathfrak{N}}^{1} = \mathfrak{N}\,(2n+2) + \bar{\mathfrak{N}}^{1}\,(2n+1)$$

Der nte Werth besteht also aus der Summe der Producte des (n—1)ten Werthes in $2n$, und des $(n-2)$ten Werthes in $(2n-1)$; wo in beyden Producten die ersten Factoren $\bar{\mathfrak{N}}^{1}$ und $\bar{\mathfrak{N}}^{2}$, so weit als möglich zusammengesetzt, die zweyten Factoren, $2n$ und $2n-1$, so einfach als möglich sind. Hier aber (aus VII, verglichen mit IV, V) zeigt sich der Weg zu einem weit allgemeinern Ausdrucke, für welchen man, so weit man will, die ersten Factoren vereinfachen oder zusammensetzen, die zweyten zusammensetzen oder vereinfachen kann. Denn es ist, in den angenommenen Werthen von A und B (I)

$$\mathfrak{N}\begin{cases} = \mathfrak{A}^{[4]}\,S = 1.\,S^{[4]} \\ = \mathfrak{B}^{[6]}\,S + \mathfrak{A}.\,5.\,S^{[8]} = 1.4\,S^{[6]} + 1.5\,S^{[8]} \\ = \mathfrak{C}^{[8]}\,S + \mathfrak{B}.\,7.\,S^{[10]} = (\mathfrak{B}.6 + \mathfrak{A}.5)\,S^{[8]} + \mathfrak{B}.7.\,S^{[10]} \\ = \mathfrak{D}^{[10]}\,S + \mathfrak{B}.\,9.\,S^{[12]} = (\mathfrak{C}.8 + \mathfrak{B}.7)\,S^{[10]} + \mathfrak{C}.9.\,S^{[12]} \\ = \mathfrak{E}^{[12]}\,S + \mathfrak{D}.11.\,S^{[14]} = (\mathfrak{D}.10 + \mathfrak{C}.9)\,S^{[12]} + \mathfrak{D}.11\,S^{[14]} \\ \text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc} \end{cases}$$

ter treiben, und auf ſehr mannichfaltige Art dabey abwechſeln. Da S und Σ ſich auf die Anfänge 6 und 8 beziehen (V) die gleich oben an der Spitze ihrer Werthe ſtehen, ſo kann man auch $^{[6]}S$ ſtatt S, und $^{[8]}S$ ſtatt Σ, und überhaupt $^{[4]}S$, $^{[6]}S$, $^{[8]}S$, $^{[10]}S$, $^{[12]}S$, $^{[14]}S$, ... in ähnlicher Bedeutung, für dergleichen, zum nten Werthe gehörige, Factoren brauchen, die 4, 6, 8, 10. 12, 14 ... an der Spitze haben, und ſämtlich in jeder Complexion mit $2n$ oder $2n-1$ ſich endigen. Die Anfänge ſind hier

$$\frac{4.6}{5} \text{ für } {}^{[4]}S; \quad \frac{6.8}{7} \text{ für } {}^{[6]}S; \quad \frac{8.10}{9} \text{ für } {}^{[8]}S; \quad \frac{10.12}{11} \text{ für } {}^{[10]}S;$$

u. ſ. w. und aus dieſen Anfängen werden die Complexionen der vollſtändigen Factoren, wie in III oder V, entwickelt.

Man kann ſie auch alle aus γ (III) ſo herleiten: Man laſſe von allen Complexionen in γ die 1 weg, ſo hat man $^{[4]}S$; jede Zahl in $^{[4]}S$ um 2 vermehrt, giebt $^{[6]}S$; um 4 vermehrt, $^{[8]}S$; um 6 vermehrt, $^{[10]}S$; um 8 vermehrt, $^{[12]}S$; etc. Hier ſind $^{[6]}S$ mit S und $^{[8]}S$ mit Σ (in V) gleichgültig, und da man durch ſolche Vermehrungen der Zahlen in $^{[4]}S$, um 2, 4, 6 ... die Zahlen $2n$ und $2n-1$ als Endzahlen, früher erreicht, ſo werden für einerley n, der Complexionen für ſolche ſpätere Involutionen immer weniger.

Dergleichen Umſetzung und Verwandlung der Werthe und Formen, durch bloßes Zuſetzen oder Abziehen gewiſſer Zahlen zu und von den einzelnen Zahlen der einzelnen Complexionen, ſind eben ſo leicht als nützlich, und haben mir, vorzüglich bey den beyderley Discerptionen gegebener Zahlen zu beſtimmten Summen, zu wichtigen Aufſchlüſſen, Relationen und Reductionen, verholfen, wodurch die Sätze, die Euler in ſeinem, in combinato-

$$E \times {}^{[12]}S + D.11 \times {}^{[14]}S$$

$$\begin{vmatrix} 1.4.6.8.10 \\ +1.5.8.10 \\ +1.4.7.10 \\ +1\ 4.6.\ 9 \\ +1.5.\ 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 12.14.16.18 \\ +13.16.18 \\ +12.15.18 \\ +12.14.17 \\ +13.17 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.4.6.8.11 \\ +1.5.8.11 \\ +1.4.7.11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 14.16.18 \\ +15.18 \\ +14\ 17 \end{vmatrix}$$

Der Werth von E iſt hier offenbar dem Ausdrucke D.10 + C.9 gleich, wie er oben (8, I und hier VIII) angegeben worden. Setzt man (in dem Ausdrucke für E und D. 11) hier 2. 4 + 3 ſtatt 1.4; und 2. 5 ſtatt 1. 5 (II) ſo wird dadurch der gefundene Werth für γ in den für δ (I) umgeſetzt, die beyde nur durch die erſten Werthe A und B verſchieden ſind.

Anm. 1. Dieſe Zerlegung der Involution für γ und δ in ſolche Factoren iſt eine ſehr beträchtliche Verkürzung der Arbeit. Hätte man γ (III) bis zu J, d. i. bis zu den Endzahlen 18, 17 erſtrecken wollen, ſo hätte man dafür 34 Complexionen, von viel mehr Ziffern zu machen, und ſo, für beſtimmte Werthe von 1, 2, 3, 4 ... 17. 18 ſehr viel zu ſubſtituiren, und zuletzt 34 Producte zu addiren gehabt.

Anm. 2. Für höhere und alſo zuſammengeſetztere Claſſen (als D und E im Exempel ſind) könnte man ſolche Claſſen weiter eben ſo, wie oben den gefoderten 9ten Werth, in Factoren zerlegen, und ſo dieſe mehrern Factoren mit Bequemlichkeit, ſtatt der viel weitläuftigern einzelnen Complexionen, gebrauchen.

Anm. 3. Ich werde in der Folge zeigen, wie nahe de Moivre, Euler, Daniel Bernoulli, de la Grange und Lambert der Erfindung von Involutionen geweſen ſind, und wie die von ihnen gegebenen Vorſchriften ſie hätten darauf führen können. Man wird deutlich einſehen, daß blos der Umſtand, daß ſie bey Zuſammenſetzung der Glieder oder ihrer Wer-

Werthe keine figürliche Anordnung in und um einander befolgen, die Anwendung ihrer Regeln weitläuftiger gemacht hat, als nöthig war, und daß ſie eben deswegen überhaupt auf keine allgemeine Darſtellung und dieſerhalb auch nicht auf ſolche Factoren, wie in vorſtehendem Exempel, haben kommen können, die ſie ſonſt nicht verfehlen konnten. Den großen Vortheil ſolcher combinatoriſchen Involutionen und figürlichen Darſtellungen, habe ich vorlängſt nachdrücklich empfohlen. (Leipz. Magaz. für Naturk. und Math. 1782. S. 439. 440. Anmerk.).

Anmerk. 4. Die Aufgabe (8) iſt eine ſehr allgemeine, und zeigt überhaupt, wie man aus zwey gegebenen Gliedern, oder ihren Werthen A, B, alle folgende, die dadurch beſtimmt werden, durch Involution finden könne. Es iſt nun leicht, die Auflöſung auch auf drey, vier und mehr gegebene Werthe A, B, C, D, ... auszudehnen, um aus ihnen die folgenden, die durch ſie beſtimmt werden, zu finden; die, mit den gegebenen weiter zu verwickelnden Größen mögen nun entweder alle unter einander gleich, oder nach gegebenen Geſetzen verſchieden ſeyn, und ihre Einwirkung, ſo weit als man will vorwärts, ſich erſtrecken. Eben ſo leicht iſt es auch nun, die Geſetze anderer (mit 8 verwandter) Aufgaben involutoriſch darzuſtellen. Beyſpiele von figürlicher Anordnung Moivriſcher und Lagrangiſcher Vorſchriften, werden in der Folge vorkommen. Man kennt ſchon die Beſchwerlichkeit der gewöhnlichen Verfahren, durch recurrirende Glieder oder Werthe, bey zuſammengeſetzten Aufgaben, um die Wichtigkeit der Sache mit einem Blicke zu überſehen. Den Nutzen der Aufgabe (8) nach den Beſtimmungen (9) wird folgende Abhandlung über die continuirlichen Brüche zeigen.

Hindenburg.

$$E \times {}^{[12]}S + D.11 \times {}^{[14]}S$$

$$\begin{bmatrix} 1.4.6.8.10 \\ +1.5.8.10 \\ +1.4.7.10 \\ +1\ 4.6.\ 9 \\ +1.5.\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12.14.16.18 \\ +13.16.18 \\ +12.15.18 \\ +12.14.17 \\ +13.17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.4.6.8.11 \\ +1.3.8.11 \\ +1.4.7.11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14.16.18 \\ +15.18 \\ +14\ 17 \end{bmatrix}$$

Der Werth von E ist hier offenbar dem Ausdrucke D. 10 + C. 9 gleich, wie er oben (8, I und hier VIII) angegeben worden. Setzt man (in dem Ausdrucke für E und D. 11) hier 2. 4 + 3 statt 1.4; und 2.5 statt 1.5 (II) so wird dadurch der gefundene Werth für γ in den für δ (I) umgesetzt, die beyde nur durch die ersten Werthe A und B verschieden sind.

Anm. 1. Diese Zerlegung der Involution für γ und δ in solche Factoren ist eine sehr beträchtliche Verkürzung der Arbeit. Hätte man γ (III) bis zu J, d. i. bis zu den Endzahlen 18, 17 erstrecken wollen, so hätte man dafür 34 Complexionen, von viel mehr Ziffern zu machen, und so, für bestimmte Werthe von 1, 2, 3, 4 ... 17. 18 sehr viel zu substituiren, und zuletzt 34 Producte zu addiren gehabt.

Anm. 2. Für höhere und also zusammengesetztere Classen (als D und E im Exempel sind) könnte man solche Classen weiter eben so, wie oben den geforderten 9ten Werth, in Factoren zerlegen, und so diese mehrern Factoren mit Bequemlichkeit, statt der viel weitläuftigern einzelnen Complexionen, gebrauchen.

Anm. 3. Ich werde in der Folge zeigen, wie nahe de Moivre, Euler, Daniel Bernoulli, de la Grange und Lambert der Erfindung von Involutionen gewesen sind, und wie die von ihnen gegebenen Vorschriften sie hätten darauf führen können. Man wird deutlich einsehen, daß blos der Umstand, daß sie bey Zusammensetzung der Glieder oder ihrer Wer-

Dieſe meine Aeußerungen an den angeführten beyden Orten, haben neuerlich Herrn Johann Carl Burkhardt aus Leipzig, einen jungen Mann von gründlichen mathematiſchen Kenntniſſen, und Einſichten in die combinatoriſche Analytik, mit welcher er ſich ſeit einiger Zeit ernſtlich und mit gutem Erfolge beſchäftiget hat, veranlaßt, ein combinatoriſches Geſetz für die continuirlichen Brüche außer der Ordnung, für ſich aufzuſuchen. Er hat, was er gefunden, in einer Herrn Toepfer, bey Erlangung der Magiſterwürde gewidmeten Schrift *), bekannt und ſich dadurch um dieſe Aufgabe verdient gemacht. Da inzwiſchen ſein Verfahren von dem meinigen ganz verſchieden iſt, erſteres auch keine Involution giebt: ſo wird die Vorlegung meiner Vorſchriften und der daraus abgeleiteten Formeln nicht überflüßig ſeyn; wobey ſich zugleich zeigen wird, wie Herr Burkhardt, auf demſelben Wege, den er eingeſchlagen hat, zu der Hauptinvolution y (hier S. 35, III) hätte gelangen können, die allen übrigen zum Grunde liegt (S. 39, 6 am Ende).

Die folgenden Abſchnitte ohne Anſtoß zu verſtehen, wird es immer beſſer ſeyn, wenn auch nicht die ganze vorhergehende Abhandlung, doch wenigſtens den 8ten und 9ten Abſchnitt derſelben, zuvor im Zuſammenhange durchzuleſen, als ſelbige blos gelegentlich, wie ſie citirt werden, nachzuſehen.

Hindenburg.

---

I. Wenn

*) Methodus combinatorio-analytica, euoluendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipſiae d. VI. Martii 1794. 4to. 16 Seiten.

1. Wenn $z = \frac{a}{a+y}$ und $y = \frac{b}{b+x}$ und $x = \frac{c}{c+w}$ und $w = \frac{b}{d+\text{etc}}$ etc; die Anzahl solcher einzelnen Brüche mag nun endlich seyn, oder sie mögen ohne aufzuhören, fortgehen: so ist

$$z = \cfrac{a}{a+\cfrac{b}{b+\cfrac{c}{c+\cfrac{b}{d+\text{etc}}}}}$$

das Resultat aus der continuirlichen Substitution (substitutio continua) der Werthe y, x, w... und heißt ein continuirlicher, zusammenhängender, oder ein Kettenbruch.

2. Jeder solcher Bruch wird in der Folge allgemein durch

$$z = \cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4+\text{etc}}}$$

dargestellt werden. Soll also dieser Ausdruck den Bruch z (in 1) bedeuten; so wird solches durch den Index Ob. Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots \\ a, & a, & b, & b, & c, & c, & d, & d \ldots \end{pmatrix}$$

nachgewiesen.

3. Die Ordnungszahlen 1, 2, 3, 4, 5... zeigen hier nur die Stellen an, in welchen die einzelnen Buchstaben stehen, und sind also Lokalzeichen von der einfachsten Art, die auch hier deswegen durch kleinere Ziffern von andern Zahlen unterschieden werden sollen. Aller einzelnen Brüche (1) Zähler a, b, c, d... sind durch ungerade Zahlen, die Nenner a, b, c, d... durch gerade Zahlen, bezeichnet. Für jeden gegebenen continuirli-

Diese meine Aeußerungen an den angeführten beyden Orten, haben neuerlich Herrn Johann Carl Burkhardt aus Leipzig, einen jungen Mann von gründlichen mathematischen Kenntnissen, und Einsichten in die combinatorische Analytik, mit welcher er sich seit einiger Zeit ernstlich und mit gutem Erfolge beschäftiget hat, veranlaßt, ein combinatorisches Gesetz für die continuirlichen Brüche außer der Ordnung, für sich aufzusuchen. Er hat, was er gefunden, in einer Herrn Doepfer. bey Erlangung der Magisterwürde gewidmeten Schrift *), bekannt und sich dadurch um diese Aufgabe verdient gemacht. Da inzwischen sein Verfahren von dem meinigen ganz verschieden ist, ersteres auch keine Involution giebt: so wird die Vorlegung meiner Vorschriften und der daraus abgeleiteten Formeln nicht überflüßig seyn; wobey sich zugleich zeigen wird, wie Herr Burkhardt, auf demselben Wege, den er eingeschlagen hat, zu der Hauptinvolution y (hier S. 35, III) hätte gelangen können, die allen übrigen zum Grunde liegt (S. 39, 6 am Ende).

Die folgenden Abschnitte ohne Anstoß zu verstehen, wird es immer besser seyn, wenn auch nicht die ganze vorhergehende Abhandlung, doch wenigstens den 8ten und 9ten Abschnitt derselben, zuvor im Zusammenhange durchzulesen, als selbige blos gelegentlich, wie sie citirt werden, nachzusehen.

Hindenburg.

---

I. Wenn

*) Methodus combinatorio-analytica, euoluendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipsiae d. VI. Martii 1794. 4to. 16 Seiten.

ſtatt 2 im erſten für den zweyten, und $4+\frac{5}{6}$ ſtatt 4 im zweyten für den dritten, ſetzt. Eben ſo entſtehen durch Setzung, von $6+\frac{7}{8}$ ſtatt 6 im dritten, und von $^{8}+\frac{9}{10}$ ſtatt 8 im vierten ꝛc. die vierten, fünften ꝛc. Brüche, jeder aus dem nächſtvorhergehenden; deren ſucceſſive Werthe (4) auf ähnliche Art durch gleiche Subſtitution gefolgert werden, wie ſogleich erhellen wird.

6. Aufgabe. **Eines continuirlichen Bruches** (1, 2)

$$z=\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+\text{etc}}}}} \qquad \begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\ldots.\\ a, & a, & b, & b, & c, & c, & d, & d\ldots.\end{pmatrix}$$

**willkührlich verlangten Werth, z. B. den nten, anzugeben.**

## Auflöſung und Beweis.

(A) **Erſte Auflöſung: Entwickelung des Zählers und Nenners, unabhängig von einander, nach einem und demſelben Geſetze.**

I. Der erſte und zweyte Werth von z ſind (4, 5)

$$\frac{\mathfrak{A}}{A}=\frac{1}{2} \text{ und } \frac{\mathfrak{B}}{B}=\frac{1.4}{2.4+3}$$

Den zweyten findet man aus dem erſten, wenn man in ihm $2+\frac{3}{4}$ ſtatt 2 ſetzt (5) und Zähler und Nenner mit 4 multiplicirt.

II. Der dritte Werth iſt

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{1.4.6+1.5}{(2.4+3)6+2.5} = \frac{\mathfrak{B}.6+\mathfrak{A}.5}{B.6+A.5}$$

Man ſetzt hier nämlich $4+\frac{5}{6}$ ſtatt 4 in dem zweyten Werth (I) nach (5) und multiplicirt Zähler und Nenner mit 6. Die Werthe der einzelnen deutſchen und lateiniſchen großen Buchſtaben, werden durch die ihnen gegenüberſtehenden Zahlen, im Zähler und Nenner des Bruchs, beſtimmt.

III. Aehnliche Subſtitutionen, von $6+\frac{7}{8}$ ſtatt 6 in dem dritten (II) von $8+\frac{9}{10}$ ſtatt 8 in dem vierten Werth, u. ſ. w. mit der zugehörigen jedesmaligen Multiplication im Zähler und Nenner, durch 8, 10, ... reſpective, geben den vierten Werth $\frac{\mathfrak{D}}{D}$, und den fünften $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, u. ſ. w. alle folgende Werthe von z.

IV. In $\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\mathfrak{B}.6+\mathfrak{A}.5}{B.6+A.5}$ (II) haben Zähler und Nenner einerley Form; und da die Subſtitution und Multiplication für die folgenden Werthe (III) in dieſelben Zahlen bey beyden geſchieht: ſo braucht man nur das Geſetz für die Zähler (oder Nenner) nachzuſuchen, um ſolches ſogleich auf die Nenner (oder Zähler) weiter anzuwenden.

V. Der Erfolg der Subſtitution und Multiplication (III) in die vorhergehenden Werthe der Zähler (oder Nenner) läßt ſich verſchiedentlich angeben und benutzen. So kommt, aus des Zählers drittem Werthe

$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}.6 + \mathfrak{A}.5$, der vierte $[\mathfrak{B}(6 + \frac{7}{8}) + \mathfrak{A}.5].8$

oder $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}(6.8 + 7) + \mathfrak{A}.5.8 = (\mathfrak{B}.6 + \mathfrak{A}.5)8$
$+ \mathfrak{B}7 = \mathfrak{C}8 + \mathfrak{B}.7$

ferner $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}(8.10 + 9) + \mathfrak{B}.7.10 = (\mathfrak{C}.8 + \mathfrak{B}7)10$
$+ \mathfrak{C}9 = \mathfrak{D}.10 + \mathfrak{C}.9$

u. s. w. wo das Gesetz für die dreyerley Ausdrücke deutlich in die Augen fällt. Man setzt nehmlich, für jeden folgenden Werth aus dem vorhergehenden, den nächstfolgenden Buchstaben und die nächstfolgende gerade oder ungerade Zahl. Die Verwechselung der deutschen Buchstaben, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... als Zähler, mit den gleichnamigen lateinischen A, B, C, D, ... giebt die zugehörigen Nenner (IV).

VI. Es ist also (4. und Aufl. II, V)

$$z\upsilon 3 = \frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\mathfrak{B}.6 + \mathfrak{A}.5}{B.6 + A.5}$$

$$z\upsilon 4 = \frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\mathfrak{C}.8 + \mathfrak{B}7}{C.8 + B7}$$

$$z\upsilon 5 = \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{D}.10 + \mathfrak{C}.9}{D.10 + C.9}$$

$$z\upsilon 6 = \frac{\mathfrak{F}}{F} = \frac{\mathfrak{E}.12 + \mathfrak{D}11}{E.12 + D.11}$$

$$z\upsilon n = \frac{\mathfrak{N}}{\mathcal{N}} = \frac{\mathfrak{N}^{-1}.2n + \mathfrak{N}^{-2}(2n-1)}{\mathcal{N}^{-1}.2n + \mathcal{N}^{-2}(2n-1)}$$

wo die mit den Distanzexponenten $-1$ und $-2$ bezeichneten $\mathfrak{N}$ und $\mathcal{N}$ die Zähler und Nenner von $z\upsilon(n-1)$ $z\upsilon(n-2)$ [des $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Werthes von z] bedeuten.

VII. Daraus fließt folgende Regel:

„Man multiplicire den Zähler und Nenner des „(n—1)ten Werthes von z, beyde mit 2n; eben ſo den „Zähler und Nenner des (n—2)ten Werthes, beyde mit „2n—1: Der geſuchte nte Werth von z iſt ein Bruch, „der die Summe der ſo multiplicirten Zähler zum Zähler, „die Summe der ſo multiplicirten Nenner zum Nen„ner hat.“

VIII. Dieſe Regel ohne alle Umſchweife anzuwenden, und nichts Ueberflüßiges zu ſchreiben, was nicht unmittelbar zu dem geforderten Werthe gehört, dient folgende Betrachtung:

Die Beſtimmung der Werthe für C, D, E, ... (in V) iſt ganz vollkommen dieſelbe, wie in Auflöſ. I der Aufgabe (8) des vorhergehenden Aufſatzes, daher auch hier für ſie dieſelben Involutionen im allgemeinen, wie dort (Aufl. V. α, β) gelten. Ferner ſind in (9) der vorhergehenden Abhandlung, zweyerley Werthe für die Anfangsglieder A und B,

einmal $A = 1$ und $B = 1.4$

und dann auch $A = 2$ . $B = 2,4+3$

angenommen worden, welche mit denen hier (in I) angegebenen vollkommen übereinſtimmen; und ſo gelten auch auf einmal, alle beſondere Sätze und Involutionen, wie ſie dort (9. I-VIII) befindlich ſind.

Folglich iſt $z^{un}$ einem Bruche gleich, für welchen von den dortigen (9, I) beyden Involutionen

($\gamma$) für den Zähler

A B

1. 4 | 6. 8. 10 u.

B

1. 5. 8. 10
1. 4. 7. 10
1. 4. 6. 9 f.
1. 5. 9
u. f. w.

($\delta$) für den Nenner

A B

2 | 4 | 6. 8. 10 u.

3 | 6. 8. 10

B

2. 5. 8. 10
2. 4. 7. 10
3. 7. 10 f.
2. 4. 6. 9
3. 6. 9
2. 5. 9
u. f. w.

genommen werden muß. Für $zvn = \frac{(\gamma)}{(\delta)}$ müssen $\gamma$ und $\delta$ bis mit den Endzahlen $2n$ und $2n-1$ entwickelt werden.

Die hier in Winkeln abgeschlossenen Zahlen, sind die Anfangsglieder vom Zähler und Nenner, um welche herum die Zahlen 6 und 5, dann 8 und 7, ferner 10 und 9 u. s. w. als Endfactoren (nach VI) angefügt werden; wie 9, III (S. 36) ausführlich lehrt. Die beyden Involutionen $\gamma$ und $\delta$, so weit sie hier entwickelt sind, stellen den Zähler und Nenner für $n=5$ oder für $zv5$ in VI dar, und endigen sich daher auch mit den Zahlen 10 und 9. Beyder Entwickelung geschieht hier unabhängig von einander, aber nach einerley Gesetz.

**Exempel.** Den 4ten Werth des continuirlichen Bruchs, dessen Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10\ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \theta, & \iota, & \varkappa\ldots \end{pmatrix}$$

in Buchstaben auszudrücken.

Weil hier $n=4$, also $2n=8$ und $2n-1=7$, so braucht man von den beyden Involutionen $\gamma$ und $\delta$

nur die Complexionen bis auf die Endzahlen 8 und 7. Das giebt, die Buchſtaben ſtatt der Zahlen, nach dem Zeiger, geſetzt, oder gleich ſelbſt die Buchſtaben anſtatt der Zahlen gebraucht:

$$z\upsilon 4 = \frac{\alpha\delta\zeta\theta + \alpha\varepsilon\theta + \alpha\delta\eta}{\beta\delta\zeta\theta + \gamma\zeta\theta + \beta\varepsilon\theta + \beta\delta\eta + \gamma\eta}.$$

(B) Zweyte Auflöſung: Ableitung der Complexionen des Nenners, aus denen des Zählers.

IX. Der dritte Werth

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{G}} = \frac{\begin{matrix}1.4.6\\ +1.5\end{matrix}}{(2.4+3)6} \text{ (II)} \qquad \begin{matrix}\\ +2.5\end{matrix}$$

hat im Zähler und Nenner einerley Endzahlen (6 und 5) und da die Subſtitutionen und Multiplicationen (III) für die folgenden Werthe, nur allein die Endzahlen betreffen; ſo werden ſolche für alle folgende Werthe, im Zähler und Nenner, jedesmal auf einerley Art beſtimmt, und die zugehörigen Complexionen für die Zähler und Nenner ſind nur allein durch die Factoren verſchieden, die in beyden den Zahlen 6 und 5 vorangehen (wie hier in II).

Das giebt folgende, von der in VIII verſchiedene, Auflöſung für den Zähler $\gamma$ und den Nenner $\delta$ des geſuchten Werths:

„Man mache die Involution $\gamma$ für den Zähler, wie in „VIII); aus dieſer leite man die Involution $\delta$ für den „Nenner her, indem man (wie in II) überall in den Com„plexionen,

„wo im Zähler ſteht 1.4 und 1.5
„für den Nenner ſetzt: (2.4+3) . 2.5
„alle übrige Factoren aber der Complexionen des Zäh„lers $\gamma$, auch für den Nenner $\delta$ unverändert beybehält.“

Eine

Eine ausführliche Anweiſung, die Involution für den Zähler $\gamma$ zu finden, ſteht in 9, III (S. 36); die Complexionen für $\gamma$ ohne die Factoren 1.4 oder 1.5 (Ebendaſ. IV. S. 40).

## (C) Dritte Auflöſung: Zerlegung des Zählers und Nenners in beſtimmte Factoren.

X. Alle Complexionen des Zählers fangen ſich mit 1.4 oder 1.5 an (II, VIII). Drückt man nun jene zuſammen durch $1.4\,\mathfrak{S}$, dieſe durch $1.5\,\Sigma$ aus, und ſondert man $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$, [die hier in VIII, oder in 9, III und IV (S. 35, 40) mit einander vermengt ſind, von einander: ſo giebt das die geſchmeidige combinatoriſche Formel, für den nten Werth von z, oder

$$z\upsilon n = \frac{1.4\,\mathfrak{S} + 1.5\,\Sigma}{(2.4+3)\,\mathfrak{S} + 2.5\,\Sigma}$$

wo man die Complexionen für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ bis auf $2n$ und $2n-1$ entwickeln muß.

Wie man die Complexionen für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ von einander abgeſondert finden könne, zeigt 9, V (S. 41). Die Formel für das hieſige $z\upsilon n$ wäre ſchon ſehr brauchbar, wenn man auch $\mathfrak{S}$ mit $\Sigma$ vermengt dafür brauchen müßte, weil man doch, zu welcher der beyden Formen eine Complexion in $\mathfrak{S}+\Sigma$ gehört, aus ihrer Anfangszahl oder ihrem erſten Factor erkennen kann (Ebendaſ. IV).

## (D) Vierte, allgemeinſte Auflöſung: Zerlegung des Zählers und Nenners in Factoren aller Art.

XI. Aus der Involutionen für $\gamma$ (hier VIII oder 9, III S. 35) laſſen ſich mehrere Factoren $[4]\mathfrak{S}$, $[6]\mathfrak{S}$, $[8]\mathfrak{S}$, $[10]\mathfrak{S}$, etc (Ebendaſ. VII) die 4, 6, 8, 10.... an der Spitze haben, abſondern, oder auch für ſich entwickeln.

Aus diesen an sich unbestimmten Factoren, in der dortigen Bedeutung, läßt sich nun (wie Ebendas. VIII gezeigt worden ist) mit Zuziehung der bestimmten Factoren A, B, C, D, E... der Zähler $\mathfrak{N}$ des nten Werthes auf unzählig verschiedene Arten ausdrucken, und daraus auch der Nenner $\mathfrak{N}$ bestimmen, wenn man für 1.4 und 1.5 (wie hier in IX) 2.4+3 und 2.5 substituirt, wodurch man, nach den dortigen Werthen für $\mathfrak{N}$ (das dortige Exempel) sogleich $z\upsilon n = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}}$ finden und bestimmen kann.

Das Verfahren dafür kann auf folgende Art anschaulich dargestellt werden. Es ist der in dem dortigen Ausdrucke für $\mathfrak{N}$ vorkommende mte Werth oder $\mathfrak{M} = 1.4\mathfrak{S} + 1.5\Sigma$, und eben so der (m — 1)te Werth oder $\overset{-1}{\mathfrak{M}} = 1.4\overset{-1}{\mathfrak{S}} + 1.5\overset{-1}{\Sigma}$, wo also die Complexionen bis auf $2m$ und $2m-1$ für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$, (Ebend. V) und bis auf $2m-2$ und $2m-3$ für $\overset{-1}{\mathfrak{S}}$ und $\overset{-1}{\Sigma}$ müssen entwickelt werden. Das giebt also den nten Werth des Bruchs (nicht blos aus den beyden letzten (n — 1)ten und (n — 2)ten, sondern allgemeiner) vermittelst des mten und (m — 1)ten Werths, d. i.

$$z\upsilon n = \frac{\left(\begin{array}{l}[1.4\,\mathfrak{S} + 1.5\,\Sigma].\,[2m+2]S \\ +[1.4\,\overset{-1}{\mathfrak{S}} + 1.5\,\overset{-1}{\Sigma}].[2m+1].[2m+4]S\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}[(2.4+3)\mathfrak{S}+2.5\Sigma.].\,[2m+2]S \\ +[(2.4+3)\overset{-1}{\mathfrak{S}}+2.5\overset{-1}{\Sigma}].[2m+1].[2m+4]S\end{array}\right)}$$

die Factoren $[2m+2]S$ und $[2m+4]S$ müssen hier bis auf die Endfactoren $2n$ und $2n-1$ dargestellt werden, weil ihre Entwickelung sich auf $n$, nicht, wie die der Factoren $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ (hier in der Formel) auf $m$ beziehet. Dieser Unter-

Unterscheidung wegen, habe ich auch hier die Zeichen S und Σ beybehalten, und sie nicht durch die gleichgültigen $^{[6]}S$ und $^{[8]}S$ (Ebendas. VII) ausgedrückt. Alle in dieser Formel vorkommende, bestimmte und unbestimmte, (durch *m* ausgedrückte) Zahlen, sind blos **Localzeichen**.

Für bestimmte n und m, als wenn man z. B. den 9ten Werth aus dem 5ten und 4ten herleiten sollte, wäre

wegen $m = 5$;

$$S = \left\{\begin{matrix} 6.8.10 \\ +7.10 \\ +6.9 \end{matrix}\right\}; \quad {}^{-1}S = \left\{\begin{matrix} 6.8 \\ +7 \end{matrix}\right\}$$

$$\Sigma = \left\{\begin{matrix} 8.10 \\ +9 \end{matrix}\right\}; \quad {}^{-1}\Sigma = 8$$

wegen $n = 9$

$$^{[12]}S = \left\{\begin{matrix} 12.14.16.18 \\ +13.16.18 \\ +12.15.18 \\ +12.14.17 \\ +13.17 \end{matrix}\right\}; \quad ^{[14]}S = \left\{\begin{matrix} 14.16.18 \\ +15.18 \\ +14.17 \end{matrix}\right\}$$

woraus also, wenn man diese Größen vorher anordnet, zu 9 nach obiger Formel sich leicht ergiebt. Der Zähler ist hier, wie auch seyn muß, mit dem Werthe von $E.\,{}^{[12]}S + D.\,11.\,{}^{[14]}S$ im Exempel (zu 9; VIII. S. 44, 45) vollkommen übereinstimmend.

## Exempel und nähere Bestimmungen der Formeln in der vorhergehenden Aufgabe (6).

7. Exempel. **Die Werthe des continuirlichen Bruchs**

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \ldots \\ 3, & 4, & 7, & 9, & 13, & 10, & 8, & 4, & 6, & 7 \ldots \end{matrix}\right)$$

**nach der Ordnung, oder auch jeden verlangten Werth desselben außer der Ordnung, anzugeben.**

a) Werthe

a) Werthe nach der Ordnung, könnte man aus den nach dem Zeiger zu bestimmenden (6, I) ersten beyden Zählern und Nennern, $\mathfrak{A}=3$; $\mathfrak{B}=3.9=27$; und $A=4$; $B=4.9+7=43$, vermittelst der Formeln 6, VI berechnen, auch dafür, zu mehrerer Bequemlichkeit, ein dem Lambertischen ähnliches Schema (Beytr. zur Math. 2 Th. S. 67) sich entwerfen. Man findet aber alles, die Regel sowohl selbst, als ihr Fortschreitungsgesetz in der unmittelbarsten Anwendung, für Werthe nach der Ordnung; (so wie für solche außer der Ordnung) in den Involutionen für $\gamma$ und $\delta$ (6, VIII), wo man nur noch, nach dem Zeiger die wirklichen Zahlen statt der Localzeichen setzen muß. Und so kommen die vier ersten Werthe:

$$zv\,1=\frac{\mathfrak{A}}{A}=\frac{3}{4}=0,75;$$

$$zv\,2=\frac{\mathfrak{B}}{B}=\frac{3.9}{4.9+7}=\frac{27}{43}=0,627\ldots$$

$$zv\,3=\frac{\mathfrak{C}}{C}=\frac{270+39}{430+52}=\frac{309}{482}=0,641\ldots$$

$$zv\,4=\frac{\mathfrak{D}}{D}=\frac{309+54}{482+86}=\frac{363}{568}=0,6390..$$

b) Werthe außer der Ordnung geben eben diese beyden Involutionen $\gamma$ und $\delta$ (6, VIII), wo z. E. für den 5ten Werth alle Complexionen, wie sie dort entwickelt sind, zu brauchen, und die wirklichen Zahlen statt der Localzeichen zu setzen wären.

Viel bequemer ist jedoch die Formel (6, X)

$$zv\,n=\frac{1.4\,\mathfrak{S}+1.5\,\Sigma}{(2.4+3)\,\mathfrak{S}+2.5\,\Sigma}$$

wo der Localzeichen 1.4; 2.4+3; 1.5; 2.5
Werthe 3.9; 4.9+7; 3.13; 4.13
oder die Producte 27; 43; 39; 52

nach

nach dem angegebenen Zeiger, für alle Bruchswerthe, vom dritten an, dieſelben, die Werthe aber für S und Σ nach der Zahl n verſchieden ſind, und bis auf $2n$ und $2n-1$ entwickelt werden müſſen. Für $n=5$, wären die in den Winkeln $5-5$ (9, V, S. 41) liegenden Localzeichen für

$$S=6.8.10+7.10+6.9;\ \Sigma=8.10+9$$

alſo, die Zahlen dafür nach dem Zeiger geſetzt und multiplicirt,

$$S=280+56+60=396;\ \Sigma=4.7+6=34$$

das giebt zuſammen

$$zu\ 5=\frac{E}{E}=\frac{27.396+39.34}{43.396+52.34}$$
$$=\frac{12018}{18796}=\frac{6009}{9398}=0,6393915\ldots$$

Hätte z blos die hier im Zeiger angezeigten Zähler und Nenner, ſo wäre $zu\ 5$ der letzte vollſtändige Werth *); wären aber mehrere Zahlen im Zeiger gegeben, ſo könnten auch mehrere Bruchswerthe beſtimmt, auch vorhergehende (nicht eben nothwendig die beyden letzten) Werthe für folgende, z. B. der 4te und 5te für den 9ten Werth (nach 6, XI) gebraucht werden.

8. Die Formeln (in 6) ſind allgemein. Hier ſind noch einige im Gebrauche vorkommende, beſondere Fälle:

I. Wenn

*) Eine von dieſer verſchiedene Auflöſung dieſes Exempels ſteht in der oben (S. 48, Note) angeführten Schrift pag. XV, wo der Werth $\frac{6009}{9398}=0,6393915\ldots$ als der letzte angegeben wird. Dort iſt nehmlich der Zeiger aus den obigen zehn Gliedern als vollſtändig angenommen worden.

a) **Werthe nach der Ordnung**, könnte man aus den nach dem Zeiger zu beſtimmenden (6, I) erſten beyden Zählern und Nennern, $\mathfrak{A} = 3$; $\mathfrak{B} = 3.9 = 27$; und $A = 4$; $B = 4.9. + 7 = 43$, vermittelſt der Formeln 6, VI berechnen, auch dafür, zu mehrerer Bequemlichkeit, ein dem **Lambertiſchen** ähnliches **Schema** (Beytr. zur Math. 2 Th. S. 67) ſich entwerfen. Man findet aber alles, die Regel ſowohl ſelbſt, als ihr Fortſchreitungsgeſetz in der unmittelbarſten Anwendung, für Werthe nach der Ordnung (ſo wie für ſolche außer der Ordnung) in den Involutionen für $\gamma$ und $\delta$ (6, VIII), wo man nur noch, nach dem Zeiger die wirklichen Zahlen ſtatt der Localzeichen ſetzen muß. Und ſo kommen die vier erſten Werthe:

$$\text{zu } 1 = \frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$\text{zu } 2 = \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{3.9}{4.9+7} = \frac{27}{43} = 0{,}627\ldots$$

$$\text{zu } 3 = \frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{270+39}{430+52} = \frac{309}{482} = 0{,}641\ldots$$

$$\text{zu } 4 = \frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{309+54}{482+86} = \frac{363}{568} = 0{,}6390\ldots$$

b) **Werthe außer der Ordnung** geben eben dieſe beyden Involutionen $\gamma$ und $\delta$ (6, VIII), wo z. B. für den 5ten Werth alle Complexionen, wie ſie dort entwickelt ſind, zu brauchen, und die wirklichen Zahlen ſtatt der Lokalzeichen zu ſetzen wären.

Viel bequemer iſt jedoch die Formel (6, X)

$$\text{zu } n = \frac{1.4\,\mathfrak{S} + 1.5\,\Sigma}{(2.4+3)\,\mathfrak{S} + 2.5\,\Sigma}$$

wo der Localzeichen 1.4; 2.4+3; 1.5; 2.5
Werthe 3.9; 4.9+7; 3.13; 4.13
oder die Producte 27; 43; 39; 52

nach

Zuſ. Unter dieſen vier Fällen iſt I, beſonders für $a=1$, d. i. wenn alle einzelne Zähler der Einheit gleich ſind, bey weitem der häufigſte, und in gemeinen Anwendungen dieſer Brüche, faſt der einzige; obgleich ſchon die erſtern Unterſuchungen ſolcher Brüche von Brounker und Wallis, auf Zähler und Nenner aller Art führten, welche auch die ſpätern Analyſten derſelben, von Euler, Daniel Bernoulli und de la Grange noch mehr nothwendig gemacht haben. Setzt man nun in I wirklich $a=1$ oder der Einheit gleich, ſo kommt

$$zvn = \frac{\mathfrak{N}^{-1}.2n + \mathfrak{N}^{-2}}{\mathfrak{N}^{-1}.2n + \mathfrak{N}^{-2}} = \frac{4\mathfrak{S}+\Sigma}{(2.4+1^0)\mathfrak{S}+2\Sigma}$$

ingleichen

$\mathfrak{S}$ und $\Sigma$

| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 3) | | 1° | 10 | 12 | 14 |
| 4) | | | 6 | 12 | 14 |
| 5) | | | | 6. 8 | 14 |
| | | | | 1° | 14 |
| 6) | | | | 6. 8. | 10 |
| | | | | | 10 |
| | | | | | 6 |
| 7) | | | | | |

| | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 4) | | 1° | 12 | 14 |
| 5) | | | 8 | 14 |
| 6) | | | 8. | 10 |
| | | | | 1° |
| 7) | | | | |

hier wird $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ aus den Anfängen $\frac{6|8}{1^0}$ und $\frac{8|10}{1^0}$ nach Anleitung des hier durch $\mathfrak{N}$ und $\mathcal{N}$ ausgedruckten Werthes von $zvn$ entwickelt. Auch iſt hier, und in der Folge, $1^0$ kein Localzeichen, ſondern die Zahl 1, und kommt nur als Endcomplexion vor. Neben andern Factoren wird ſie weggelaſſen. Das hieſige $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ kann

kann man auch von 9, V (S. 41) ableiten, wenn man überall 1 ſtatt der ungeraden Zahlen ſetzt.

9, I. Exempel. Den 4ten, 5ten und 9ten Werth des continuirlichen Bruchs anzugeben, deſſen Zeiger:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, \\ 1, & 3, & 1, & 7, & 1, & 16, & 1, & -294, & 1, & 3, & 1, & -4, & 1, & 5, & 1, \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 16, & 17, & 18, & 19, & 20 \ldots \\ -15, & 1, & -3, & 2, & 2 \ldots \end{matrix}\Big)$$

Da hier alle Zähler $= 1$, ſo iſt

$z\nu n = \frac{4\mathfrak{S}+\Sigma}{(2.4+1^n)\mathfrak{S}+2\Sigma}$ (8, Zuſ.). In dieſer Formel ſind nach dem Zeiger

der Localzeichen 4; $2.4+1^n$; 2;
Zahlenwerthe 7; $3.7+1$; 3;

und wegen $n=4$ gilt für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ (8, Zuſ.) was innerhalb dem Wincel $4-4$; wegen $n=5$, was innerhalb dem Winkel $5-5$ ſteht. Das giebt, für die Localzeichen überall die Werthe geſetzt:

$\mathfrak{S}=16.-294+1=-4703$; $\Sigma=-294$
$\mathfrak{S}=16.-294.3+3+16=-14093$; $\Sigma=-294.3+1$

die $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ für den 4ten und 5ten Werth. Daraus folgt:

$$z\nu 4 = \frac{(7.-4703)-294}{(22.-4703)-3.294} = \frac{-33215}{-104348}$$

$$z\nu 5 = \frac{(7.-14093)-881}{(22.-14093)-3.881} = \frac{-99532}{-312689}$$

Den oben geforderten 9ten Werth kann man nun aus den hier gefundenen 4ten und 5ten, vermittelſt der Formel (6, XI, S. 58, 59) herleiten, wo man nur noch die Werthe für $[2m+2]S$ und $[2m+4]S$, d. i. [weil hier $m=5$] für $[12]S$ und $[14]S$ (nach 9, II oder III. S. 35, 36) ſuchen, oder

oder (hier aus 6, XI am Ende) nur abſchreiben darf. Und ſo kommt, die Zahlenwerthe ſogleich an die Stelle der Localzeichen: (dahin auch der Factor $2m+1=11$ gehört) geſetzt:

$$^{[12]}S = -900+45+12-20+1 = -862$$
$$^{[14]}S = +225-3+5 = +227$$

wo in dem letzten Werthe das Localzeichen 11 der Zahl 1, nach dem Zeiger gleich iſt. Das giebt zuſammen:

$$zv\,9 = \frac{(-99532.-862)+(-33215.1.227)}{(-312689.-862)+(-104348.1.227)}$$

und gehörig multiplicirt und verkürzt:

$$zv\,9 = \frac{78256779}{245850922}$$

Anmerk. 1. Die hier gefundenen (4te, 5te und 9te) Werthe ſind annähernde Rationalverhältniſſe des Kreisdurchmeſſers 1 zu der Peripherie $\pi$. Sie ſtehen auch mit unter denen von Lambert (Beytr. z. Gebr. der Mathem. II Th. 1. Abſchn. S. 156, 157) berechneten, in der 6ſten, 8ten und 15den Stelle, bey denen der, aus $\frac{1}{\pi}$ entwickelte continuirliche Bruch (Daſ. S. 158) zum Grunde liegt. Ich habe aber die einzelnen Zahlen dieſes Bruchs nach de la Grange's ſinnreichem Verfahren *) zuſammengezogen, wie ſie bey mir in dem Zeiger ſtehen (daher dieſe Zahlen von den Lambertiſchen ſehr abweichen) weil es mir nicht darum zu thun war, die ſucceſſive größern und kleinern Werthe, nach der Reihe aufzuſuchen, ſondern vielmehr, die Anwendung der Formeln zu zeigen, wenn auch die Zahlen verſchiedene Zeichen haben, weil

*) Additions au Mem. ſur la réſolution des Equations numériques (impr. dans le Vol. de 1767) §. 53-55. Hiſt. de l'Acad. Roy. des Sc. et belles Lettres, année 1768. Berl. 1770. S. 153-156.

weil die Auflöſung derſelben in Abſicht auf die Zeichen, nicht beſchränkt iſt.

Ich habe hier die Zahlen für den Zeiger noch weiter erſtreckt, als Herr de la Grange (Ebend. §. 67) wo auch ſtatt des dortigen $\frac{1}{-3}$ ſtehen muß $\frac{1}{-4}$; der Gebrauch aber dieſer Zahlen nach meiner Formel, führt das Reſultat weit geſchwinder herbey, als die dortige de la Grangiſche Vorſchrift, dieſes Reſultat in einer Reihe darzuſtellen.

Eben ſo würde, für die logarithmiſche Baſis $e = 2,718281\ldots$ der Quotient $\frac{1}{-e}$, in einen continuirlichen Bruch verwandelt, alle Zähler $= 1$, die Nenner nach der Ordnung 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8 u. ſ. w. geben, deren weitere Veränderung nach de la Grange, den Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16\ldots \\ 1, & 3, & 1, & -4, & 1, & 2, & 1, & 5, & 1, & -2, & 1, & -7, & 1, & 2, & 1, & 9\ldots \end{pmatrix}$$

für ein zweytes Exempel dieſer Art darſtellen würde.

Anmerk. 2. Nimmt man bey der Diviſion das Wort **Reſt** in der ausgedehnteſten Bedeutung, wie ich es (Leipz. Mag. 1786. S. 293. Note *f*) erklärt und gebraucht habe: ſo kann man auch **negative** Reſte haben, und daraus **negative** Quotienten finden; und ſo während der Diviſion ſelbſt die negativen Quotienten ſchaffen, ohne ſie erſt, nach vollendeter Diviſion, aus den durchaus poſitiven Quotienten, nach den la Grangiſchen Verfahren, hinterher abzuleiten. Ich will mich aber hierbey nicht länger verweilen.

II. Wenn alle Nenner $= a = 1$, ſo iſt (8, II)

$$zvn = \frac{\mathfrak{N}^{-1} + \mathfrak{N}^{-2}.(2n-1)}{\mathfrak{N}^{-1} + \mathfrak{N}^{-2}.(2n-1)} = \frac{1\mathfrak{S} + 1.5\Sigma}{(1^{\circ}+3)\mathfrak{S} + 5\Sigma}$$

ferner

ferner $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3) | 1° | 4) | 1° |
| 4) | 7 | 5) | 9 |
| 5) | 9 | 6) | 11 |
| 6) | 11 | 7) | 13 |
| | 7.11 | | 9.13 |
| | 13 | | u. ſ. w. |
| | 7.13 | | |
| | 9.13 | | |
| 7) | | | |
| | u. ſ. w. | | |

Die Ausdrücke für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ laſſen ſich (aus 9, V, S. 41 abgeleitet) ſehr zuſammenziehen, wenn man die Anordnung ſo trift, wie hier geſchehen iſt; wo alles, was von Zahlen (von 1° an bis auf irgend einen Horizontalſtrich) unter einander liegt, zu dem ſo vielten Werthe (in Beziehung auf $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$) gehört, als die kleine Zahl anzeigt, die linker Hand neben den Horizontalſtrich ſteht. Auch fällt das Geſetz deutlich in die Augen, nach welchem hier $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ aus den beyderley Anfangsgliedern 1°, 7 und 1°, 9 fortgehen.

**Exempel.** Für *log. nat.* $2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\text{etc}}}}}$

[wo alle Nenner $= 1$, die Zähler aber (vom zweyten an) nach der Reihe der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ... fortgehen] jede verlangte Werthe, z. B. den 5ten, 6ſten, 7den, anzugeben.

Der Zeiger iſt hier $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots \\ 1, 1, 1, 1, 4, 1, 9, 1, 16, 1, 25 \ldots \end{pmatrix}$.

Daraus folgt, ſtatt der Localzeichen in $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ (II) ihre Werthe geſetzt,

$\mathfrak{S} = (1+9+16)+(1+9).25+(1+9+16).36$

$\quad 26 \quad + \quad 250 \quad + \quad 936$

$\Sigma = (1+16) \quad + \quad 25 \quad + (1+16). \quad 36$

$\quad 17 \quad + \quad 25 \quad + \quad 612$

daraus kommen 1, einzeln und addirt, die Zahlen

26; 276; 1212; als 5ter, 6ſter, 7ter Werth für $\mathfrak{S}$

17; 42; 654; . . . . . $\Sigma$

Endlich:

$$zv5 = \frac{26+4.17}{2.26+4.17} = \frac{94}{120} = 0,7833\ldots$$

$$zv6 = \frac{276+4.42}{2.276+4.42} = \frac{69+42}{138+42} = \frac{11,1}{3.6} = 0,6166\ldots$$

$$zv7 = \frac{1212+4.654}{2.1212+4.654} = \frac{303+654}{606+654} = \frac{47,85}{9.7} = 0,7595\ldots$$

Einen Schritt weiter, hätte man

$$\frac{14736+4.2712}{2.14736+4.2712}$$ für den 8ten Werth, d. i.

$zv8 = \frac{53,3}{12.7} = 0,6345238095$ gefunden.

**Anmerk.** 1. Das Exempel iſt von Euler (Introd. in An. Inf. T. I. §. 369. Ex. I.) gegeben, aber nicht berechnet worden. Hier ſieht man, daß die vier gefundenen Werthe abwechſelnd größer und kleiner ſind, als $12 = 0,69314\ldots$, aber ſich dieſem Werthe (wie man vorherſehen konnte) äußerſt langſam nähern. Ein anderes Exempel, wo alle Nenner $= 2$ oder n (Ebendaſ. Ex. II.).

**Anmerk.** 2. Beyſpiele zu 8, III, wenn $a = 1$ und $a = 2$, alle Zähler $= 1$ alle Nenner $= 2$ (Ebendaſ. §. 375). Ein anderes zu 8, IV, für $a = a = 1$; $b = b = 2$; $c = c = 3$; ꝛc. wo zuſammengehörige Zähler und Nenner gleich ſind (Ebendaſ. §. 370).

Die Fortſetzung folgt im zweyten Hefte.

## IV.

## Ueber Kettenglieder von regelmäßig zunehmender Dicke.

1. Moyen de diminuer le poids des Chainons et des Cables dans les machines à Molette; Par Mr. Baillet de Belloy, Elève de l'Ecole Royale des Mines.

Im Journal de Phyſique, May 1788. 375. S.

2. Von einer Kette (eiſernem Seile, in der Sprache der deutſchen Bergleute), damit eine Erztonne zu Tage ausgefördert wird, trägt das unterſte erſte Glied nur die Erztonne, jedes folgende, alle tiefern, mit der Tonne.

3. Das unterſte trägt alſo am wenigſten und kann am ſchwächſten ſeyn; jedes höhere muß nach dem Maaße ſtärker werden, wie es mehr zu tragen hat.

4. Herr de B. nimmt an, bey Gliedern von gleichem Durchmeſſer, verhalte ſich die Stärke, wie die Dicke des Gliedes, alſo wie ſein Gewicht.

5. P ſey das Gewicht der Tonne, $\pi$ des erſten Gliedes, ſo iſt $\frac{\pi}{P}$ der Quotient des Gewichts vom erſten Gliede, und der Laſt die es zu tragen hat.

6. Man nehme an, dieſer Quotient ſey unveränderlich, oder, bey jedem Gliede werde ſeine Dicke ſo beſtimmt, daß ſich ſein Gewicht zur Laſt die es trägt, $= \pi : P$ verhält. Trägt es die Laſt $= L$ ſo iſt ſein Gewicht $\frac{L.\pi}{P} = G$.

7. Nun trägt das zweyte Glied, P und das erſte; das dritte, P und die erſten beyden; das vierte, P und die erſten drey; u. ſ. w.

Man ſetze alſo $\frac{\pi}{P} = c$ oder $\pi = c.P$; ſo iſt

für das zweyte Glied

$L = P + \pi = P.(1+c)$; $G = P.(1+c).c$

für das dritte

$L = P.(1+c) + P.(1+c).c$

$= P.(1+c)^2$; und $G = P.(1+c)^2.c$

für das vierte

$L = P.(1+c)^3$; $G = P.(1+c)^3.c$

8. Iſt für das nte Glied

$L = P.(1+c)^{n-1}$, ſo iſt für ſolches

$G = P.(1+c)^{n-1}.c$ und nun für das $(n+1)$te

$L = P.(1+c)^n$; $G = P.(1+c)^n.c$

9. Aber die Vorausſetzung (8)
gilt für $n = 4$, folglich für $n+1 = 5$
und nun für $n = 5$, folglich für $n+1 = 6$ u. ſ. w.

10. Alſo iſt jedes Gliedes Gewicht ein Product aus P.c in nachſtehende Größen

| Glied | 1 | 2 | 3 | 4 | .... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gewicht = P.c | 1 | $1+c$ | $(1+c)^2$ | $(1+c)^3$ | .... | $(1+c)^{n-1}$ |

11. Folglich die Summe der Gewichte aller Glieder =

$P.c.(1+(1+c)^1+(1+c)^2 \ldots +(1+c)^{n-1})$

12. Für die geometriſche Reihe iſt in An. endl. Gr. 100.

| dorten: | a; | e; | u; | alſo die Summe |
|---|---|---|---|---|
| hier: | 1; | $1+c$; | $(1+c)^{n-1}$; | $\frac{(1+c)^n-1}{c}$ |

13. Folglich die Summe der Gewichte der Glieder $= P.((1+c)^n - 1)$

14. Alſo $= P.\left(\left(\frac{P+\pi}{P}\right)^n - 1\right)$

15) Soll

15. Soll dieſe Summe der Gewichte ſo viel betragen als der Tonne Gewicht, ſo iſt (13) $(1+c)^n - 1 = 1$ oder $n \cdot \log(1+c) = \log 2$

16. Exempel. $P = 1500.\pi$, alſo $c = \frac{1}{1500}$,

$1+c = \frac{1501}{1500}$; $n = \frac{\log 2}{\log(1501:1500)}$

$\log 1501 = 3,1763807$;
$\log 1500 = 3,1760913$;
2894

$n = \frac{0,3010300}{0,0002894}$

Das berechne ich mit den Logarithmen ſo:

$\log 0,30103 = 0,4786098 - 1$
$\log 0,0002894 = 0,4614985 - 4$

$\log n = 3,0171113$; $n = 1040,1$

de B. giebt für dieſes Exempel:

$n = \frac{0,301030}{0,000290} = 1038,03$

Er hat nehmlich Logarithmen nur auf 6 Decimalſtellen gebraucht. Dafür finde ich

$\log 0,301030 = 0,4786098 - 1$
$\log 0,000290 = 0,4623980 - 4$

$3,0162118$

gehört zu 1038,0

Der Unterſchied von 2 Einheiten im Quotienten rührt alſo in der That daher, daß de B. Diviſor zu groß iſt.

17. Man ſetze, einer Kette Glieder ſollen alle gleich dick ſeyn, und der Kette Gewicht der Tonne gleich; wie viel hat ſie Glieder?

Das Gewicht eines Gliedes ſey $= q$; weil nun ein Glied, deſſen Gewicht $= \pi$, die Laſt P trägt, ſo muß, ein Glied, das die Laſt $2P - q$ tragen ſoll, das Gewicht $= (2P - q).\frac{\pi}{P}$ haben.

Nun trägt das letzte Glied der Kette dieſe Laſten, denn ſein eignes Gewicht wird nicht mit zu der Laſt die es trägt, gerechnet. Alſo, da ein Glied wie das andere das Gewicht q haben ſoll, ſo iſt $(2.P - q).\ c = q$; oder $\frac{2.P.c}{1+c} = q$;

Sind nun dergleichen Glieder m, ſo ſchwer als die Tonne, ſo iſt:

$$\frac{2.m.P.c}{1+c} = P;\ \text{alſo}\ m = \frac{1+c}{2.c}.$$

18. In den Zahlen (16) $m = \frac{1501.1500}{1500.2} = 750,5$

## Vergleichung der Ketten 16; 18;

19. $\frac{1040}{751} = 1,3$; alſo bey gleichem Gewichte, und gleichem Durchmeſſer der Glieder, hat die Kette (16) ohngefähr $1\frac{1}{3}$mahl die Länge der Kette (18).

20. Wie viel wiegen die erſten 751 Glieder der Kette (16)?

Aus (13) $P.((1+c)^{751}-1)$

Nun iſt $\log(1+c) = 0,0002894$

751

0,0002894
14470
20258

$751.\log(1+c) = 0,2173394$

$(1+c)^{751} = 1,6494$; alſo, für $P = 1500$, das Gewicht der 751 Glieder

$= 1500.0,6494 = 15.64,94 = 974,10$

Man

Man kann auch so rechnen:

| | |
|---|---|
| Zu | 0,2173394 |
| log 1500 | = 3,1760913 |
| Summe | = 3,3934307 |
| also P. $(1+c)^{751}$ | = 2474,2 |
| abgez. P | = 1500 |
| Gew. der 751 Glieder | = 974,2 |

De B. hat für 750 Glieder; 975,15. Also ist der Theil der Kette (16), der so lang ist als die ganze (18), viel leichter.

21. Solche Kettenglieder wären freilich künstlich zu machen. Zu Verminderung dieser Schwierigkeit könnte man eine Kette aus mehr Stücken zusammensetzen, jedes Stück aus gleichen Gliedern; andere Stücke aus andern.

22. Man könnte eben so was bey Seilen anbringen. Bey Schiffen werden conische Taue gebraucht, von deren Verfertigung Hr. de B. redet.

23. Mich deucht, Hr. de B. Gedanke verdient allemal bekannt zu werden. Bey der Ausführung möchte auf etwas mehr zu sehen seyn, als auf die Stärke, die gerade nach der Absicht des Tragens berechnet ist. Außerdem, daß man im Maschinenwesen das Zeug immer etwas stärker nehmen muß, als in der theoretischen Schärfe nöthig wäre, so möchten auch hier die untern Glieder mehr leiden als die obern, z. E. von Behandlung in der Grube, beym Anschlagen oder Einfüllen der Tonne, von Bewegungen der Tonne während ihres Steigens u. s. w. Aus dergleichen Ursachen könnten überflüßige Stärke und damit verbundenes Gewicht ein nothwendiges Uebel seyn. Ein Vorschlag, dergleichen Uebel abzuhelfen, ist ein Schurf, bey dem man noch erst beurtheilen kann, ob Kübel und Seil sollen eingehängt werden.

A. G. Kästner.

## V.

## Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beſchwerten Tiſches auf eine Fläche. Aus den Papieren des ſel. Leonhard Eulers gezogen, von Jakob Bernoulli *).

Indem ich eines der Bücher durchblätterte, wo L. Euler ſeine Anmerkungen über verſchiedene mathematiſche Gegenſtände aufzuzeichnen pflegte, welche ihm dann meiſtentheils Stoff zu ſeinen zahlreichen und treflichen Abhandlungen an die Hand gaben; ſtieß ich unter andern auf folgende Aufgabe, die, ſo viel ich weiß, niemals bekannt gemacht worden, und die mir democh intereſſant genug vorgekommen iſt, um ſie dem mathematiſchen Publicum nicht vorzuenthalten. Ich werde ſie daher, nebſt der hinlänglich ausgeführten Auflöſung, mit des Verfaſſers eigenen Worten herſetzen:

**Wenn ein Tiſch mit drey Füßen auf einer horizontalen Fläche aufſteht, und derſelbe nach Belieben mit einem gegebenen Gewichte beſchweret**

*) Mitgetheilt von deſſen Bruder, Herrn Johann Bernoulli, Director bey der königl. Akad. der Wiſſenſch. zu Berlin. Jakob Bernoulli, ein Sohn des 1790 als Prof. der Mathematik zu Baſel verſtorbenen Johann Bernoulli's, war 1759 zu Baſel gebohren, und ward 1780 licentiat der Rechte. Zweymal hat er verſucht, Lehrſtellen in ſeiner Vaterſtadt zu erhalten; aber das Loos, welches dorten dafür entſcheidet, war ihm nicht günſtig. Er gieng daher 1786 nach St. Petersburg, als Adjunct bey der dortigen Akademie der Wiſſenſchaften, und ward bald darauf derſelben Mitglied. Er ſtarb, zu frühzeitig für die Wiſſenſchaft, die ſich viel von ihm verſprechen konnte, den 3 Jul. 1789. beym Baden in der Neva, an einem Schlagfluſſe. Seine Lebensbeſchreibung: Noua Acta Acad. Sc. Imp. Petrop. T. VII.

ret wird, ſo iſt die Frage, wie ſtark ein jeder Fuß auf die Fläche drücke?

Es ſeyen (Fig. 1) auf der Horizontal-Fläche, A, B, C, die drey Punkte, wo die Füße des Tiſches aufſtehen, und aus dem Centro gravitatis, ſowohl des Tiſches ſelbſt, als des darauf gelegten Gewichts, werde auf dieſe Fläche eine perpendiculäre Linie gezogen, welche auf das Punkt O falle; ferner ſey P das ganze Gewicht des Tiſches, daher denn ſogleich klar, daß alle drey Füße zuſammen mit einer gleichen Kraft P drucken müſſen; wie ſtark aber ein jeder Fuß insbeſondere drucke, kann alſo beſtimmt werden. Man ziehe aus dem Puncte O nach den drey Puncten A, B, C, die geraden Linien OA, OB, OC, und mache nun folgende Proportionen:

I. Wie ſich verhält der Inhalt des ganzen Dreyecks ABC, zu dem ganzen Gewichte P, alſo verhält ſich der Inhalt des Dreyecks BOC, zu dem Druck in A.

II. Und eben ſo verhält ſich das Dreyeck AOC, zu dem Druck in B.

III. Und endlich verhält ſich eben ſo das Dreyeck AOB, zu dem Druck in C. Daher wird ſeyn der Druck in $A = \frac{\Delta BOC}{\Delta ABC} \cdot P$, der Druck in $B = \frac{\Delta AOC}{\Delta ABC} \cdot P$, und den Druck in $C = \frac{\Delta AOB}{\Delta ABC} \cdot P$.

[Euler ſetzt zwar den Beweis nicht hinzu, allein er zeigt ſich von ſelbſt, indem man die ſenkrechten Linien AD und OE auf BC (verlängert, wo nöthig) zieht, und BC als die Axe anſieht, in Anſehung welcher das Gewicht P zur Kraft in A ſich verhalten muß, umgekehrt wie ihre Entfernungen von der Axe, alſo $= AD : OE$, oder die Kraft, der Druck in A, muß ſeyn $= \frac{OE}{AD} \cdot P$.

Nun

Nun verhalten ſich aber die Dreyecke ABC und OBC, wie ihre Höhen AD: OE, alſo iſt der Druck in $A = \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC} \cdot P$, und auf eine ähnliche Weiſe wird der Druck für die Punkte B und C beſtimmt werden].

Wenn dahero [fährt Euler fort] das Punkt O ſo ſteht, daß die drey Dreyecke AOB, AOC und BOC einander gleich ſeyen, ſo drucken alle drey Füße gleich ſtark auf die Fläche; dieſes geſchiehet nun, wenn das Punkt O juſt in das Centrum gravitatis des Dreyecks fällt; fällt daſſelbe aber in ein anderes Punkt, ſo drucken auch die drey Füße ungleich auf die Fläche. Hieraus iſt klar, daß, je näher das Punkt O gegen die Seite AB fällt, der Druck in C ſo viel kleiner werde; und endlich gar verſchwinde, wenn das Punkt O juſt in A fällt, und die beyden Füße A und B müſſen allein das ganze Gewicht tragen.

[Etwas weiter hinten, im angeführten Buche, behandelt Euler die gleiche Aufgabe weit allgemeiner; und ich will den Aufſatz, welcher lateiniſch geſchrieben iſt, in einer Ueberſetzung hier beyfügen].

Es iſt ſchwer das, was oben von dem Drucke eines mit drey Füßen auf einer Fläche ſtehenden Tiſches geſagt worden iſt, auf vier Füße auszuſtrecken; denn wenn die Enden aller Füße nicht vollkommen in der gleichen Fläche ſind, oder wenn der Boden nicht vollkommen eben iſt, ſo wird der Tiſch immer nur auf drey Füßen ſtehen, und der vierte wird ſo zu ſagen überflüßig ſeyn. Aber wenn der Boden vollkommen eben iſt, und die Spitzen aller Füße vollkommen in einer und derſelben Ebene ſich befinden, ſo wird die Frage von dem Drucke eines jeden Fußes zwar ſehr ſchwer, doch kann ſie folgendermaßen aufgelöſt werden.

Wir wollen uns vorſtellen, daß der Boden etwas nachgebe, und daß jeder Fuß einen gewiſſen Eindruck hinein

hinein macht: ſo werden folglich alle vier Füße auf dieſen Boden drücken, und der Druck eines jeden wird mit der Tiefe, zu welcher er hineindringt, im Verhältniſſe ſtehen.

Laßt uns alſo ſetzen, der Fuß A (Fig. 2) gehe zur Tiefe A$\alpha$, der Fuß B zur Tiefe B$\beta$, der Fuß C zur Tiefe C$\gamma$, und der Fuß D zur Tiefe D$\delta$ hinein; ſo werden die Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, nothwendig in der gleichen Fläche ſeyn. Weil aber der Druck eines jeden Fußes dieſen kleinen Linien A$\alpha$, B$\beta$, C$\gamma$, D$\delta$ proportional iſt, ſo werden eben dieſe den Druck vorſtellenden Linien ſo beſchaffen ſeyn, daß die Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in der gleichen Fläche ſich befinden. Dieſer Grundſatz kann nun auf ſo viele Füße, als man will, ausgedehnt werden, und ſogar auf eine jede ſtete vollkommen ebene Grundfeſte, von welcher Figur ſie auch immer ſey. Und ſo kann die ganze Sache mit Hülfe des folgenden Grundſatzes abgethan werden.

Der Körper habe die ebene Grundfeſte ABCD (Fig. 3), und in jedem Punkte M derſelben werde der Druck durch die kleine perpendiculare Linie M$\mu$ vorgeſtellt, ſo müſſen alle dieſe Punkte $\mu$ ſich in der gleichen Fläche befinden. Wenn daher die mittlere Richtung aller Kräfte, womit der Körper auf den Boden gedrücket wird, auf den Punkt O fällt, und der ganze Druck $=$P geſetzt wird, ſo muß die Summe aller elementaren Drückungen $=$P ſeyn: alsdann aber, weil das Moment des gänzlichen Druckes P in Anſehung einer willkührlich angenommenen Axe FG iſt $=$ P.OP [indem OP ſenkrecht auf FG iſt], ſo muß die Summe aller elementaren Momente M$\mu$. MN dieſem Momente gleich ſeyn; und dieſelbe Gleichheit muß für jede andere Axe FH auch ſtatt haben: Nun aber kann aus zwo ſolchen Gleichungen die Lage der Fläche, in welcher ſich alle Punkte $\mu$ befinden, beſtimmt wer-

werden, woraus dann der Druck für einem jeden Punkt der Grundfeſte bekannt ſeyn wird.

Damit alſo dieſes deſto bequemer durch die Rechnung herausgefunden werde, ſo nehme man die beſtimmte Axe AB (Fig. 4), auf welche aus M der Senkel MN herabgelaſſen werde, und dann nenne man die Coordinaten $AN = x$, $NM = y$, und $M\mu = z$, welche letztere den Druck für den Punkt M vorſtellt. Ferner ſey FG die Linie, in welcher die Fläche, welche alle Punkte $\mu$ begreift, die Fläche der Tafel durchſchneidet, und der Neigungswinkel ſey $= \theta$. Man ſetze auch $AF = f$, und den Winkel $AFG = \zeta$; ſo hat man $FN = f + x$, und, [wenn NL ſenkrecht auf FG gezogen wird], $FL = (f + x) \cos. \zeta$; $NL = (f + x) \sin. \zeta$. [Man ziehe auch MV ſenkrecht auf FG, und NT auf MV], ſo iſt der Winkel $NMT = \zeta$, und alſo $MT = y \cos. \zeta$; $NT = y \sin. \zeta$; dann ferner $MV = (f + x) \sin. \zeta + y \cos. \zeta$, daraus man herleitet $z = (f + x) \sin. \zeta \tang \theta + y \cos. \zeta \tang. \theta$, welches wir der Kürze wegen ſo ſetzen werden: $z = \alpha + \mathfrak{C}x + \gamma y$. Es iſt alſo $\alpha = f \sin. \zeta \tang. \theta$; $\mathfrak{C} = \sin \zeta \tang \theta$; $\gamma = \cos. \zeta \tang \theta$. Aus dieſen Buchſtaben $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$ findet man alſo: 1) $\cot. \zeta = \frac{\gamma}{\mathfrak{C}}$; 2) $\tang. \theta = \frac{\mathfrak{C}}{\sin. \zeta}$; 3) $f = \frac{\alpha}{\mathfrak{C}}$. Weil alſo z immer dadurch beſtimmt wird, daß man hat $z = \alpha + \mathfrak{C}x + \gamma y$, ſo werden hingegen die Buchſtaben $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$ ſelbſt aus den Umſtänden folgendermaßen angegeben. Man betrachte das Element der Grundfeſte in dem Punkte M, welches $dx.dy$ ſeyn, und von der Kraft z gedruckt werden wird; daher entſteht der Druck auf die ganze Grundfeſte $= \iint z\,dx\,dy$, welches doppelte Integrale durch die ganze Grundfeſte erſtreckt werden muß, ſo daß man hat $\iint z\,dx\,dy = P$.

Da

Da nun das Moment des ganzen Druckes P in Anſehung der Axe AB iſt = P.OP, und die Summe aller elementaren Momente = $\iint z y dx dy$, ſo wird, wenn man dieſes Integrale wieder über die ganze Grundfeſte ausdehnt, P.OP = $\iint z y dx dy$. Eben ſo wird man für die Axe AQ finden P.OQ = $\iint z x dx dy$. Aus dieſen drey Gleichungen werden nun die drey Buchſtaben $\alpha, \xi, \gamma$, beſtimmt, [indem für z ſein Werth geſetzt wird, und die Gleichung zwiſchen x und y gegeben iſt, ſo daß alle Integralia keine Schwierigkeit haben], und daraus wird der Druck für jeden Punkt M der Grundfeſte, [ſo wie auch die Winkel $\xi$, $\theta$, und die Linie f] bekannt.

Der Körper oder Tiſch habe alſo z. E. vier rechtwinklicht geordnete Füße A, B, C, D (Fig. 5); der ganze Druck falle in O, ſo daß AP = h; PO = g. Weil nun die Drückungen in den Punkten A, B, C, D ſich in einer Fläche enden müſſen, ſo ſetze man den Druck in A = p + q, in B = p + r, in C = p − q, und in D = p − r, deren Summe = 4p = P. Nun iſt das Moment in Anſehung der Axe AB für die ganze Kraft = Pg, für die Kräfte aber aller Füße zuſammen = b(2p − q − r) = Pg = 4pg. [AD = BC wird = b, und AB = CD = a geſetzt]. Für die Axe AD aber findet man die Momente Ph = a(2p − q + r) = 4ph; daraus ziehe, wie $q + r = 2p - \frac{4pg}{b}$, und $q - r = 2p - \frac{4hp}{a}$; alſo $q = 2p - \frac{2pg}{b} - \frac{2ph}{a}$, und $r = \frac{2ph}{a} - \frac{2pg}{b}$. Weil alſo der ganze Druck P = 4p, ſo werden ſich die Drückungen für jeden Punkt A, B, C, D, alſo verhalten: der Druck in

A

$A = 3p - \frac{2pg}{b} - \frac{2ph}{a} = p\left(3 - \frac{2g}{b} - \frac{2h}{a}\right)$;

der Druck in $C = p\left(-1 + \frac{2g}{b} + \frac{2h}{a}\right)$; der Druck in $B = p\left(1 + \frac{2h}{a} - \frac{2g}{b}\right)$; der Druck in $D = p\left(1 - \frac{2h}{a} + \frac{2g}{b}\right)$.

Dieſe Kräfte können auch kürzlich ſo vorgeſtellt werden:

Der Druck in $A = \frac{1}{4}P\left(\frac{2OR}{AD} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$
$= \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{BC} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$;

Der Druck in $B = \frac{1}{4}P\left(\frac{2AP}{AB} + \frac{2DS}{BC} - 1\right)$;

Der Druck in $C = \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{CB} + \frac{2CR}{CD} - 1\right)$;

Der Druck in $D = \frac{1}{4}P\left(\frac{2DS}{AD} + \frac{2DR}{DC} - 1\right)$.

Wenn alſo der Punkt O in die Mitte des Rechteckes fällt, ſo werden, weil $\frac{CQ}{BC} = \frac{1}{2}$, etc. alle Drückungen gleich, und eine jede $= \frac{1}{4}P$.

---

## VI.

## Analyſis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange; von J. F. Pfaff, Profeſſor der Mathematik und Naturlehre zu Helmſtädt.

---

### Aufgabe.

Es ſey zwiſchen den drey Gröſſen y, x und z folgende Gleichung gegeben:

$$y = x - z.\varphi x$$

wo $\varphi x$ irgend eine Function von x bedeutet. Man ſoll $\psi x$, eine jede Function von x, durch eine Reihe nach Potenzen von z ausdrücken.

### Auflöſung.

1) Da für $z=0$, $y=x$, ſo wird das erſte Glied der für $\psi x$ verlangten Reihe, $\psi y$ ſeyn.

Es ſey demnach

$$\psi x = \psi y + \overset{\text{I}}{Y}.z + \overset{\text{II}}{Y}.z^2 \ldots + \overset{\text{n}}{Y}.z^n + \text{etc},$$

wo $\overset{\text{I}}{Y}, \overset{\text{II}}{Y}, \overset{\text{III}}{Y}, \overset{\text{IV}}{Y} \ldots \overset{\text{n}}{Y} \ldots$, die zu beſtimmenden Coefficienten, noch unbekannte Functionen von y ſind. Hat man dieſe beſtimmt, ſo laſſen ſich daraus die Coefficienten der Reihe für $Fx$ (jede andere Function von x) durch Verwechslung des Zeichens $\psi$ mit F, herleiten.

2) Nun iſt $x = y + z\varphi x$, (1), und nach dem Taylorſchen Satze:

$$\psi x = \psi y + z.\varphi x.\frac{d\psi y}{dy} + z^2.\frac{\varphi x^2.d^2\psi y}{1.2.dy^2} \ldots$$

$$+ z^n.\frac{(\varphi x)^n.d^n\psi y}{1.2\ldots n.dy^n} + \text{etc}$$

$A = 3p - \frac{2pg}{b} - \frac{2ph}{a} = p\left(3 - \frac{2g}{b} - \frac{2h}{a}\right)$;

der Druck in $C = p\left(-1 + \frac{2g}{b} + \frac{2h}{a}\right)$; der Druck in $B = p\left(1 + \frac{2h}{a} - \frac{2g}{b}\right)$; der Druck in $D = p\left(1 - \frac{2h}{a} + \frac{2g}{b}\right)$.

Dieſe Kräfte können auch kürzlich ſo vorgeſtellt werden:

Der Druck in $A = \frac{1}{4}P\left(\frac{2OR}{AD} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$
$= \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{BC} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$;

Der Druck in $B = \frac{1}{4}P\left(\frac{2AP}{AB} + \frac{2DS}{BC} - 1\right)$;

Der Druck in $C = \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{CB} + \frac{2CR}{CD} - 1\right)$;

Der Druck in $D = \frac{1}{4}P\left(\frac{2DS}{AD} + \frac{2DR}{DC} - 1\right)$.

Wenn alſo der Punkt O in die Mitte des Rechteckes fällt, ſo werden, weil $\frac{CQ}{BC} = \frac{1}{2}$, etc. alle Drückungen gleich, und eine jede $= \frac{1}{4}P$.

---

## VI.

## Analyſis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange; von J. F. Pfaff, Profeſſor der Mathematik und Naturlehre zu Helmſtädt.

---

### Aufgabe.

Es ſey zwiſchen den drey Größen y, x und z folgende Gleichung gegeben:

$$y = x - z.\varphi x$$

wo $\varphi x$ irgend eine Function von x bedeutet. Man ſoll $\psi x$, eine jede Function von x, durch eine Reihe nach Potenzen von z ausdrücken.

### Auflöſung.

1) Da für $z = 0$, $y = x$, ſo wird das erſte Glied der für $\psi x$ verlangten Reihe, $\psi y$ ſeyn.

Es ſey demnach

$$\psi x = \psi y + Y.z^1 + Y.z^2 \ldots + Y.z^n + \text{etc},$$

wo $Y, Y, Y, Y \ldots Y \ldots$, die zu beſtimmenden Coefficienten, noch unbekannte Functionen von y ſind. Hat man dieſe beſtimmt, ſo laſſen ſich daraus die Coefficienten der Reihe für $Fx$ (jede andere Function von x) durch Verwechslung des Zeichens $\psi$ mit F, herleiten.

2) Nun iſt $x = y + z\varphi x$ (1), und nach dem Tayloriſchen Satze:

$$\psi x = \psi y + z.\varphi x.\frac{d\psi y}{dy} + z^2(\varphi x)^2.\frac{d^2\psi y}{1.2dy^2}\ldots$$

$$+ z^n(\varphi x)^n.\frac{d^n\psi y}{1.2\ldots n dy^n} + \text{etc}$$

Durch Vergleichung dieſer Reihe mit der (in 1) angenommenen, laſſen ſich nunmehr leicht die Coefficienten $Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} \ldots$ der letzten, nach der Ordnung beſtimmen.

Es iſt nämlich zuerſt aus (1), $\psi$ mit $\varphi$ verwechſelt, $\varphi x = \varphi y + z U$ (wo $zU$ alle übrigen Glieder der angenommenen Reihe, außer dem erſten, bedeutet). Dies in die 2te Reihe geſetzt, giebt

$$\psi x = \psi y + z \varphi y . \frac{d\psi y}{dy} + z^2 (\varphi x)^2 \frac{d^2 \psi y}{1.2.dy^2} + \text{etc} + z^2 U$$

Folglich iſt $Y^{I} = \varphi y . \frac{d\psi y}{dy}$, und ſo der Coefficient des 2ten Glieds der (in 1) angenommenen Reihe beſtimmt.

3) Eben ſo iſt nun auch, $\psi y$ mit $\varphi y$, und mit $(\varphi y)^2$, verwechſelt,

$$\varphi x = \varphi y + z \varphi y \frac{d\varphi y}{dyc} + z^2 (\ldots)$$

$$(\varphi x)^2 = (\varphi y)^2 + z . \frac{\varphi y \, d (\varphi y)^2}{dy^2} + z^2 . (\ldots)$$

Dieſe Werthe in die Reihe (2) geſetzt, geben:

$$\psi x = \psi y + z (\varphi y + z \varphi y \frac{d\varphi y}{dy} + z^2 \ldots) \frac{d\psi y}{dy} + z^2 ((\varphi y)^2 + z \ldots) \frac{d^2 \psi y}{1.2\, dy^2} + \text{etc}$$

Die Vergleichung mit der Reihe (1) giebt

$$Y^{II} = \varphi y . \frac{d\varphi y}{dy} . \frac{d\psi y}{dy} + (\varphi y)^2 . \frac{d^2 \psi y}{1.2.dy^2} = \frac{d (\varphi y^2 . \frac{d\psi y}{dy})}{1.2.dy}$$

So iſt der Coefficient des 3ten Glieds der angenommenen Reihe (1) beſtimmt.

4) Das

4) Das allgemeine Gesetz der Coeffizienten läßt sich nun leicht erweisen:

Es seyen die Coefficienten $Y^{I}$, $Y^{II}$, $Y^{III}$.. bis $Y^{N-1}$ gefunden, und zwar sey $Y^{R} = \frac{d^{r-1}\left(\varphi y^{r}.\frac{d\psi y}{dy}\right)}{1.2...r.dy^{r-1}}$, so ergeben sich daraus von selbst die eben so vielten Coefficienten der Reihen für $\varphi x$, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$... $(\varphi x)^n$.

Nun werde der Coefficient von $z^n$ in der Reihe (1) dem Coefficienten eben dieser Potenz von z in der Reihe (2) gleich gesetzt, so wird

$$Y^{N} = \frac{d^{n-2}\left(\varphi y^{n-1}.\frac{d\varphi y}{dy}\right)}{1.2..n-1.dy^{n-2}}.\frac{d\psi y}{dy}$$
$$+\frac{d^{n-3}\left(\varphi y^{n-2}.\frac{d(\varphi y^2)}{dy}\right)}{1.2...n-2.dy^{n-3}}.\frac{d^2\psi y}{1.2.dy^2}$$
$$+\frac{d^{n-4}\left(\varphi y^{n-3}.\frac{d(\varphi y^3)}{dy}\right)}{1.2..n-3.dy^{n-4}}.\frac{d^3\psi y}{1.2.3.dy^3}+\text{etc}$$
$$...+\frac{\varphi y^{n}\,d^{n}\psi y}{1.2..n.dy^{n}}$$
$$=\frac{d^{n-1}(\varphi y^{n}).\frac{d\psi y}{dy}}{1.2...n.dy^{n-1}}+\frac{d^{n-2}(\varphi y^{n}).\frac{d^2\psi y}{1.dy}}{1.2..n-2.ndy^{n-1}}$$

$$+\frac{d^{n-3}(\varphi y^n).\frac{d^3\psi y}{1.2dy}}{1.2..n-3.n.dy^{n-1}}+\text{etc}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l} d^{n-1}(\varphi y^n).\frac{d\psi y}{dy}+\frac{(n-1)}{1}d^{n-2}(\varphi y^n)\frac{d^2\psi y}{dy} \\ +\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.d^{n-3}(\varphi y^n).\frac{d^3\psi y}{dy}+\text{etc}\end{array}\right\}}{1.2.3.4..ndy^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{1.2..n.dy^{n-1}}.d^{n-1}\left(\varphi y^n.\frac{d\psi y}{dy}\right);$$ nach dem bekannten Ausdrucke für $d^n(zu)=ud^nz+\text{etc}$

5) Es iſt alſo, wenn $y=x-z\varphi x$,

$$\psi x=\psi y+z.\varphi y\frac{d\psi y}{dy}+\frac{z^2.d\left(\varphi y^2\frac{d\psi y}{dy}\right)}{1.2.dy}+\text{etc}$$

$$\ldots+\frac{z^n.d^{n-1}\left(\varphi y^n.\frac{d\psi y}{dy}\right)}{1.2..n.dy^{n-1}}+\text{etc}$$

Hier iſt alſo $\psi x$ in y, durch eine Reihe nach Potenzen von z, ausgedrückt, und dadurch die obige Aufgabe aufgelöſt.

## Zuſatz.

Es ſey

$\psi y=(\varphi y)^s$, ſo iſt $\frac{d\psi y}{dy}=s(\varphi y)^{s-1}\frac{d\varphi y}{dy}$, aber

$$(\varphi x)^s=(\varphi y)^s+\frac{s}{s+1}.\frac{z.d(\varphi y^{s+1})}{dy}$$

$$+\frac{s}{s+2}.\frac{z^2.d^2(\varphi y^{s+2})}{1.2.dy^2}+\frac{s}{s+3}.\frac{z^3.d^3(\varphi y^{s+3})}{1.2.3dy^3}+\text{etc}$$

VI.

## VII.

## Ableitung der Localformel für die Reverſion der Reihen, aus dem Satze (VI) des Herrn de la Grange; von Herrn Profeſſor Pfaff zu Helmſtädt.

1) Es ſey

$$z = a^{I}\,x + a^{II}\,x^2 + a^{III}\,x^3 + a^{IV}\,x^4 + \text{etc}$$

Man ſoll eine Potenz von x durch eine Reihe nach z ausdrücken.

Die Reihe rechter Hand ſey $= Fx$, ſo iſt

$$0 = 1 - \frac{z}{Fx}, \text{ oder } 0 = x - z\left(\frac{x}{Fx}\right).$$

Bey dieſer Form läßt ſich nun der vorige Satz (VI, 5) ſogleich anwenden.

Es iſt $y = 0$; $\varphi x = \frac{x}{Fx}$; daraus wird $(\varphi x)^s = \frac{x^s}{(Fx)^s}$

$$= y^s.(Fy)^{-s} + \frac{s}{s+1}.z.\frac{d(y^{s+1}.Fy^{-s-1})}{dy}$$

$$+ \frac{s}{s+2}.\frac{z^2.d^2(y^{s+2}.Fy^{-s-2})}{1.2.dy^2} + \text{etc}$$

wo $y = 0$ geſetzt werden muß. Man kann daher in den Differentialen für y auch x, und für Fy, z ſetzen, wo x gleichfalls $= 0$ genommen werden muß.

So wird

$$x^s = \frac{s}{s}(x^s.z^{-s}).z^s + \frac{s}{s+1}.\frac{d(x^{s+1}.z^{-s-1})}{dx}.z^{s+1}$$

$$+ \frac{s}{s+2}.\frac{d^2(x^{s+2}.z^{-s-2})}{1.2\,dx^2}.z^{s+2} + \text{etc}$$

2) Nun ſey $z^{-s-n} = a^{I}\, x^{-s-n} + a^{II}\, x^{-s-n+1} + a^{III}\, x^{-s-n+2} \ldots + a^{N+1}\, x^{-s} + \text{etc}$

ſo iſt $x^{s+n}.\, z^{-s-n} = a^{I} + a^{II}\, x + a^{III}\, x^{2} \ldots + a^{N+1}\, x^{n} + \text{etc}$

alſo bekanntlich, $a^{N+1} = \frac{d^{n}(x^{s+n}.\, z^{-s-n})}{1.\,2.,\,n.\,dx^{n}}$ (in dem Differential $x = 0$ geſetzt).

3) Folglich iſt in der Reihe für $x^{s}$ der Coefficient von $z^{s+n}$

$$= \frac{s}{s+n}.\, a^{N+1} = \frac{s}{s+n}.\, z^{-s-n}\, x\,(n+1)$$

das iſt: dem $(n+1)$ten Coefficienten der Potenz $z^{-(s+n)}$, in $\frac{s}{s+n}$ multiplicirt, gleich.

4) **Die allgemeinere Reihe:**

$z = a^{I}\, x^{p} + a^{II}\, x^{p+d} + a^{III}\, x^{p+2d} + \text{etc}$

**läßt ſich leicht auf die einfache in (1) reduciren*).**

Es iſt nämlich

$$\underline{d}$$

$$z^{p} = A^{I}\, x^{d} + A^{II}\, x^{2d} + A^{III}\, x^{3d} \ldots$$
$$= A^{I}\, X^{1} + A^{II}\, X^{2} + A^{III}\, X^{3} + \text{etc}$$

So

*) Durch dieſe Reduction wird nämlich, was hier, durch Anwendung von Differenzialausdrücken, für den $(n+1)$ten Coefficienten der einfachern Reihe (für $x^{s}$ in 3) erwieſen worden iſt, auf eben denſelben Coefficienten der allgemeinern Reihe (für $x^{s}$ in 4) weiter erſtreckt. In der combinatoriſchen Analytik laſſen ſich die allgemeinern Reihen mit eben der Leichtigkeit, wie die ſpeciellern, behandeln; ja, es giebt mehrere Fälle, wo man ſogar die am allgemeinſten ausgedruckte Reihe gleich anfangs zum Grunde legen muß, wenn man das combinatoriſche Geſetz für das Reſultat daraus ſo einfach als möglich haben will. Von meinem verſchiedenen Verhalten hierbey in den beyden Schriften (Infin. Dign. und Nov. Syſt. Perm.) und in wiefern die Interpretationen im letztern Falle leichter ſind, als die Subſtitutionen im erſtern, ſehe man Toepf. Comb. Anal. Vorr. S. XI-XIII.

S.

So wird $x^s = X^{\frac{s}{d}}$, und (für $z, z^{\frac{d}{p}}$ gesetzt), das $(n+1)$te Glied der Reihe für dieses $x^s$

$$= \frac{s:d}{s:d+n} \cdot z^{\frac{d}{p}\left(\frac{s}{d}+n\right)} \cdot z^{-\frac{d}{p}\left(\frac{s}{d}+n\right)} \cdot x(n+1)$$

oder:

$$x^s](n+1) = \frac{s}{s+nd} \cdot z^{-\left(\frac{s+nd}{p}\right)} x(n+1) \cdot z^{\frac{s+nd}{p}}$$

**Anmerk. 1.** Der letzte Satz ist in den von Herrn Professor **Hindenburg** (Nov. Syst. Perm. p. XXXIII, 2) eingeführten **Zeichen** für **Glieder** und **Coefficienten** ausgedruckt. Er ist eine **Localformel**, welche die wichtige Reduction der Coefficienten der **Umkehrungsreihe** auf Coefficienten des **allgemeinen Potenzentheorems** enthält. Der Inhalt des Satzes, in Worten ausgedrückt, ist folgender: **Das $(n+1)$te Glied der gesuchten Umkehrungsreihe** (für $x^s$ in 4) **ist ein Product des $(n+1)$ten Coefficientens der Potenz** $z^{-\frac{s+nd}{p}}$ **der gegebenen Reihe** (z in 4) **in** $\frac{s}{s+nd}$. $z^{\frac{s+nd}{p}}$. **Toepf.** Combin. Anal. S. 172, 173; *Rothe* Ser. Rev. Dem. vniu. p. 11; *Hindenburg* Probl. max. vniuerf. ad Ser. Reuerf. — Paralipomenon. p. XIX. In der letzten Schrift, wie auch der Titel anzeigt, wird die Aufgabe von **Umkehrung der Reihen** am allgemeinsten abgehandelt.

**Anmerk. 2.** Es hat zwar bereits Herr Professor Fischer zu Berlin (Theorie der Dimensionszeichen, 3ter

Th. Zuſ. S. 171-176) den Zuſammenhang der Auflöſungs- oder Umkehrungsreihe mit dem Satze des Herrn de la Grange gezeigt, aber mit Vorausſetzung der Potenzen des Infinitinomiums, und viel umſtändlicher, auch ohne einen von beyden Sätzen zu erweiſen. Dadurch wurde mir der Satz von de la Grange noch intereſſanter, den ich ſchon lange vorher kannte; und es freuete mich nicht wenig, als ich bey wiederholtem Nachdenken darüber, einen ſtrengen Beweis dafür fand, und auf eine leichte Ideenverbindung geleitet ward, die **Reverſionsformel für die Reihen** in ihrer neuen reducirten Form (Anmerk. 1) daraus abzuleiten.

## VIII.

## Ueber das Umkehrungsproblem des Herrn de la Grange; von dem Herausgeber.

---

Den von Herrn Profeſſor Pfaff erwieſenen Satz (in VI) hat Herr de la Grange *) zuerſt ſo ausgedrückt:

„In der Gleichung: $\alpha - x + \varphi x = 0$, bedeute $\varphi x$ „eine willkührliche Function von x. Eine der Wurzeln „dieſer Gleichung, d. i. einer der Werthe von x, ſey p, „und $\psi p$ eine beliebige Function der Wurzel p. Man „ſetze, der Kürze wegen $\psi' x$ ſtatt der Größe $\frac{d.\psi x}{dx}$, „ſo iſt:

$\psi p$

*) Nouvelle Méthode pour réſoudre les équations littérales par le moyen des Séries. Hiſt. de l'Ac. Roy. des Sciences etc. Tom. XXIV. Année 1768. à Berlin 1770. Der Lehrſatz ſteht daſ. §. II, 15. p. 275.

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{d.\varphi^2 x \psi' x}{1.2.dx} + \frac{d^2.\varphi^3 x \psi' x}{1.2.3\,dx^2} + \frac{d^3.\varphi^4 x \psi' x}{1.2.3.4\,dx^3} + \text{etc}$$ *)

„wo zuletzt, nachdem man differenzirt hat, α statt x gesetzt werden muß.“

In einer andern Abhandlung (Hist. de l'Ac. année 1769. p. 207) nimmt Herr de la Grange, für eben die Gleichung, schon allgemeiner $\psi x$ statt $\psi p$, setzt, wie vorher,

$$\psi x = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{d.\varphi^2 x \psi' x}{1.2\,dx} + \text{etc}$$

und darinn, nach der Differenziation, wieder α statt x. Daraus folge, erinnert er weiter ebendaselbst, für eine Gleichung, wie

$$t = x + \varphi x$$

$$\psi x = \psi t - \varphi t \psi' t + \frac{d.\varphi^2 t \psi' t}{1.2.dt} - \frac{d^2.\varphi^3 t \psi' t}{1.2.3\,dt^2} + \text{etc}$$

wo die Glieder nach t geordnet sind, und die Zeichen abwechseln.

Den Beweis betreffend, bezieht sich Herr de la Grange auf sein (hier S. 88 in der Note angeführtes) Memoire im 24sten Bande. Der dortige Beweis ist aber



*) Hier bedeuten $\phi^2 x$; $\phi^3 x$; und so auch $\phi^m (x \pm \omega)$; $\psi^n (x \pm \omega)$; 2te, 3te ... mte, nte Potenzen der Functionen $\phi$, $\psi$ von den daneben stehenden Größen x; $x \pm \omega$. Diese an sich deutliche und in andern Fällen schon gebräuchliche Bezeichnung, ist für den Druck bequemer, als die gewöhnliche $(\phi x)^2$... $(\psi[x \pm \omega])^n$. Der Punct (.) nach d, $d^2$, $d^3$ fordert das Differenzial der ganzen nach dem Puncte folgenden Größe. Euler Inst. Calc. Diff. I. §. 146.

keinesweges, weder für die erste Gleichung, wo nur eine veränderliche Größe x, noch für die zweyte, wo zwey veränderliche Größen x und t vorkommen, ganz genugthuend; wie auch bereits die Herren, Töpfer (Combin. Anal. S. 174, 175 und die Note v) und Rothe (Ser. Reu. Dem. vniu. Praef. p. IV) gegen Herrn Prof. Fiſcher in Berlin erinnert haben, welcher ausdrücklich behauptet hatte (Theor. der Dimenſionszeichen, Vorr. S. IV) der Beweis ſey in aller Schärfe geführt, deren die Analyſis fähig ſey. Auch hat Couſin (Introd. à l'étude de l'Aſtron. phyſ. §. 20) einen andern Beweis zu geben verſucht, und aus der noch allgemeinern Gleichung, zwiſchen drey veränderlichen Größen,

$$x = u + tX$$

wo X eine Function von x iſt, jede andere Function von x, in u und t, durch eine nach t geordnete Reihe, auszudrücken angewieſen. Der Couſinſche Beweis iſt aber ziemlich dunkel und dennoch unvollſtändig, da die Hauptidee, auf welche er ſich gründet, nur auf Induction beruht.

Der ſtrenge Beweis, den gegenwärtig Herr Prof. Pfaff von dieſem ſo wichtigen und in mehrerer Rückſicht fruchtbaren Satze des Herrn de la Grange (in VI) gegeben, und wofür er von Couſin nichts weiter, als die allgemeinere Form der Gleichung beybehalten hat, ergänzt die bisher offen gelaſſene Lücke aufs vollkommenſte. Die nähere Veranlaſſung, einen befriedigenden Beweis, auf den Herr Prof. Pfaff ſchon ſonſt zuweilen gedacht hatte, aufzuſuchen und durchzuſetzen, gab ihm die neuerlich bekannt gemachte Reduction der Coefficienten der Glieder der Umkehrungsreihe, auf Coefficienten des allgemeinen Potenzentheorems *). Dieſe Reduction vornehm-

*) Dieſe Reduction enthält der hier (in VII. Anmerk. 1. S. 87) nach Anleitung der dortigen Localformel wörtlich ausgedruckte Satz

nehmlich, und was daraus für die prompteſte und möglichſt einfache Darſtellung der geſuchten, nicht ſelten äuſſerſt verwickelten Glieder folgt, zogen ſeine ganze Aufmerkſamkeit auf ſich, und ließen ihn den Umfang und die Wirkſamkeit der combinatoriſch-analytiſchen Methode von einer Seite überſehen, wo ſie nur um ſo mehr Eindruck auf ihn machen mußte. Auch zeigt die Art, wie Herr Prof. Pfaff die Localformel für die Reverſion der Reihen (in VII, S. 85-87) aus dem Satz des Herrn de la Grange abgeleitet hat, deutlich, wie tief er in den Geiſt dieſer Methode eingedrungen iſt und wie er ſich dieſelbe eigen zu machen gewußt hat.

In ſo fern der Satz von Herrn de la Grange auf Functionen aller Art und Geſtalten, nicht blos auf Reihen und dieſer Reihen Potenzen, geht, iſt ſolcher allgemeiner, als die Eſchenbach-Rothiſche Reverſionsformel für Reihen. Inzwiſchen hat Herr Magiſter Rothe, den die Verwandſchaft beyder Sätze (wovon er nur neuerlich den Beweis des einen, als nicht hinreichend ſtreng verworfen (Diſſ. I. Praef. pag. IV), den andern aber ſehr bündig und in aller Schärfe erwieſen hatte) äuſſerſt intereſſirte, gleichwohl umgekehrt, aus der obigen Reverſionsformel für die Reihen, den de la Grangiſchen Satz (alſo hier VI aus VII) hergeleitet. Das kann auffallen; und man könnte vielleicht einen Rückweg auf der vom Herrn Profeſſor Pfaff bereits gebahnten Straße vermuthen. Das iſt aber nicht der Fall. Die Beweiſe ſind beyde ganz verſchieden, und haben nichts mit einander gemein; auch läßt ſich dieſe ſcheinbare Paradoxie leicht erklären.

In

Satz. Ausführlicher hiervon Toepf. Comb. Anal. S. 170-175; und von den ungemein wichtigen Folgen dieſes Satzes, Ebendaſ. S. 176-185. Herr Magiſter Rothe iſt in ſeinem allgemeinen Beweiſe der Umkehrungsreihe auf dieſelbe reducirende Localformel direcke gekommen; Ser. Rev. Demonſtr. vniuerſ. p. 11.

In Abſicht der **Anwendung auf Reihen** iſt die Umkehrung derſelben, vermittelſt des de la Grangiſchen Satzes, bey weitem nicht ſo bequem, als der Gebrauch der combinatoriſch-analytiſchen Reverſionsformel, die den Coefficienten jedes willkührlich verlangten Gliedes der Umkehrungsreihe, ohne alle weitere Reduction, gleich gut geordnet, giebt. Eine ähnliche Erinnerung hat bereits Herr Prof. Fiſcher (in dem hier S. 87, Anm. 2. angeführten Zuſatze zu ſeinem Werke, S. 171) beygebracht, wenn er ſagt: Die Differenzirungen, die er dort nach Herrn de la Granges Formel vornehmen müſſe, um ſolche auf die Reihen anzuwenden, könnten zum Beweiſe dienen, wie bequem der Gebrauch der Combinationszeichen auch bey dergleichen Arbeiten ſey.

Die Formel des Herrn de la Grange auch auf die **Doppelreihe** (Meine Abhandl. Ad Ser. Reverſ. Paralip. §. 1 und 6) anzuwenden; müßte man ſtatt z (in 1 und 4, S. 85, 86) eine **Reihe** ſubſtituiren. Dadurch würde, ſelbſt in dem einfachſten Falle, (S. 85, 1) nach de Moivre: $az^1 + bz^2 + cz^3 \ldots = \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ die Schwierigkeit bey der Umkehrung ungemein vermehrt, und ſelbige, ohne Beyhülfe der combinatoriſchen Formeln für die Potenzen des Infinitinomiums, kaum durchzuſetzen ſeyn. Inzwiſchen iſt die Localformel für dieſen Fall, in Abſicht auf Form und Anwendung, äußerſt ſimpel und leicht. Ad Ser. Reverſ. Paralip. §. 4. c, p. X. XI. und Exempl. 2. p. XII.

Der Pfaffiſche Beweis ſtützt ſich übrigens, wie der Couſinſche, auf den **Tayloriſchen Satz**; und der unendlich wichtige und mannichfaltige Gebrauch, den man von dieſem merkwürdigen Satze in der höhern Analyſis (zumal nach der **Modification** und **Ausdehnung**, die man ihm in der Folge gegeben hat) bereits gemacht hat und noch fer-

ner

ner machen kann, hat mich veranlaßt, das Wichtigſte, was dieſen Satz und ſeine verſchiedenen Formen und Erweiterungen, theils ſelbſt, theils andere mit ihm zunächſt verwandte Sätze (der allgemeinen Differenzen und Summen) anbetrift, im Zuſammenhange aufzuſtellen und nachzuweiſen *) — nicht zu erweiſen (in ſo fern die Sätze ſchon bekannt ſind) und ſelbige, gröſtentheils in meinen Zeichen, vorzutragen.

## IX.

## Ueberſicht der Hauptſätze der allgemeinen Differenzen und Summen; von dem Herausgeber.

---

(α) Benennungen:

1) $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_r$, ſeyen Glieder einer, nach einem beſtimmten Geſetze fortgehenden Haupt- oder Grundreihe (ſeries propoſita, primitiua). Es ſtellt nehmlich hier y jedes unbeſtimmte Glied der Reihe, und, mit den Diſtanzexponenten 0, 1, 2, 3 ....r verbunden

*) Der noch übrige Raum verſtattet nicht, beyde Aufſätze (die allgemeinen Differenzen und Summen und den Taylorſchen Satz betreffend) mitzutheilen. Ich gebe alſo hier blos die Ueberſicht der Hauptſätze jener Differenzen und Summen; und werde den Taylorſchen Satz mit ſeinen verſchiedenen Formen und Erweiterungen, im zweyten Hefte beybringen. Eine wichtige Anwendung dieſes Satzes hat unter andern Herr Magiſter Rothe auf Localformeln für höhere Differentiale, von Potenzen der veränderlichen Gröſen und dieſer Potenzen Producten, gemacht. Auch hiervon im nächſten Hefte des Archivs.

bunden, dieſer Glieder Folge dar. Auch ſey $y'_0$ d. i. y das erſte, $y_1$ das zweyte, $y_2$ das dritte, u. ſ. w. $y_r$ das $(r+1)$te Glied der Hauptreihe *). Herrn Eulers Zeichnung (Inſt. Calc. Diff. Vol. I. §. 2. und 23) und Herrn Hofr. Käſtners (Anal. endl. Gr. §. 724, II).

2) $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3 \ldots \Delta^m$, ohne Beyfügung von $y_0, y_1, y_2 \ldots$ ſollen überhaupt Reihen der erſten, zweyten, dritten ... mten Differenzen der Hauptreihe (die Differenzen wie bey *Eul.* l. c. §. 7 oder Käſtn. a. a. O. §. 724. S. 505 d. n. A. genommen und verſtanden) und $\Delta^1]1$, $\Delta^1]2 \ldots \Delta^2]3 \ldots \Delta^3]4 \ldots \Delta^m]r$ u. ſ. w. dieſer Reihen 1ſtes, 2tes, 3tes, 4tes ... rtes Glied bedeuten. Folglich iſt $\Delta^m](r+1)$ das $(r+1)$te Glied in der Reihe der mten Differenzen der Hauptreihe.

Ich habe hier die Zahl der Glieder nach meiner gewöhnlichen Art (Nov. Syſt. Perm. p. XXXIII, 2) gezeich-

*) Anſtatt der Bezeichnung,

nach Taylor: $\ldots \overset{\cdot\cdot}{y}, \overset{\cdot}{y}, y, \underset{\cdot}{y}, \underset{\cdot\cdot}{y} \ldots$

oder Couſin: $\ldots y'', y', y, y_1, y_2 \ldots$
$\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2$

ſchreibe ich: $\ldots y, y, y, y, y \ldots$

nehmlich y, mit Diſtanzexponenten verſehen, die, wie die Ordnungs- oder Potenzexponenten, poſitiv und negativ ſeyn können. Taylor *Meth. Increm.* p. 2 ſagt: ſunt $\overset{\cdot\cdot}{x}, \overset{\cdot}{x}, x, \underset{\cdot}{x}, \underset{\cdot\cdot}{x}$ eiusdem quantitatis valores quinque *ſucceſſivi*, quorum eſt x valor *praeſens*, ſunt $\overset{\cdot}{x}$ et $\overset{\cdot\cdot}{x}$ valores *praecedentes*, atque $\underset{\cdot}{x}$ et $\underset{\cdot\cdot}{x}$ valores *ſubſequentes*. Es fällt in die Augen, daß der Gebrauch meiner Diſtanzexponenten jene willkührliche Bezeichnung von Taylor und Couſin, in eine wiſſenſchaftliche verwandelt.

zeichnet; ſonſt iſt auch die Käſtneriſche Zeichnung für dieſen Fall (§. 724, III) kurz und bequem.

3) $\Delta^{1}y$, $\Delta^{1}{}^{I}y$... $\Delta^{2}y$, $\Delta^{2}{}^{I}y$... $\Delta^{3}y$, $\Delta^{3}{}^{I}y$... $\Delta^{m}y$, $\Delta^{m}{}^{I}y$... bedeuten erſte, zweyte, dritte... mte Differenzen der Glieder $\overset{o}{y}$, $\overset{I}{y}$... der Hauptreihe. Alſo iſt $\Delta^{m}{}^{r}y$ die mte Differenz von $\overset{r}{y}$, und $\Delta^{m+n}{}^{r+s}y$ die (m+n)te Differenz von $\overset{r+s}{y}$, dem (r+s+1)ten Gliede (1) der Hauptreihe.

## (β) Relationen und Hauptſätze.

I. $\Delta^{m}{}^{r}y = \Delta^{m}\eta(r+1)$; und $\Delta^{m+n}{}^{r+s}y = \Delta^{m+n}\eta(r+s+1)$. Differenzen von Gliedern der Hauptreihe, durch Glieder der zugehörigen Differenzreihe.

II. $\Delta^{m+n}{}^{s}y = \Delta^{m}\Delta^{n}{}^{s}y = \Delta^{n}\Delta^{m}{}^{s}y$. Zuſammengeſetzte Differenzen von Gliedern der Hauptreihe, durch Differenzen von Differenzen derſelben Glieder.

III. $\Delta^{m}{}^{r}y = \Delta^{m-1}{}^{r+1}y - \Delta^{m-1}{}^{r}y$

d. i $\Delta^{m}\eta(r+1) = \Delta^{m-1}\eta(r+2) - \Delta^{m-1}\eta(r+1)$ Geſetz der Glieder jeder Reihe der Differenzen, aus der Differenz zweyer nächſten Glieder der unmittelbar vorhergehenden, Haupt- oder Differenzreihe.

IV. $\Delta^{m}{}^{r}y = \Delta^{m+1}{}^{r-1}y + \Delta^{m}{}^{r-1}y$

d. i. $\Delta^{m}\eta(r+1) = \Delta^{m+1}\eta r + \Delta^{m}\eta r$

Geſetz derſelben Glieder aus der Summe der um eins niedrigern Glieder derſelben und der um eins höhern Differenzreihe.

V. Aufgabe. Das allgemeine Glied (Terminus generalis) jeder Reihe der Unterſchiede, durch Glieder der Hauptreihe auszudrücken; oder: den Werth von $\Delta^m y = \Delta^m \nabla^r (r+1)$ in ſolchen Gliedern anzugeben.

$$\Delta^m y = \left\{ \begin{matrix} 1.\ y^{m+r} - {}^m\mathfrak{A}\ y^{m+r-1} + {}^m\mathfrak{B}\ y^{m+r-2} \ldots\ldots \\ \ldots - {}^m\mathfrak{N}\ y^{m+r-(2n-1)} + {}^m\mathfrak{N}\ y^{m+r-2n} \ldots \mp 1.y^{r} \end{matrix} \right\}$$
$$\Delta^m \nabla^r (r+1)$$

dieſe Reihe hat $m+1$ Glieder, deren Zeichen vor dem 1ſten, 2ten ... $(2n-1)$ten, 2nten Binominalcoefficienten von Exponenten m, d. i. vor ${}^m\mathfrak{A}, {}^m\mathfrak{B} \ldots {}^m\mathfrak{N}, {}^m\mathfrak{N}$, wie hier ſteht, abwechſeln. Das letzte Glied $\mp 1.y^r$ hat das obere oder untere Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl iſt.

Schreibt man dieſe Reihe rückwärts, ſo kommt:

$$\Delta^m y = \left\{ \begin{matrix} \mp 1.y^{r} \pm {}^m\mathfrak{A}\ y^{r+1} \mp {}^m\mathfrak{B}\ y^{r+2} \ldots\ldots \\ \ldots \pm {}^m\mathfrak{N}\ y^{r+2n-1} \mp {}^m\mathfrak{N}\ y^{r+2n} \ldots + 1.y^{r+m} \end{matrix} \right\}$$
$$\Delta^m \nabla^r (r+1)$$

das letzte oder $(m+1)$te Glied dieſer Reihe iſt immer poſitiv. Bey den übrigen Gliedern gelten abwechſelnd, die obern oder untern Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl iſt.

Zuſ. Für $m=n$ und $r=0$, kommen die Reihen für $\Delta^n \nabla^1$, wie in Käſtn. Anal. endl. Gr. §. 724, XI. Für die

beyden andern Formeln (Ebendaſ. IV) wären hier $m=n$; $r=1$ und $m=n+1$; $r=0$ zu ſetzen.

VI. Aufgabe. **Das allgemeine Glied jeder Reihe der Unterſchiede, durch erſte Glieder der Differenzreihen auszudrücken.**

$$\Delta^m{}_r y = 1\Delta^m y + {}^r\mathfrak{A}\Delta^{m+1} y + {}^r\mathfrak{B}\Delta^{m+2} y \ldots + {}^r\mathfrak{K}\Delta^{m+r} y$$

$$\text{d. i. } \Delta^m \eta(r+1) = \Delta^m \eta 1 + {}^r\mathfrak{A}\Delta^{m+1}\eta 1 + {}^r\mathfrak{B}\Delta^{m+2}\eta 1 \ldots + {}^r\mathfrak{K}\Delta^{m+r}\eta 1$$

VII. Aufgabe. **Das allgemeine Glied der Hauptreihe, durch die erſten Glieder, der Hauptreihe und der Differenzreihen, auszudrücken.**

$$y = 1.y + {}^r\mathfrak{A}\Delta^1 y + {}^r\mathfrak{B}\Delta^2 y \ldots + {}^r\mathfrak{K}^{-1}\Delta^{r-1} y + {}^r\mathfrak{K}\Delta^r y$$

$$\text{d. i. } y\eta(r+1) = 1.y + {}^r\mathfrak{A}\Delta^1\eta 1 + {}^r\mathfrak{B}\Delta^2\eta 1 \ldots + {}^r\mathfrak{K}^{-1}\Delta^{r-1}\eta 1 + {}^r\mathfrak{K}\Delta^r\eta 1$$

Hier entſteht VII aus VI, wenn man $m=0$ in VI ſetzt, wo alſo $\Delta^m{}_r y = \Delta^0{}_r y = y$. Auch ſind in beyden Reihen VI und VII die $(r-1)$ten und $r$ten, zum Exponenten $r$ gehörigen, Binomialcoefficienten ${}^r\mathfrak{K}^{-1} = r = {}^r\mathfrak{A}$ ${}^r\mathfrak{K} = 1$, daß alſo dieſe Reihen, vorwärts und rückwärts geſchrieben, einerley Binomialcoefficienten haben.

Zuſatz. Setzt man hier $r=n$, ſo kommt die Reihe ${}_n y$, wie bey Käſtn. Anal. endl. Gr. §. 725, II.

**Anmerkung.** 1. Die Sätze I-IV ſind theils für ſich klar, theils folgen ſie leicht aus dem Verfahren, die Differenzen zu nehmen. Auch hat die Ueberſicht der Aufgaben V, VI, VII, aus und durch **Induction**, keine Schwierigkeit.

Die Induction ergiebt ſich nehmlich unmittelbar aus ſolchen Darſtellungen, wie z. E. Euler (Inſt. Calc. diff. §. 10, 23) beybringt. Herr Hofr. Käſtner, der den Beweis ſeiner Formeln auf eine ähnliche Darſtellung (Anal. endl. Gr. §. 724. S. 505) gründet, erinnert (Aufl. I. S. 506) ausdrücklich: die Binomialcoefficienten in den Reihen der Differenzen fallen bey ihr ſogleich in die Augen, und ſie entdecke das Geſetz, nach dem jedes Glied jeder Reihe der Unterſchiede gemacht wird, ſo, daß man ſich nur noch von der Allgemeinheit dieſes Geſetzes zu verſichern habe. Aehnliche Darſtellungen nach Gliedern und Columnen, findet man (Ebendaſ. §. 727-734) auf figürliche Zahlen, und (§. 735-740) auf Combinationen benutzt.

Dieſen Gebrauch der figürlichen Anordnung, zu bequemer Auffindung von Sätzen und Formeln für die zu ſuchenden Reſultate, hat alſo die combinatoriſche Analytik mit der übrigen Analyſis gemein; und obſchon jene ſolche Anordnungen häufiger und in mannichfaltiger abgeänderten Formen anzuwenden pflegt: ſo giebt das doch keinen Unterſchied von Bedeutung zwiſchen beyden. Was aber hierin der combinatoriſchen Analytik ausſchließlich vor jener und weſentlich eigen iſt, das iſt der beſondere Gebrauch, den ſie von der viel mannichfaltigern und weiter erſtreckten figürlichen, größtentheils involutoriſchen (S. 13, 1) Anordnung, nicht blos zu bequemer Auffindung, ſondern ſelbſt zu lichtvoller Darſtellung, und, was noch wichtiger iſt, promter Entwickelung der Sätze, Formeln und Reſultate, vermittelſt der combinatoriſch ausgedrückten allgemeinen Glieder, in den einfachſten und regelmäßigſten Geſtalten, macht; und dieſer Vortheil, den eine verbeſſerte Combinationslehre nur allein gewähren konnte, wird dadurch noch erhöht, daß ſich die Werthe der mit einander verbundenen Combinationselemente in den Formeln, im Voraus in Tafeln (Nov. Syſt. Perm.

Praef.

Praef. p. IV. unten, und p. VIII oben; ingl. Infin. Dign. die Erinnerung S. 155 und die folgenden Tafeln) anordnen laſſen. Man vergleiche hier II, 3, S. 14.

**Anmerk. 2.** Einen ſtrengen Beweis der, nach meiner Art und Zeichnung ausgedrückten, Sätze V, VI, VII, in der Allgemeinheit, wie ſie hier aufgeführt ſind, hat Herr Profeſſor Buſſe in ſeiner lehrreichen Abhandlung über das Syſtem der allgemeinen Differenzen (Kleine Beytr. zur Math. und Phyſ. 1 Th. III St. §. 14, 38, 41) gegeben. Noch muß ich dieſen Sätzen hier beyfügen:

a) Herr Prof. Buſſe (Beytr. II. St. §. 22. S. 33) erinnert: Er habe den Gebrauch der deutſchen Verſalbuchſtaben für Binomialcoefficienten von mir angenommen, und überall in ſeinen Abhandlungen beybehalten, habe aber noch den Exponenten m davor geſetzt. Dieſer Zuſatz zeigt, daß Herr B. nur meine Infin. Dignit. (1779) nicht aber das ſpäter herausgegebene Syſt. Perm. (1781) vor Augen gehabt hat, wo die Zeichnung weit vollſtändiger und vollkommner iſt (vergl. Toepf. Comb. Anal. S. 189. 190) und worinn (S. XL, 9) die Binomialcoefficienten eben ſo, durch ${}^{m}\mathfrak{A}$, ${}^{m}\mathfrak{B}$, ${}^{m}\mathfrak{C}$... ausgedrückt, angegeben werden. Aus eben der Urſache ſind auch wohl die von mir (Ebendaſ. S. XXXVII-XXXIX; LXV, LXVI) eingeführten Diſtanzexponenten *), hier und ſonſt nicht benutzt worden, nach welchen



*) Von dem Nutzen der Diſtanzexponenten überhaupt, und von ihrer Anwendung auch auf Binomialcoefficienten, ausführlich, Toepf. comb. Anal. S. 164-170. Auch Herr Pr. Buſſe hat verſchiedene nützliche Relationen der (nach meiner Art gezeichneten) Binomialcoefficienten und ihrer Reihen gefunden, und (Beytr. II und III St.) bekannt gemacht. Mehrere Relationen dieſer Coefficienten, deren Kenntniß ungemein wichtig für die Anwendung iſt, habe ich in einer Tafel geſammelt. Der Mangel bequemer Zeichen iſt bisher allein Schuld geweſen, daß man die etwas verwickeltern Relationen dieſer Coefficienten nicht eher

chen $^{m}\mathfrak{C}^{0}$ oder $^{m}\mathfrak{C}$, $^{m}\mathfrak{C}^{\pm 1}$, $^{m}\mathfrak{C}^{\pm 2}$, $^{m}\mathfrak{C}^{\pm s}$, $^{m}\mathfrak{C}^{n}$, $^{m}\mathfrak{C}^{n\pm r}$... die allgemeinen nten, $(n\pm 1)$ten, $(n\pm 2)$ten, $(n\pm s)$ten, 2nten, $(2n\pm r)$ten... zum Exponenten m gehörigen Binomialcoefficienten, kurz und wiſſenſchaftlich bezeichnen.

b) Euler ſchreibt z. B. $\Delta^{2} y^{III}$, $\Delta^{3} y^{IV}$, etc, auch ſo Herr Buſſe, Karſten und Andere; und nach dieſer Analogie ſind auch $\Delta^{m+1} y^{T}$, $\Delta^{m} y^{T+1}$ (Kl. Beytr. S. 42, 55) geformt. Hier werden alſo arabiſche und römiſche Zahlen, kleine und große lateiniſche Buchſtaben, unter einander gemengt, jene als Anzeiger der Differenzen, dieſe zu den Functionen $y, y^{I}, y^{II} \ldots y^{N}, y^{N+I} \ldots$ [Euler Inſt. Calc. Diff. Vol. I. §. 23. ſchreibt dennoch $y^{(n)}$] gebraucht; und ſo die Aufmerkſamkeit auf mehrere kleine und große Buchſtaben und Zahlen (z. B. Beytr. §. 50. S. 61), zerſtreut. Das fällt beym Gebrauche meiner Diſtanzexponenten ganz weg, die Subſtitution $t=0$ iſt für ſich verſtändlich, da hingegen $T=0$ erſt ausgelegt, und daß es mit einer gänzlichen Weglaſſung von T (Ebendaſ. S. 43, 55, 57) dort gleichgültig ſey, nachgewieſen werden muß.

c) Herr Prof. Buſſe (Ebend. §. 11. Anm. und § 37) unterſcheidet vorangehende und folgende Glieder der Haupt- und Differenzreihen, und zählt blos die folgenden, wo alſo $y^{T}$ und $\Delta^{m} y^{T}$ als tte Glieder anzuſehen ſind. Ich bin hier Eulern und Käſtnern gefolgt, welche erſte

eher hat kennen lernen. Meine Zeichnung derſelben, in Verbindung mit den Diſtanzexponenten, gewährt, bey der nöthigen Kürze und Deutlichkeit, den Vortheil einer bequemen Umwandlung in alle Geſtalten, die dieſe Coefficienten nach den verſchiedenen Verhältniſſen, in die ſie gegen einander treten können, annehmen.

erſte und folgende (Anal. endl. Gr. §. 724, V) Glieder zuſammenzählen (Ebend. II und III) und $y$, $\Delta^m y$ zu $(t+1)$ten Gliedern rechnen. Es wäre zu wünſchen, Herr Prof. B. hätte dieſe Art die Glieder zu zählen beybehalten, weil jene Abweichung keinen weſentlichen Vortheil verſchaft, und Herr B. doch auch in der Folge derſelben Abhandlung (von §. 42 an) der Euleriſchen Art, das erſte Glied mitzuzählen, beytritt. Dieſe Einförmigkeit hätte manche Zurechtweiſung, wegen der verſchiedenen Art zu zählen, auch die, wegen $T=0$, ſelbſt das Befremdende in der ſonſt wahren Behauptung, die entwickelten Werthe für $y^T$ betreffend (§. 42) erſpart und überflüßig gemacht.

Anm. 3. Das Beygebrachte wird hinreichend ſeyn, den Vortrag der Sätze und die von mir dabey gebrauchte Zeichnung und Gliederzählung zu rechtfertigen. Das benimmt gleichwohl der Abhandlung von Herrn Prof. Buſſe nichts von ihrem Werthe, die immer ſchätzbar bleibt; und wegen der zugleich kurzen und allgemeinen Ueberſicht und bündigen Behandlung der Hauptſätze des Syſtems der allgemeinen Differenzen, verdienſtlich iſt.

## (γ) Reihen der *n*ten Ordnung und ihre Glieder.

Die angeführten Sätze gelten, was auch y für eine Function einer veränderlichen Größe iſt, und nach welchem Geſetze auch die Hauptreihe $y^0, y^1, y^2 \ldots$ fortgehen mag. Hierbey ſchreiten im Allgemeinen die Differenzreihen, wenn die Gliederzahl der Hauptreihe nicht beſchränkt iſt, ohne Ende fort. Es giebt aber mehrere Reihen (Käſtn. Anal. endl. Gr. §. 310-312. §. 727, u. a.) deren Differenzen irgend einmal abbrechen, d. i. deren 1ſte, 2te, 3te ... oder nte Differenzen conſtant ſind. Man nennt ſie

Reihen der 1ſten, 2ten, 3ten... nten Ordnung (Eul. Inſt. calc. diff. §. 37) und ſollen ſie hier durch $_1y$, $_2y$, $_3y$... $_ny$ bezeichnet werden (vergl. Buſſe a. a. O. §. 43-51).

VIII. Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Reihe der nten Ordnung, als Grundreihe, durch die erſten Glieder, derſelben Reihe und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.

$$_n^r y = {}^r\mathfrak{A}\,\Delta^1 y + {}^r\mathfrak{B}\,\Delta^2 y + {}^r\mathfrak{C}\,\Delta^3 y \ldots + {}^r\mathfrak{N}\,\Delta^n y$$

d. i. $$_n y\,]\,(r+1) = y\,]\,1 + {}^r\mathfrak{A}\,\Delta^1]\,1 + {}^r\mathfrak{B}\,\Delta^2]\,1 + {}^r\mathfrak{C}\,\Delta^3]\,1 \ldots + {}^r\mathfrak{N}\,\Delta^n]\,1$$

Für VIII wird nehmlich die Reihe VII, bis auf $\Delta^n$ oder die nte Differenzreihe, fortgeſetzt, mit welcher ſie abbricht. Für eine Grundreihe der (n+m)ten Ordnung, oder für $_{n+m}y$, müßte man die Reihe bis auf das Glied $^{r+m}_{n+m}\mathfrak{N}\,\Delta^{n+m}\,y$ fortſetzen.

IX. Aufgabe. Das allgemeine Glied einer Grundreihe der nten Ordnung, aus lauter Gliedern derſelben Reihe, auszudrücken.

$$_n^r y = {}^r\mathfrak{N}(r-n)\left\{\frac{^n y}{r-n} - \frac{{}^n\mathfrak{A}\,y^{n-1}}{r-n+1} + \frac{{}^n\mathfrak{B}\,y^{n-2}}{r-n+2} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \mp \frac{{}^n\mathfrak{K}\,y^{n-k}}{r-n+k} \ldots \mp \frac{{}^n\mathfrak{N}\,y^{0}}{r} \right\}$$

Anmerk. Die Zahl n, welche beſtimmt, zu welcher Ordnung die Reihe $_n^r y$ gehört, iſt in VIII und IX nur dem y beygeſchrieben worden, weil es ſich von ſelbſt verſteht, der

daß die y und ihre Differenzen, die in dem Werthe von $_{n}^{r}y$ vorkommen, zu derſelben Reihe derſelben Ordnung gehören.

### (d) Summatoriſche Reihe und derſelben allgemeines Glied.

Das **Abziehen** jedes Gliedes vom nächſtfolgenden, giebt Differenzreihen: das **Addiren**, des erſten Gliedes zum zweyten, des dritten zu beyder Summe u. ſ. w. des jedesmal nächſtfolgenden zur Summe aller vorhergehenden, ſummatoriſche Reihen. Iſt alſo $y, y, y, y \ldots$ wieder die Hauptreihe, und ſchreibt man eine andere Reihe $\overset{0}{f}, \overset{1}{f}, \overset{2}{f}, \overset{3}{f} \ldots$ neben ihr zur Seite, ſo, daß $\overset{0}{f}$ oder $\overset{1}{f}=0$; $\overset{0}{f}=y$; $\overset{1}{f}=y+y$; $\overset{2}{f}=y+y+y$ etc; ſo iſt $\overset{0}{f}, \overset{1}{f}, \overset{2}{f} \ldots \overset{r}{f}$ die **ſummatoriſche Reihe** (Series ſummatrix) der Hauptreihe, und der Werth von $\overset{r}{f}$ heißt das **ſummatoriſche Glied** (Terminus ſummatorius) der Hauptreihe (Eul. Inſt. Calc. Diff. §. 53. 56).

Der ſummatoriſchen Reihe **allgemeines Glied** $\overset{r}{f}=\overset{0}{y}+\overset{1}{y}\ldots+\overset{r-2}{y}+\overset{r-1}{y}$, iſt alſo mit dem ſummatoriſchen Gliede der Hauptreihe einerley; daher ſich die Erfindung des ſummatoriſchen Gliedes auf jene eines allgemeinen bringen läßt (Eul. l. c. §. 53).

X. Aufgabe. **Das ſummatoriſche Glied der Hauptreihe, durch die erſten Glieder, der Hauptreihe und der Differenzreihen, auszudrücken.**

$$\overset{r}{f}={}^{r}\mathfrak{A}y+{}^{r}\mathfrak{B}\Delta^{1}y+{}^{r}\mathfrak{C}\Delta^{2}y\ldots+{}^{r}\mathfrak{R}\Delta^{r-1}y$$

d. i. $f\,]\,(r+1)={}^{r}\mathfrak{A}y+{}^{r}\mathfrak{B}\Delta^{1}]\,1+{}^{r}\mathfrak{C}\Delta^{2}]\,1\ldots\ldots+{}^{r}\mathfrak{R}\Delta^{r-1}]\,1$

Hier iſt $\overset{r}{f}$ das $(r+1)$te Glied ($\overset{0}{f} = 0$ als das erſte gezählt) und der Werth von $\overset{r}{f}$ folgt aus dem für $\overset{r}{y}$ (VII) weil man (Eul. l. c. §. 55) die ſummatoriſche Reihe $\overset{0}{f}, \overset{1}{f}, \overset{2}{f} \ldots$ als eine gegebene **Grundreihe**, die Hauptreihe $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ aber, und ihre erſte, zweyte, dritte... Differenzreihen als erſte, zweyte, dritte, vierte... Differenzreihen der ſummatoriſchen anſehen kann. Statt 1. $\overset{0}{y}$ (in VII) käme alſo hier 1. $\overset{0}{f}$, das Glied 1. $\overset{0}{f}$ fällt aber weg, weil $\overset{0}{f} = 0$ (vergl. Buſſe a. a. O. §. 52, 56).

Man kann zu der ſummatoriſchen Reihe als einer Grundreihe, eine neue ſummatoriſche, und zu dieſer wieder eine andere ſuchen, und dies Verfahren ſo weit verfolgen, als man will. Dies iſt der Fall bey den ſogenannten **figurirten Zahlen**, aller Art und Ordnungen: der Triangular- Tetragonal- Pentagonal- ꝛc. überhaupt Polygonalzahlen; der drey, vier, fünf und mehrſeitigen Pyramidalzahlen. Hierbey kann man die Glieder verſchiedentlich zählen. Zählt man ſie (wie in X) ſo, wie jedes nte Glied der ſummatoriſchen Reihe aus der Summe von $n-1$ Gliedern der vorhergehenden (als Grundreihe) erwächſt: ſo giebt das ein Schema für figurirte Zahlen, ſo wie das Käſtneriſche (Anal. endl. Gr. §. 727. S. 515 d. n. A.). Nimmt man aber die Summe des erſten und zweyten Gliedes der vorangehenden Reihe als das zweyte Glied der ſummatoriſchen, die Summe der drey erſten Glieder jener Reihe als das dritte dieſer; ſetzt man überhaupt das nte Glied der ſummatoriſchen aus der Summe der n erſten Glieder der nächſtvorhergehenden Reihe zuſammen: ſo kommt daraus die verkürzte

Dar-

Darſtellung der figurirten Zahlen, wie in meiner Tafel (Infin. Dign. S. 162-165).

Führt die Hauptreihe $y, y, y \ldots$ auf beſtändige Differenzen, ſo kommen, und zwar eben dieſelben, auch bey der ſummatoriſchen vor; und wenn die Hauptreihe zur nten Ordnung gehört, ſo gehört die ſummatoriſche zur $(n+1)$ten (Eul. l. c. §. 55). Dafür kann man hier das Zeichen ${}_{n+1}\int$ in ähnlicher Bedeutung, wie ${}_{n}y$ in VII, gebrauchen.

XI. Aufgabe. Das allgemeine Glied einer ſummatoriſchen Reihe der $n+1$ten Ordnung, durch die erſten Glieder, der zugehörigen Grundreihe (von der Ordnung n) und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.

$${}_{n+1}\int^{r} = {}^{r}\mathfrak{A}y + {}^{r}\mathfrak{B}\Delta^{1}y + {}^{r}\mathfrak{C}\Delta^{2}y \ldots + {}^{r}\mathfrak{N}^{+1}\Delta^{n}y$$

d. i.

$${}_{n+1}\int(r+1) = {}^{r}\mathfrak{A}y_{1} + {}^{r}\mathfrak{B}\Delta^{1}y_{1} + {}^{r}\mathfrak{C}\Delta^{2}y_{1} \ldots + {}^{r}\mathfrak{N}^{+1}\Delta^{n}y_{1}$$

Herr Prof. Buſſe bezeichnet die Ordnung der ſummatoriſchen Reihe in Beziehung auf die Haupt- oder Grundreihe, und ſetzt alſo ${}^{r}_{n}\int$ ſtatt meines ${}^{r}_{n+1}\int$ (Kl. Beytr. S. 65. §. 54.)

Eine andere Art, von ſehr ausgedehntem Gebrauche in der Anwendung, das ſummatoriſche Glied nicht durch Differenzen auszudrücken, ſondern von dem allgemeinen Gliede unmittelbar abzuleiten, hat Euler (l. c. §. 58 u. f.) angewieſen.

## X.

## Auszüge und Recenſionen neuer Bücher.

1. Bey Gelegenheit der Eröfnung der Leipziger Sternwarte, hat der Obſervator bey derſelben, der außerordentl. Prof. der Philoſophie, Herr Chriſtian Friedrich Rüdiger, in der Schäferiſchen Buchhandlung allhier, herausgegeben: Darſtellung der neuen Methode des Herrn Du Seſour, Sonnen- und Mondfinſterniſſe für einen gegebenen Ort analytiſch zu berechnen: nebſt einem Entwurfe der Sonnenfinſterniß am 31 Januar 1794, nach Lambert. Leipzig, 1794. 58 Octavſ. mit zwey Kupfert.

In dieſer Abhandlung beſchäftiget ſich der Verfaſſer (S. 3-38) mit der analytiſchen Auflöſung der Aufgabe: den Anfang, das Mittel und das Ende einer Sonnenfinſterniß für einen gegebenen Ort zu berechnen. Hierauf folgen (S. 39-44) analytiſche Formeln zu Berechnung einer Mondfinſterniß. Den Beſchluß macht, ein Entwurf der Sonnenfinſterniß am 31ſten Januar 1794 für Leipzig, nach Lamberts Methode (S. 45-58).

Die Auflöſung der erſten Aufgabe zerfällt in zwey Theile: der erſte enthält die Rechnungen für die Erde überhaupt; der zweyte, die Rechnungen für einen gegebenen Ort insbeſondere.

Durch jene werden conſtante Größen beſtimmt, die man nach Endigung ihrer Berechnung in zwey Tafeln gehörig ordnet (S. 12 und 18), und welche brauchbar ſind, man mag die Umſtände einer Sonnenfinſterniß, für welchen Ort man will, berechnen. Hieher gehören: Verbeſſerung

beſſerung der Polhöhe eines Orts, die Verhältniß der Erdaxen (der Erdaxe, zum Durchmeſſer des Aequators) 177 : 178 geſetzt (§. 1). Berechnung der Horizontalparallaxe des Mondes unter dem Pol, aus der Horizontalparallaxe des Mondes unter dem Aequator (§. 2). Eine andere Beſtimmung der vorigen zwey Stücke nach Neutons Theorie (§. 3, 4). Neue Formel, die Neigung der relativen Bahn zu finden (§. 5). Aus dieſer Neigung, der Schiefe der Ekliptik, der Abweichung und Länge der Sonne zur Zeit der ☌, wird (§. 6) ein Winkel berechnet, der beym du Seſour l'angle de l'orbite relative, avec le fil parallele heißt. Auf die richtige Angabe dieſes Winkels: ob er ſpitzig, ſtumpf, oder im dritten und vierten Quadranten des Kreiſes fällt? kommt in den folgenden Rechnungen alles an. Daher ſind (S. 8. I-V) Regeln angegeben, wodurch ſich die Art dieſes Winkels bey jeder Sonnenfinſterniß allezeit ergiebt. Wie man aus der ſtündlichen Bewegung des Mondes von der Sonne in der Ekliptik, die Bewegung des Mondes von der Sonne in einer Zeitſecunde berechnet (§. 7).

Hier iſt ein Ruhepunkt. Man ordnet nun die bisher durch Rechnung gefundenen Größen in eine Tafel, um ſie in der Folge bequemer brauchen zu können. Dieſe Tafel (S. 12) iſt ſo eingerichtet, daß man das Schema davon, bey jeder andern Sonnenfinſterniß brauchen kann, und nur ſtatt der darinn vorkommenden Zahlen, andere ſetzt, die zu der Sonnenfinſterniß gehören, von der die Rede iſt.

Mit §. 9 fängt die Berechnung einer neuen Tafel conſtanter Größen an. Daſelbſt, und §. 10, werden nämlich fünf Formeln vorgelegt, wodurch man das letzte Reſultat findet, welches die ſcheinbare Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Mond iſt. In dieſen Formeln kommen aber Factoren vor, die ſich für einen andern Ort nicht verändern. Dies ſind alſo beſtändige

Größen,

Größen, welche nicht von der Polhöhe und dem Stundenwinkel abhängig ſind: man ſucht ſie heraus, berechnet und ordnet ſie in eine Tafel beſonders (§. 11-13).

Hier iſt ein zweyter Ruhepunkt, und das Ende der Rechnungen für die Erde überhaupt. Nunmehr richtet ſich (§. 14-26) die Rechnung auf einen gegebenen Ort, und da ſucht man die ſcheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, für die beyläufig gegebene Zeit des Anfangs oder des Endes der Sonnenfinſterniß, nach den bereits aufgeſtellten fünf Gleichungen, deren conſtante Größen ſchon berechnet ſind, und in welchen nun nichts mehr variabel iſt, als Polhöhe, Stundenwinkel und die Zeit von der ☌ bis zu der Zeit, für welche die ſcheinbare Entfernung geſucht wird. Für dieſe drey Stücke conſtruirt man zuerſt mit leichter Mühe eine Tafel (S. 20), mit Hülfe welcher und der vorhergehenden Tafeln, man alsdann (§. 16-21) die ſcheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes durch bloße Addition und Subtraction findet.

Wie man die Höhe des Mondes über dem Horizonte in Rechnung zu bringen hat, zeigt §. 22 und vergleicht die gefundene ſcheinbare Entfernung mit der Summe der Halbmeſſer von Sonne und Mond. Zeigt ſich ein Unterſchied zwiſchen beyden: ſo ſtellt man die vorhergehenden Rechnungen (von §. 14-22) noch einmal, für eine frühere oder ſpätere Zeit an; dies iſt hier der Fall in §. 23. Die eben gefundene ſcheinbare Entfernung wird (§. 24) wieder mit der Summe der Halbmeſſer von Sonne und Mond verglichen; und endlich durch Interpolation die wahre Zeit der Erſcheinung, von der die Rede iſt, gefunden. Dieſe Zeit prüft §. 25; und ſo iſt alles geſchehen, was zu einer genauen Berechnung einer Sonnenfinſterniß möglich iſt. In der Abhandlung ſelbſt, wird alles ſehr umſtändlich und zugleich durch Rechnungen erläutert, die

ſich

ſich auf die Sonnenfinſterniß am 31ſten Januar 1794 beziehen. Solchergeſtalt wird Jeder durch dieſe Schrift in den Stand geſetzt werden, leicht jede andere vorkommende Sonnenfinſterniß zu berechnen. Obgleich nur ein beſonderes Beyſpiel zur Erläuterung gewählt werden konnte: ſo iſt doch im Vortrage auf alle mögliche Fälle Rückſicht genommen worden, und man ſieht mit leichter Mühe unter den gegebenen Regeln diejenigen nach, welche auf den vorliegenden Fall paſſen.

Was die Berechnung der Mondfinſterniſſe (S. 39-44) anbetrift, ſo giebt, den Anfang und das Ende derſelben, eine einzige Formel (S. 40, II) und derſelben erſter Theil, auch das Mittel. Die Größe, giebt die Tangente des kürzeſten Abſtandes (S. 41, VI). Auch hier iſt alles umſtändlich erläutert, und als Beyſpiel (S. 41-44) die künftige Mondfinſterniß 1795, am 3ten Februar, berechnet.

In der Erläuterung zu dem Entwurfe der Sonnenfinſterniß am 31ſten Januar 1794 (S. 45-58, und die Kupfertafel am Ende) wird (Num. 1-6) gelehrt, wie eine Zeichnung, für die Erde überhaupt, entworfen wird; dann werden (Num. 7-16) um die Reſultate, welche die Zeichnung geben, zu prüfen, eben dieſe Reſultate durch trigonometriſche Rechnung, genauer gefunden; die Anweiſung, dieſe Rechnungen anzuſtellen, iſt hier auf allgemeine Formeln (Num. 12) gebracht, wornach alſo in andern Fällen auch gerechnet werden kann. Den Beſchluß macht eine Anleitung zur Zeichnung für einen gegebenen Ort (Num. 17-26). Hier wird die Rechnung mit der Zeichnung verbunden, wodurch unſtreitig richtigere Reſultate, als durch Zeichnungen allein, erhalten werden.

Dieſe neue Methode zu Berechnung der Sonnenfinſterniſſe, aus Herrn du Sejour's zu Paris in den Jahren

1786

1786 und 1789 in zwey Quartbänden herausgegebenem: Traité analytique des mouvemens apparens des corps céleſtes (Tome I. L. I. Ch. I; L. III. Ch. II.) iſt von derjenigen ganz verſchieden, die dieſer berühmte Aſtronom in ſeinen Récherches ſur la Gnomonique, les rétrogradations des planetes, et les eclipſes de Soleil, 1761 bekannt gemacht hat, und die wir, von Herrn Rector Scheibel zu Breslau im Jahre 1793 überſetzt, und mit einer Anwendung auf die große Sonnenfinſterniß am 5 September 1793 verſehen, erhalten haben. Herrn Scheibels mit vielem Fleiße ausgearbeitete Schrift dieſer ältern Methode, wird zwar durch gegenwärtige deutſche Bearbeitung der neuen nicht unbrauchbar gemacht werden, doch wird man, bey Vergleichung beyder, letzterer unſtreitig den Vorzug geben müſſen. Von den Mondfinſterniſſen kommt in den erwähnten Récherches und auch bey Herrn Scheibel nichts vor. Herrn Profeſſor Rüdigers Arbeit iſt um ſo mehr verdienſtlich, da das größere Werk von Herrn du Sejour zu den koſtbarern, und vielleicht eben deswegen ſeltnern, gehört, und hier, auf wenigen Bogen, die Berechnung und Zeichnung der Sonnen- und Mondfinſterniſſe, zur unmittelbaren Anwendung bequem, vorgelegt und ſehr deutlich beſchrieben worden ſind.

Das Titelkupfer der Schrift, ſtellt den Auf- und Grundriß der Leipziger Sternwarte vor, davon etwas in der Vorrede geſagt, auch die nöthigen Erklärungen darüber ſind beygebracht worden. Eine etwas ausführlichere Beſchreibung dieſer Sternwarte, an einem andern Orte.

---

2. Kri-

## 2. Kritiſches Verzeichnis aller bis hieher herausgekommenen, die combinatoriſche Analytik unmittelbar oder mittelbar betreffenden Schriften. Ein Beytrag zur künftigen Geſchichte dieſer neuen Wiſſenſchaft. Von dem Herausgeber.

### Vorerinnerung.

Die vor einiger Zeit von Herrn Profeſſor Fiſcher zu Berlin herausgegebene: **Theorie der Dimenſionszeichen, nebſt ihrer Anwendung auf verſchiedene Materien aus der Analyſis endlicher Größen,** hat einen, in ſeiner Art ganz beſondern, merkwürdigen Streit veranlaßt.

Die **Dimenſionszeichen**, die in dieſem Werke ſind aufgeführt worden, haben mit einer Art meiner **Combinationszeichen** eine ſo offenbare und auffallende Uebereinſtimmung, die ein Kenner der letztern nothwendig ſogleich wahrnehmen und bemerken muß. Hiernächſt ſind die Sätze, welche die **Grundlage** der Fiſcheriſchen Theorie ausmachen: ſeine **Potenzirungsmethode** der Reihen, ſowohl für ganze und poſitive, als auch für willkührlich unbeſtimmte Exponenten, und ſo auch ſeine **allgemeine Auflöſungsreihe** für gegebene Functionen oder Gleichungen aller Art, jene, mit meiner **Potenzirungsmethode**, dieſe, mit meiner und der **Eſchenbachiſchen Reverſionsformel**, vollkommen einerley, und die Ausdrücke dafür, Glied für Glied dieſelben. Endlich, was die Uebereinſtimmung ganz vollſtändig macht, ſo werden auch die Dimenſionszeichen **gerade ſo**, wie die ihnen gleichgültigen Combinationszeichen, durch **Zerfällung der Zahlen zu beſtimmten Summen** (hier S. 26, D, *a*) mit **Beyfügung** der, jeder Complexion zugehörigen, **Verſetzungszahl**, und folglich, auf dieſelbe, von mir zuerſt

angewiesene neue, von allen übrigen bisher bekannten Verfahren abweichende, Art aufgelöst und ihren Werthen nach bestimmt, auch diese Werthe, eben so, wie bey mir, in einer Tafel geordnet, nach der Reihe vorgelegt.

Ganz natürlich entsteht hier die Frage: Ob diese, in Absicht auf Synthesis und Analysis so ganz vollendete Uebereinstimmung von Zeichen und Sätzen, von beyder Entwickelung und Anordnung, die gewiß Niemand für ein Werk des blinden Zufalls halten wird, etwa daher rühre, daß Herr F. diese Dinge von mir entlehnt, und, vielleicht durch vermeintliche Verbesserung, vielleicht auch wohl absichtliche Veränderung, dessen, was dabey zufällig war, bloß verstellt habe; oder, ob sich ein anderer, diese in der That außerordentliche Erscheinung genugthuend erklärender Aufschluß geben lasse? Die Herren, Doepfer und Rothe, haben das Erste behauptet, und ihre Gründe dafür, jener, in einer eigenen Schrift: (Combin. Analyt. und Theor. der Dimensionsz. in Parallele gestellt); dieser, bey Gelegenheit seiner Habilitationsdissertation (*Serier. Reuerſ. Demonſtr. Vniuerſ.* Praef. p. IV-VI. und Coroll. p. 29-32) deutlich und ausführlich vorgelegt.

Dagegen hat sich Herr Professor Fischer nicht weniger umständlich, vornehmlich gegen Herrn Magister Töpfer, vertheidiget *) und behauptet: Die angefoch-

foch-

*) In der Schrift: Ueber den Ursprung der Theor. der Dimensionsz. und ihr Verhältniß gegen die Combin. Analyt. des Hn. Prof. Hindenburgs. Ich habe hier in mehreren Stellen Herrn Professor Fischers eigne Worte gebraucht, und in allen denen, die ich als Aeußerungen von ihm (Eingeständnisse, Rechtfertigungen oder Entschuldigungen) anführe, die Seitenzahlen seiner Vertheidigungsschrift ganz kurz in Parenthesen beygefügt. Die römischen Zahlen beziehen sich auf die Einleitung dieser Schrift, die andern auf die Abhandlung selbst.

fochtenen Zeichen und Sätze, ſo wie deren Entwickelung und Anordnung, deren Uebereinſtimmung mit den meinigen er nicht nur als wirklich anerkennt (VIII) ſondern auch in ſeiner Schrift noch genauer zu beſtimmen geſucht habe (34-40), habe er keinesweges von mir entlehnt (6, 7, 49); ſie gehören ihm, wenigſtens als Nacherfinder (V) eigenthümlich zu; ſeine Zeichen, deren Uebereinſtimmung mit den meinigen ohnſtreitig der ſcheinbarſte gegen ihn gebrauchte Grund ſey (40), ob ſie ſchon nicht durch meine Schriften veranlaßt worden (7), hätten dennoch mit den meinigen weſentlich übereinſtimmen müſſen (XIV und 38); ſelbſt die geringe Abweichung im Aeußerlichen, ſey nichts weniger als zufällig (38); ſeine Potenzirungsmethode könne von der meinigen, nicht weiter, als blos in dem äußern zufälligen Baue ſeiner Zeichen abweichen (VI); eben ſo wenig könne ſeine Auflöſungsreihe (in Abſicht auf ihren Ausdruck durch recurrirende Glieder) von der meinigen, (in Abſicht auf ihre Darſtellung, nach welcher die Glieder unabhängig von einander gegeben ſind) von der Eſchenbachiſchen, durch etwas anders als eben dieſen zufälligen äußern Bau der beyderſeitigen Zeichen, und alſo weſentlich gar nicht, verſchieden ſeyn (VII); die Auflöſung und Werthbeſtimmung ſeiner Dimenſionszeichen, leite nothwendig auf Zerfällung der Zahlen zu beſtimmten Summen, mit Beyfügung der Verſetzungszahl vor die einzelnen Producte (4, 5); auf alle dieſe (ſo zahlreichen und mannichfaltigen) Uebereinſtimmungen habe er unvermeidlich geführt werden müſſen (46) — weil er aus derſelben Quelle geſchöpft, aus der auch ich geſchöpft habe, aus der allen, welche Kraft und Luſt zum Suchen haben, offenſtehenden unveränderlichen Natur der Dinge (VIII und 46); alle Uebereinſtimmung zwiſchen den beyderſeitigen Zeichen und Sätzen, hänge an einem und demſelben Faden, an welchem überhaupt alles

hänge, was er mit mir gemein habe: an dem Umſtande nämlich, daß ſeine Zeichen, wie die meinigen, Zeichen für Coefficienten einer Reihe ſeyen, welche das Geſetz, nach welchem die Coefficienten in den höhern Potenzen einer Reihe, von den Coefficienten der erſten Potenz abhängen, auf eine höchſt einfache und faßliche Art vor Augen legen (5, 34); daß dieſes Verhältniß zwiſchen den beyderley Coefficienten, der gegebenen Reihe und ihrer Potenzen, nur Eins (38), und zwar combinatoriſch (46) ſey; es laſſe ſich zwiſchen dieſen beyderley Coefficienten kein anderes allgemeines, von dem meinigen weſentlich verſchiedenes, Geſetz finden (39); er habe, bey ſeinem Vorſatze, ein ſolches Geſetz aufzuſuchen, auf das von mir aufgeſtellte, nothwendig verfallen müſſen; die combinatoriſche Entwickelung oder Auflöſung ſeiner Dimenſionszeichen, durch Zuſammenſetzung gegebener Zahlen zu beſtimmten Summen, habe er in einer Tafel beygefügt, um keine Lücke zu laſſen, und habe ſo für alle je in der Ausübung wirklich vorkommende Fälle geſorgt *) (5, in der Note, und 37); die Colliſion ſey demnach unvermeidlich geweſen und beweiſe nichts gegen ihn (46); ja, es ſey wahrſcheinlich, daß ſich ſogar in dem, was ich noch nicht bekannt gemacht habe, noch mehrere Colliſionspunkte finden dürften (VI).

Da dasjenige, was die Theorie der Dimenſionszeichen mit der combinatoriſchen Analytik gemein hat, ſo offen-

*) Hr. Prof. Fiſcher behauptet, es ſey eigentlich gar nicht nöthig, die Zuſammenſetzung gegebener Zahlen zu beſtimmten Summen durch eine Regel nachzuweiſen. Man könne das, nach dem Beyſpiele aller bisherigen Analyſten, dem geſunden Verſtande der Leſer überlaſſen. Die Tabelle für die Dimenſionszeichen ſey von ihm nur zum Ueberfluß mitgetheilt worden. Ueber dieſe, in mehrern Stellen der Haupt- und Vertheidigungsſchrift ſo beharrlich wiederholte auffallende Aeußerung, iſt hier der Ort nicht ſich herauszulaſſen.

offenbar und unverſteckt *) vor Augen liegt, daß ein Kenner der letztern, wie Herr Profeſſor Fiſcher ſich ſelbſt ausdrückt (33), blind ſeyn müßte, um es nicht bey dem erſten Aufſchlagen ſeines Buchs ſogleich wahrzunehmen, ſo entſteht hier eine zweyte, nicht weniger als die erſte wichtige, Frage: Was Herrn Profeſſor Fiſcher vor dem Anfange ſeiner Arbeit von meinen combinatoriſchen Schriften etwa bekannt geweſen ſeyn könne, und ob ihm denn, während der anhaltenden Bearbeitung ſeines Werks, von der ſo großen, ſo leicht bemerklichen Uebereinſtimmung, gar nichts geahndet oder in den Sinn gekommen? Darüber erklärt ſich Herr Profeſſor Fiſcher (XII-XIV) dahin: daß er Recenſionen meiner Schriften, oder kleinere Abhandlungen von mir, im Leipziger Magazine, früher oder ſpäter, geleſen haben möge; aus dergleichen Sachen lerne man doch wahrhaftig meine Zeichen und Methode nicht kennen; ſonſt ſey ihm wiſſentlich nichts vorgekommen, was ihm dazu hätte dienen können. Was meine eigentlich (in den Jahren 1778, 1779, 1781, 1784 herausgekommene) combinatoriſche Schriften anbelangt, ſo ſey ihm zum Theil, ſelbſt ihre Exiſtenz, von allen aber das Eigenthümliche ihres Inhalts, bis kurz vor dem Abdrucke ſeines Buches, gänzlich unbekannt geblieben; und eben ſo ſey es ihm auch mit Herrn Eſchenbachs Diſſertation (De ſerierum Reverſione, Lipſ. 1789) gegangen, die ihm erſt durch die Toepferiſche Schrift bekannt geworden ſey, und die er, nebſt einer andern frühern ebenfalls combinatoriſchen Schrift deſſelben Verfaſſers (de multipli angulorum tangentibus, Lipſ. 1785) allererſt im Som-



*) Dies Wort iſt hier von Herrn Prof. Fiſcher in pſychologiſcher Beziehung (XIV) auf ſich gebraucht worden, und iſt auch zu dem folgenden Ausdrucke „blind ſeyn“ paſſend. Ich habe es hier daher nicht weglaſſen wollen, damit es nicht ſcheine, als ſuchte ich den Fiſcheriſchen Text zu verfälſchen; daher ich auch, um deſto ſicherer zu gehen, alles mit einer faſt diplomatiſchen Gewiſſenhaftigkeit nachgewieſen und beurkundet habe.

mer 1793 durch eine Berliner Buchhandlung habe erhalten können (IV. Note); Er erinnere ſich zwar, meine Schrift, Infinitinomii Dignitates vor etwa zehn oder zwölf Jahren, wirklich einmal flüchtig durchblättert zu haben; Es ſey ihm aber bey dieſer Ocularinſpection gerade ſo, wie Herrn Toepfer bey der erſten Ocularinſpection ſeines Buches gegangen: Er habe eine ganz falſche und nachtheilige Meynung davon gefaßt, und ſo von der Wichtigkeit deſſelben ſich eben keinen ſehr günſtigen Begriff gemacht. Der Irrthum in Anſehung dieſer Schrift, ſey die erſte und eigentlichſte Quelle der Verdrießlichkeiten, in welche er ſich itzt verwickelt ſehe: theils habe er verurſacht, daß meine folgenden Schriften ſeine Aufmerkſamkeit gar nicht gereitzt, theils, daß er ſelbſt damals, als er kurz vor dem Drucke ſeines Buchs eine Colliſion ſeiner Arbeit mit meinem Nouo Syſtemate Perm. etc wahrgenommen, die Sache auf einem zu leichten Fuß behandelt, und ſich gar nicht einmal die Mühe genommen, ſeine Arbeit mit den Infinit. dignit. zu vergleichen. Zwar habe er wirklich mehr als einmal verſucht, mein Nouum Syſtema durchzuleſen, aber immer ſey ihm die Geduld ausgegangen, ehe er noch mit den Definitionen, welche zwölf Quartſeiten füllen, fertig geworden. Es ſey alſo blos bey der Ocularinſpection verblieben, und dieſe ſo flüchtige Vergleichung habe ihn verführt, eine Hauptformel in meiner Potenzirungsmethode falſch zu verſtehen, und da eine weſentliche Verſchiedenheit zwiſchen ſeinen und meinen Zeichen zu ſehen, wo in der That keine vorhanden ſey. So ſchwach und nichtsbeweiſend auch der Grund dafür geweſen ſey: ſo habe er ihn doch verleitet, zu ſehen, was er zu ſehen wünſchte, nehmlich einen wichtigen Unterſchied der beyderſeitigen Zeichen. Freylich hätte er ſich von dieſer Täuſchung leicht befreyen können und ſollen; aber genug, er habe das nicht gethan, habe, wie geſagt, die Sache zu leicht genom-

nommen, an nichts Arges gedacht noch denken können, und ſey ſo in ſeiner Arg- und Sorgloſigkeit geblieben, bis ihn Herr Toepfer ſo unſanft daraus geweckt habe u. ſ. w.

So viel vorläufig und im Allgemeinen, von der in ſeiner Art ſo einzigen Erſcheinung, und wie Herr Profeſſor Fiſcher die dabey ſo ſonderbar zuſammentreffenden Umſtände theils rechtfertiget, theils entſchuldiget. Ich habe die kurze Relation davon, mit ſeinen eigenen Worten abgefaßt, mit Beyfügung der Seitenzahlen der Vertheidigungsſchrift, um allen Mißverſtändniſſen und Mißdeutungen vorzubeugen, da der Leſer, der ſich näher unterrichten will, die Stellen nun gleich ſelbſt nachſchlagen, und mit den zum Theil ausführlichern Aeußerungen vergleichen kann.

Die Klagpunkte der Herren Toepfer und Rothe ſind deutlich von ihnen vorgelegt, und durch beygebrachte Gründe dafür ausführlich auseinandergeſetzt worden. Herr Profeſſor Fiſcher hat, beſonders was die Toepferiſchen Beſchuldigungen betrift, in ſeiner Vertheidigungsſchrift umſtändlich ſich darauf eingelaſſen, und ſeine Gegengründe vorgebracht. Man wird alſo hier eine detaillirte Erörterung des ganzen Streites wohl nicht von mir erwarten. Ich bin keinesweges gemeynet, dem Publikum, das nun vollkommen in den Stand geſetzt iſt, aus den vorliegenden Akten ein Urtheil, nach eigenen Einſichten, zu fällen, in dieſem ſeinem Urtheile vorzugreifen; auch habe ich keine Recenſion der gegenſeitigen Schriften, keine Reviſion dieſer Akten, verſprochen — nur ein kritiſches Verzeichniß aller, die combinatoriſche Analytik nahe oder entfernt angehenden Schriften — zum Behuf einer künftigen Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft; wobey ich den Faden derſelben vom An-

fange aufzufassen, und den Leser daran bis auf die neuesten Zeiten zu leiten gedenke *).

Das wird mir die beste Gelegenheit geben, verschiedenes, was bis itzt noch im Dunkeln liegt, in ein helleres Licht zu setzen; manche Misverständnisse und Misdeutungen zu heben; einige mir, oder vielmehr meinen combinatorischen Schriften gemachte Vorwürfe aus dem Wege zu räumen; den wahren Gehalt dieser und anderer Schriften, nach ihrem innern Werthe, selbst mit in Beziehung auf neuere Kenntnisse und die jetzige Lage der Sachen, genau und unpartheiisch auszumessen; gewisse Lücken und Mängel in Herrn Professor Fischers Vertheidigungsschrift zu bemerken; die Unzulänglichkeit einiger, für unüberwindlich gewiß darinn aufgeführten Beweisgründe darzuthun; und dann auch hie und da ein Wort der Rechtfertigung für diejenigen beyzubringen, die bisher so viel und so theilnehmend für mich und meine Sache gesprochen haben — um sie von allem Verdachte unlauterer Nebenabsichten, die ein nachtheiliges Licht auf ihren persönlichen Charakter werfen würden, zu befreyen.

Ich

*) Dieser Beytrag zu einer Geschichte der combinatorischen Analytik wird also hier mit Aufführung derjenigen Schrift von mir anfangen, die schon sehr viele und mannichfaltige Spuren combinatorischer Behandlungen, nebst deutlichen Anwendungen derselben auf verschiedene Gegenstände, enthält, und dadurch zu den folgenden eigentlich combinatorisch-analytischen Schriften, von mir, die nächste Veranlassung gegeben hat. Man könnte noch weiter zurückgehen, und nachweisen, wo sich dergleichen Spuren, selbst einige schon weiter getriebene Versuche, die Combinationslehre auf die Analysis anzuwenden, in ältern Schriften vorfinden, und was Jacob Bernoulli, Cramer, Boscovich, Castillon, vornehmlich aber Leibnitz, de Moivre, und neuerlich auch Bezout, hierin geleistet haben. Einiges davon habe ich bereits hier und da in den Anmerkungen und Vorreden zu meinen combinatorischen Schriften beygebracht, und noch weit mehr darüber gesammelt. Vielleicht werde ich künftig davon etwas im Zusammenhange mittheilen.

Ich darf hoffen, das Publikum wünſche doch gewiß auch meine Stimme in dieſer Sache zu vernehmen. Die Veranlaſſung ſie hier zu geben, iſt ſo natürlich und ungeſucht, und ich darf ſo wenig Einrede dieſerhalb von irgend Jemand befürchten, daß ich vielmehr beſorgen muß, ein längeres Stillſchweigen von meiner Seite, unter dieſen Umſtänden, dürfte wohl gar denen, die ſich ſo eifrig für meine Sache verwendet haben, nachtheilig werden, und ſo zu unſtatthaften und ungegründeten Auslegungen die nächſte Gelegenheit geben.

Der Anfang des kritiſchen Verzeichniſſes folgt im nächſten Hefte.

## XI.

## Auszüge aus Briefen, verſchiedene Nachrichten und Anzeigen.

### 1. Nachricht wegen der neuerrichteten Sternwarte zu Leipzig.

Die Akademie verdankt dieſe zu Ausbreitung nützlicher Kenntniſſe ſo wichtige öffentliche Anſtalt der Gnade ihres Durchlauchtigſten Churfürſtens, und verehrt hierin einen neuen Beweis Seiner über alles ſich erſtreckenden landesväterlichen Huld und Fürſorge.

Das Obſervatorium iſt auf dem Thurme des hieſigen Churfürſtlichen Schloſſes, Pleiſſenburg genannt, an dem mittägigen Ende der Stadt, angelegt. Der Horizont rund herum iſt völlig frey, ohne von der nördlich liegenden Stadt beſchränkt zu werden; ein Vorzug,

den sowohl die Lage der Stadt, in der freyesten offensten Ebene, als auch die Lage des Thurms gegen die Stadt, auf einer der erhabensten Gegenden derselben, gewährt, den auch der berühmte Astronom, Abbé Hell, bey seiner Durchreise durch Leipzig, im Jahre 1769, sogleich bemerkte, und den Wunsch äußerte, daß doch die so vorzügliche und in mehrern Rücksichten einzige Lage dieses Thurms auf ein astronomisches Observatorium benutzt werden möchte!

Der Haupteingang ist in dem westlich an den Thurm stoßenden Theile des Schlosses. Durch ihn kommt man in einen kleinen Vorsaal zu drey Zimmern, von welchen das erste und größte zu Vorlesungen, die beyden andern, zu Aufbewahrung von Instrumenten, Büchern, Charten und Modellen bestimmt sind. Aus demselben Vorsaale führt ein, durch die hier 6 Leipziger Ellen dicke Thurmmauer gebrochener, mit einer Thüre verschlossener Gang (ein zweyter ist, zu mehrerer Bequemlichkeit, auch außerhalb des Vorsaales angebracht) in den Thurm, an dessen innerer Fläche eine spiralförmig gewundene Treppe angelegt ist, auf welcher man zu der Sternwarte aufsteigt. Diese besteht in einem großen Salon, von 23 Ellen und 14 Zoll Leipziger Maas im Durchmesser und 11 Ellen 17 Zoll Höhe, mit acht, nach den vier Haupt- und vier ersten Nebengegenden gerichteten, Ausgängen, welche auf die mit einem eisernen Geländer versehene, vier Ellen breite, Galerie führen. Die acht Pfeiler zwischen diesen Ausgängen des Saals sind folgendermaßen benutzt worden. Die beyden gegen Norden stehenden, enthalten den Ausgang und Austritt der aufbringenden Haupttreppe, und den Anfang einer weiter fort und höher hinauf führenden kleinern Treppe. In die vier zu beyden Seiten der erstern zunächst angrenzenden, gegen Osten und Westen stehenden Pfeiler, sind Cabinette angebracht, welche die fest-

feststehenden, unmittelbar auf die solide und auch in dieser Höhe noch sehr dicke Thurmmauer zu setzenden, größern astronomischen Instrumente (zwey Mauerquadranten, nach Süden und Norden, einen Zenitsector und ein Passageninstrument) enthalten sollen; mit den nöthigen Vorrichtungen, die Schnitte in die Mauer und das Dach bey den astronomischen Observationen gehörig öffnen zu können, und zugleich mit der Bequemlichkeit, daß zwey Beobachter, der eine an dem einen Mauerquadranten, der andere am Passageninstrument, durch die offenen Fenster oder Thüren mit einander communiciren, auch andere außerhalb der Cabinette befindliche Personen den von ihnen abgesonderten Beobachter sehen, und die Behandlung des Werkzeuges, ohne ihm während der Observation hinderlich zu fallen, wahrnehmen können. In die beyden noch übrigen Pfeiler, sind zwey Behältnisse, das eine mit einem Ofen versehen, eingelegt, zu Aufbewahrung kleinerer Instrumente und zu mannichfaltigem andern Gebrauche für den Beobachter, der hier durch ein Fenster eine Aussicht gerade gegen Süden hat. Aus dem großen Saale kommt man, vermittelst der oben bereits erwähnten kleinern Treppe, durch die Kuppel in einen kleinern Saal, von 7 Ellen und 14 Zoll im Durchmesser, 7 Ellen 14 Zoll Höhe, und acht Fenstern, der dann weiter durch eine Treppe, welche auf und nieder gewunden werden kann, auf die im Durchmesser eben so große Plätteforme führt. Da die Sternwarte auf dem Thurme schon eine beträchtliche Höhe hat, und wegen der angränzenden Stadt und einiger nahen sehr hohen Schloßgebäude, auch nothwendig haben mußte: so ist diese Höhe durch mehrere (mitten in dem Salon, der Kuppel, dem kleinen Saale, der Platteforme) angebrachte, senkrecht über einander liegende, durch Klappen gedruckte, kreisrunde Oefnungen, von zwey Ellen im Durchmesser, ununterbrochen erhalten worden, so, daß man in dem untersten

Theile des Thurms, bey geöfneten Klappen, den Himmel im Zenit sehen, und diese Veranstaltung auf mehrere Art, selbst auch in physischer Hinsicht, benutzen kann.

Den Bau der Sternwarte hat der hiesige geschickte Architekt und Baudirektor, Herr Dauthe, nach einem dem Locale und den Absichten des Gebäudes angemessenen, von den Professoren, Bortz und Hindenburg, gemachten und höchsten Orts gnädigst approbirten, Entwurfe, geführt. Beyde Professoren haben auch, während des Baues, in so fern concurriret, als zu Ausführung des vorgelegten Plans, ihr Rath, in astronomischer Hinsicht, nöthig war.

Die Zimmer und Säle sind mit dem erforderlichen Ameublement auf das bequemste versehen, auch die, zum gewöhnlichen Gebrauche nöthigen, und andere, zum Theil größere und kostbare, Bücher, ingleichen Charten und Modelle, angeschaft. Hiernächst haben Se. Churfürstliche Durchlauchtigkeit eine bestimmte Summe zum Ankauf astronomischer Instrumente voritzt verwendet, und der Akademie verstattet, sich durch den Professor Hindenburg an Höchstdero Gesandten zu London, Grafen von Brühl, diesem großen Kenner und eifrigen Beförderer nützlicher, vornehmlich astronomischer, Kenntnisse und Wissenschaften, dieserhalb zu wenden. Endlich haben Höchstdieselben, auch aus Dero eigenem, sehr schätzbarem Vorrathe an astronomischen Instrumenten in Dresden, eine Anzahl derselben auf das Observatorium zu schenken, und überhaupt der ganzen Anstalt durch die vortreflichste Anordnung die zweckmäßigste Einrichtung zu geben geruhet *).

So

*) Auch Privatpersonen haben sich bereits um dieses neue Institut rühmlichst verdient gemacht; dahin das ansehnliche, von dem 1789 verstorbenen Landcammerrathe, Carl Friedrich Kregel von Sternbach gestiftete Legat an Gelde und kostbaren gelehrten Werken, auch eine Sammlung schätzbarer astronomischer Bücher gehört, die der Appellationsrath und Proconsul allhier, Herr D. Carl Friedrich Trier, der Sternwarte geschenkt hat.

So ausgerüſtet, ward die Sternwarte mit dem Anfange dieſes Jahres der Akademie zum Gebrauch übergeben, auch dabey ein Obſervator, in der Perſon des Herrn Profeſſor Rüdigers, ingleichen zwey Studioſi, als Gehülfen, nebſt einem Aufwärter, angeſtellt, und ſelbige mit dem Anfange der diesjährigen akademiſchen Sommervorleſungen eröfnet.

Eine gute Vorſtellung der Sternwarte, nach ihrem Auf- und Grundriſſe, nebſt beygefügter Erklärung, findet man als Titelkupfer zu der (hier S. 106) recenſirten Schrift. Auch kann man einzelne Abzüge davon in der Schäferiſchen Verlagsbuchhandlung bekommen.

## 2. Aus Briefen, an den Herausgeber.

### Von dem Ingenieur-Capitaine, Herrn Eſchenbach *).

Batavia, den 18. Sept. 1792.

Seit meiner Abreiſe vom Kap, wo ich mich faſt ein halbes Jahr aufgehalten habe, habe ich wieder ernſtlich arbeiten können. Ich habe die ganze Reiſe über täglich, wenn das Wetter es erlaubte, mich mit Aufſuchung der Breiten beſchäftiget. Die Seeleute folgen hier allgemein der Methode von Douwes, die Röhl in ſeiner Steuermannskunſt, ganz in der Sprache des Erfinders, vorgetragen hat. Sie iſt auch für dieſe ganz gut, da bey ihnen wenig Arbeit ſeyn muß, und auf ein oder ein Paar

*) Verfaſſer der wichtigen Schrift: De Serierum Reverſione, formulis *analytico-combinatoriis* exhibita, ſpecimen, und einiger andern Abhandlungen und Ueberſetzungen. Er wurde von der Akademie zum Obſervator bey der (damals noch nicht ganz vollendeten) Leipziger Sternwarte vorgeſchlagen, eben zu der Zeit, da ſich ihm eine andere günſtige Gelegenheit zeigte, ſeine Wisbegierde in einem noch größerm Umfange zu befriedigen. Er trat, unter ſehr vortheilhaften Bedingungen, im Jahre 1791, als Ingenieur-Hauptmann in Dienſt der Holländiſchen Oſtindiſchen Compagnie, und Herr Profeſſor Rüdiger erhielt nach ihm die Stelle als Obſervator bey der Sternwarte.

Paar Minuten es nicht ankommt. Aber einem Mathematiker kann sie nicht genug thun. Ich suchte eine andere, und fand im de la Lande Autoren genug angeführt, die Formeln dafür gegeben haben; nur hatte ich zum Unglück keines von den Büchern bey der Hand, wo sie zu finden waren. Ich mußte mir also selbst dergleichen entwerfen *). — Die Formeln sind eigentlich blos für ein fixes Observatorium wahr; sie geben aber doch, wenn die Farth des Schiffes nicht allzuschnell ist, die Breite ziemlich genau; und wenn die Beobachtungen gut sind, so kann man auf die Minute sicher seyn: da ich hingegen Fälle gehabt habe, wo erst eine fünffache Widerholung der Douwesschen Methode den Fehler bis unter zwey Minuten vermindern konnte —

Wie wir in der Strasse Sunda ankamen, ließ mich der reizende Anblick der herrlichen Küsten und Inseln nicht vom Verdeck. Ich beschloß auf der Stelle eine Anwendung der Lambertischen Methode (Beytr. 1, 1, §. 107 — 116) zu machen, ein Land mit bloßen Winkeln (wie man es zu nennen pflegt) aufzunehmen. Ich habe ihr zufolge ein Kärtchen von der Straße entworfen, wozu ich nachher den Maasstab aus der Geschwindigkeit des Schiffes genommen habe. Dadurch konnte ich auch der dasigen Berge Höhen über die Meeresfläche bestimmen; worunter ich einen (am Ende der Kayserbucht auf Sumatra, gerade beym Eingange der Straße Sunda) von 910 Toisen (den höchsten Berg, den ich bisher gesehen) gefunden habe. Da wir, bey dem besten Wind und Wetter, des Nachts nicht, wie sonst zu geschehen pflegt, liegen blieben, so konnte ich leider nicht fort observiren; daher meine Karte nur die erste Hälfte der Strasse enthält. Ich bin nachher auf dem Lande, der gedachten Methode, die Lambert in der That allzuschnell verläßt, noch weiter nachgegangen, weil sie mir, für meine Verhältnisse besonders, sehr anwendbar schien; ich muß aber gestehen, daß ich die Verbindung der Construction (§. 112) mit der analytischen Auflösung (§. 116) noch nicht recht deutlich einsehen und begreifen kann. Das Problem ist vom zweyten Grade, und die Construction giebt auch zwey Antworten; dem ohngeachtet hat es Lambert, durch seine Benennung, auf eine einfache Gleichung gebracht. Wo bleibt nun die zweyte Antwort der Frage? Wollten Sie mir hier-

*) Die mitgetheilten Formeln, und ihre Vergleichung mit der Douwesischen, kann ich hier, aus Mangel des Raumes, nicht beybringen.

hierüber einige Auskunft geben; oder können Sie mir jemand nennen, der die Sache weiter bearbeitet hat, ſo werden Sie mich ſehr verbinden *).

(Die Fortſetzung künftig).

Von

*) Wegen der Wichtigkeit dieſer Lambertiſchen Aufgabe bemerke ich folgendes, in der Kürze, und mit Verweiſung auf Anderer Schriften.

Lambert hat ſeiner Aufgabe (a. a. O. §. 107; 111) eine andere (§. 109) ſchon ſonſt bekannte wichtige: „von Beſtimmung „der Lage eines vierten Orts D, gegen drey andere A, B, C, „von gegebener Lage, und die man alle aus D ſehen kann" vorangeſchickt, und davon zwey geometriſche (S. 73) und zwey trigonometriſche (S. 74–76) Auflöſungen beygebracht. Eine Formel für den dortigen Winkel DAB = x (S. 75, 76) wovon alles abhängt, hat Herr v. Tempelhof (Anfgr. d. An. endl. Gr. §. 680–682) S. 486 gegeben. Kürzer ſind dergleichen Formeln von Langsdorff (Erkl. d. Käſtn. An. e. Gr. S. 432 u. f.) und Oberreit (Lamb. deutſch. gel. Beſchw. 5 B. S. 300, 301) zu finden angewieſen worden. Am ausführlichſten haben dies Problem behandelt, Käſtner (Geom. Abh. I. Samml. 51. Abh. von 1–36, und hiſtoriſch, von 36–40. Eine wichtige Bemerkung, daſelbſt [39]) und Mayer (Unterr. zur prakt. Geom. 2 Th. §. 186–188; S. 289–395 d. n. A.). Von Branders mechaniſcher Auflöſung (Ebendaſ. S. 296, 297 vergl. mit Lamb. a. a. O. §. 110).

Was nun die Lambertiſche Aufgabe (§. 107; 111) ſelbſt anbetrift: „die Lage von drey Oertern A, B, C, durch drey andere D, E, F, aus deren jedem man jene drey ſehen kann, unter ſich und gegen dieſe andere zu beſtimmen" ſo iſt vor allen Dingen zu wiſſen, daß die von Lambert (S. 82) für Cot x angegebene Formel falſch iſt, indem zu jedem Producte, im Zähler und Nenner des dortigen Bruchs, ein Factor fehlt. Das Verſehen hat zuerſt Herr Good (Lamb. d. g. Beſchw. 2. B. S. 232–235) entdeckt, und Lambert (Ebendaſ. S. 236) anerkannt, und nun den Zähler des Bruchs noch verkürzt. Doch muß dort (S. 236) ſtatt ſ. b ſ. g (Zeile 9) ſ. 1 ſ. g, und ſtatt ſ. a ſ. e (Zeile 15) ſ. a ſ. c geſetzt werden. Ebendaſelbſt (S. 235, 237–239) kommen Anwendungen auf Rechnung, auch (S. 237, 238) eine Conſtruction vor, mit nützlichen Erinnerungen, wegen der Abweichungswinkel und ihren Richtungen, und wie dieſe zur Probe dienen, daß Rechnung und Conſtruction richtig ſeyen. Beydes würde Herrn Eſchenbachs Bedenklichkeit gehoben haben. Dieſelbe Aufgabe hat auch Herr v. Tempelhof (l. a. B. §. 684, 685), wo die Endformel für Cot x (S. 489) wie die erſte Lambertiſche zu verbeſſern iſt. Eine Erweiterung, „auf vier Oerter A, B, C, D, „durch vier andere; wo alſo die gegenſeitige Lage von acht Punkten zu beſtimmen iſt" (Ebendaſ. §. 693–698; wo S. 513 am Rande, Fig. 64, und in dieſer Figur Tab. III, der Buchſtabe T

beyſe-

Paar Minuten es nicht ankommt. Aber einem Mathematiker kann sie nicht genug thun. Ich suchte eine andere, und fand im de la Lande Autoren genug angeführt, die Formeln dafür gegeben haben; nur hatte ich zum Unglück keines von den Büchern bey der Hand, wo sie zu finden waren. Ich mußte mir also selbst dergleichen entwerfen *). — Die Formeln sind eigentlich blos für ein fixes Observatorium wahr; sie geben aber doch, wenn die Farth des Schiffes nicht allzuschnell ist, die Breite ziemlich genau; und wenn die Beobachtungen gut sind, so kann man auf die Minute sicher seyn: da ich hingegen Fälle gehabt habe, wo erst eine fünffache Widerholung der Douwesschen Methode den Fehler bis unter zwey Minuten vermindern konnte —

Wie wir in der Strasse Sunda ankamen, ließ mich der reizende Anblick der herrlichen Küsten und Inseln nicht vom Verdeck. Ich beschloß auf der Stelle eine Anwendung der Lambertischen Methode (Beytr. I, 1, §. 107 — 116) zu machen, ein Land mit bloßen Winkeln (wie man es zu nennen pflegt) aufzunehmen. Ich habe ihr zufolge ein Kärtchen von der Straße entworfen, wozu ich nachher den Maasstab aus der Geschwindigkeit des Schiffes genommen habe. Dadurch konnte ich auch der dasigen Berge Höhen über die Meeresfläche bestimmen; worunter ich einen (am Ende der Kayserbucht auf Sumatra, gerade beym Eingange der Straße Sunda) von 910 Toisen (den höchsten Berg, den ich bisher gesehen) gefunden habe. Da wir, bey dem besten Wind und Wetter, des Nachts nicht, wie sonst zu geschehen pflegt, liegen blieben, so konnte ich leider nicht fort observiren; daher meine Karte nur die erste Hälfte der Strasse enthält. Ich bin nachher auf dem Lande, der gedachten Methode, die Lambert in der That allzuschnell verläßt, noch weiter nachgegangen, weil sie mir, für meine Verhältnisse besonders, sehr anwendbar schien; ich muß aber gestehen, daß ich die Verbindung der Construction (§. 112) mit der analytischen Auflösung (§. 116) noch nicht recht deutlich einsehen und begreifen kann. Das Problem ist vom zweyten Grade, und die Construction giebt auch zwey Antworten; dem ohngeachtet hat es Lambert, durch seine Benennung, auf eine einfache Gleichung gebracht. Wo bleibt nun die zweyte Antwort der Frage? Wollten Sie mir hiers

*) Die mitgetheilten Formeln, und ihre Vergleichung mit der Douwesschen, kann ich hier, aus Mangel des Raumes, nicht beybringen.

hierüber einige Auskunft geben; oder können Sie mir jemand nennen, der die Sache weiter bearbeitet hat, ſo werden Sie mich ſehr verbinden *).

(Die Fortſetzung künftig).

Von

*) Wegen der Wichtigkeit dieſer Lambertiſchen Aufgabe bemerke ich folgendes, in der Kürze, und mit Verweiſung auf Anderer Schriften.

Lambert hat ſeiner Aufgabe (a. a. O. §. 107; 111) eine andere (§. 109) ſchon ſonſt bekannte wichtige: „von Beſtimmung „der Lage eines vierten Orts D, gegen drey andere A, B, C, „von gegebener Lage, und die man alle aus D ſehen kann" vorangeſchickt, und davon zwey geometriſche (S. 73) und zwey trigonometriſche (S. 74–76) Auflöſungen beygebracht. Eine Formel für den dortigen Winkel DAB = x (S. 75, 76) wovon alles abhängt, hat Herr v. Tempelhof (Anfgr. d. An. endl. Gr. §. 680–682) S. 486 gegeben. Kürzer ſind dergleichen Formeln von Langsdorff (Erkl. d. Käſtn. An. e. Gr. S. 432 u. f.) und Oberreit (Lamb. deutſch. gel. Brfw. 5 B. S. 300, 301) zu finden angewieſen worden. Am ausführlichſten haben dies Problem behandelt, Käſtner (Geom. Abh. I. Samml. 31. Abh. von 1–36, und hiſtoriſch, von 36–40. Eine wichtige Bemerkung, daſelbſt [39]) und Mayer (Unterr. zur prakt. Geom. 2 Th. §. 186–188; S. 289–305 d. n. A.). Von Branders mechaniſcher Auflöſung (Ebendaſ. S. 296, 297 vergl. mit Lamb. a. a. O. §. 110).

Was nun die Lambertiſche Aufgabe (§. 107; 111) ſelbſt anbetrift: „die Lage von drey Oertern A, B, C, durch drey andere „dere D, E, F, aus deren jedem man jene drey ſehen kann, unter ſich und gegen dieſe andere zu beſtimmen" ſo iſt vor allen Dingen zu wiſſen, daß die von Lambert (S. 82) für Cot x angegebene Formel falſch iſt, indem zu jedem Producte, im Zähler und Nenner des dortigen Bruchs, ein Factor fehlt. Das Verſehen hat zuerſt Herr Good (Lamb. d. g. Brfw. 2. B. S. 232–235) entdeckt, und Lambert (Ebendaſ. S. 236) anerkannt, und nun den Zähler des Bruchs noch verkürzt. Doch muß dort (S. 236) ſtatt ſ. b ſ. g (Zeile 9) ſ. 1 ſ. g, und ſtatt ſ. a ſ. e (Zeile 15) ſ. a ſ. c geſetzt werden. Ebendaſelbſt (S. 235, 237–239) kommen Anwendungen auf Rechnung, auch (S. 237, 238) eine Conſtruction vor, mit nützlichen Erinnerungen, wegen der Abweichungswinkel und ihren Richtungen, und wie dieſe zur Probe dienen, daß Rechnung und Conſtruction richtig ſeyen. Beydes würde Herrn Eſchenbachs Bedenklichkeit gehoben haben. Dieſelbe Aufgabe hat auch Herr v. Tempelhof (i. a. B. §. 684, 685), wo die Endformel für Cot x (S. 489) wie die erſte Lambertiſche zu verbeſſern iſt. Eine Erweiterung, „auf vier Oerter A, B, C, D, „durch vier andere; wo alſo die gegenſeitige Lage von acht Punkten zu beſtimmen iſt" (Ebendaſ. §. 693–698; wo S. 513 am Rande, Fig. 64, und in dieſer Figur Tab. III, der Buchſtabe T

beyz

## Von Herrn D. Chladni.

Wittenberg, den 14. Sept. 1794.

Seit der Herausgabe meiner Entdeckungen über die Theorie des Klanges 1787, habe ich verschiedene neue akuſtiſche Untersuchungen angeſtellt, und zum Theil bekannt gemacht. In der Berliner muſikaliſchen Monatsſchrift, Auguſt 1792 findet ſich ein Aufſatz von mir über die Längentöne einer Saite. Ich habe darinnen durch mannichfaltige Verſuche gezeigt, daß dieſe Töne, bey welcher die Saite, oder jeder aliquote Theil derſelben, nach der Richtung der Länge in ſich ſelbſt ſich zuſammenzieht und ausdehnt, auf ganz andern Geſetzen beruhen, als die gewöhnlichen vorher bekannt geweſenen Töne einer Saite, wo dieſe, oder jeder aliquote Theil derſelben, ſich hin und her bewegt. Ferner habe ich auf meiner jetzigen nordiſchen Reiſe, von der ich erſt vor kurzen zurückgekommen bin, drey neue Aufſätze entworfen, der eine enthält, Beobachtungen über die durch Brennen der entzündbaren Luft in einer Röhre hervorzubringenden Töne, die dazu nöthigen Verſuche habe ich bey Herrn Profeſſor Hermbſtädt in Berlin, und bey Herrn Ayke in Danzig, welche ſo gefällig waren, alles dazu erforderliche zu veranſtalten, angeſtellt; es erhellet aus denſelben, daß dieſe Töne nichts anders ſind, als Pfeiffentöne, indem nicht die Röhre, ſondern die darinn enthaltene Luftſäule der klingende Körper iſt, welcher, faſt ſo wie eine Saite bey den vorher erwähnten Längentönen, nach der Richtung der Länge ſich abwechſelnd ausdehnt und zuſammenzieht. Ein zweyter Aufſatz ents

beyzufügen). Das iſt dieſelbe Aufgabe, von der Lambert (in einem nicht mehr vorhandenen Briefe) an Bärmann geſchrieben hat, wie aus des letztern Antwort (L. Brfw. 2. B. S. 230) erhellet. Formeln und Conſtructionen werden ſchon bey acht Oertern ziemlich zuſammengeſetzt. Eine ſchöne und ausführliche Behandlung dieſer ſo intereſſanten Lambertiſchen Aufgabe, nach verſchiedenen dabey angenommenen Vorausſetzungen, hat Mayer (praect. Geom. 2 Th. §. 243, Aufg. V. VI. S. 586-602) aufgeſtellt.

Vermuthlich hat Herr Eſchenbach die Hauptpuncte ſeiner Charte durch Conſtruction geometriſch verzeichnet; denn die oben erwähnte Lambertiſche Formel (von deren Prüfung, ob ſie richtig ſey, er nichts in ſeinem Briefe meldet) würde ihn ſonſt ganz irre geführt haben. Daß er ſich bey der Winkelmeſſung, auf dem ſchwankenden Schiffe, eines katoptriſch-dioptriſchen Werkzeuges, von dem er auch in der Folge ſeines Schreibens ſpricht, bedient habe, iſt für ſich klar. H.

enthält Beyträge zur Beförderung eines beſſern Vortrages der Klanglehre; ich habe darinnen gezeigt, wie mangelhaft dieſer Theil der Naturwiſſenſchaft bisher iſt bearbeitet worden, und ſowohl Vorſchläge, als auch Materialien, zu einer beſſern Bearbeitung geliefert. Es ſollte nämlich die Klanglehre nicht, wie gewöhnlich, bey der Lehre von der Luft abgehandelt werden, denn jeder andere elaſtiſche Körper kann ebenſowohl klingen, oder einen Klang fortleiten, es würde alſo ſchicklicher ſeyn, ſie bey der Lehre von der Elaſticität, oder von den Pendelſchwingungen, oder bey der Lehre von der Bewegung überhaupt, vorzutragen, indem jede mögliche Bewegung entweder fortſchreitend, oder drehend, oder ſchwingend (motus progreſſions, rotatorius, vibratorius) iſt, unter welche letztere Art der Bewegungen jeder Schall und Klang gehört. Ferner hat man, ganz der Natur zuwider, faſt nur auf Saiten Rückſicht genommen, da doch jeder andere klingende Körper mit dem nämlichen Rechte erwähnt zu werden verdient, welches man aber unterlaſſen hat, weil man theils, um ſich die Arbeit leicht zu machen, nicht von allen ſchon vorhanden geweſenen Beobachtungen hat Notiz nehmen wollen, theils auch viele klingende Körper noch nicht gehörig unterſucht geweſen ſind. Ich habe alſo vorgeſchlagen:

I. Die allgemeine Theorie der Schwingungen vorzutragen, ohne Beziehung auf einen beſtimmten klingenden Körper,

II. jede Art der klingenden Körper einzeln abzuhandeln. Dieſe können ſeyn

1) abſolut biegſam, und erſt durch Spannung elaſtiſch
   a) nach einer Richtung ausgedehnt (Saiten)
   b) nach mehrern Richtungen ausgedehnt (Paucken und Trommelfelle)

2) für ſich elaſtiſch
   a) nach einer Richtung ausgedehnt,
      α) gerade (Stäbe)
      β) gekrümmt (Gabeln, Ringe ꝛc.)
   b) nach mehrern Richtungen ausgedehnt
      α) gerade (Scheiben)
      β) gekrümmt (Glocken, Gefäße ꝛc.)

3) bloße Luft, welche in Pfeiffen und Blasinſtrumenten der klingende Körper iſt.

III. Ueber Leitung des Schalles und Klanges durch Luft und durch andere elaſtiſche Körper einiges hinzuzufügen.

Dieſe

Diese beyden Aufsätze habe ich an die Berliner Gesellschaft naturforschender Freunde, um meine Pflicht als Mitglied zu erfüllen, überschickt, sie werden wahrscheinlich bald in deren Schriften eingerückt werden. Ferner habe ich die Geschichte meines Euphons und meiner übrigen akustischen Entdeckungen aufgesetzt, welche auch in einem Journale bald im Druck erscheinen wird. Die Theorie des Euphons selbst, soll erst einmal in der Folge ohne Zurückhaltung bekannt gemacht werden, vorher gedenke ich auch noch viele Versuche, theils zu Erweiterung der Theorie des Euphons im Allgemeinen, theils zu mehrerer praktischer Vervollkommnung desselben anzustellen. Bisher bin ich überhaupt weniger damit zufrieden gewesen, als andere, indem es von meinem Ideale desselben noch zu weit entfernt ist, ich sehe es vorjezt nur als einen hoffnungsvollen Knaben an, der wahrscheinlich erst in Zukunft seine eigentliche Bestimmung erreichen wird.

Anmerkung des Herausgebers. Das Tönen langer und enger Glocken (und Cylinder) vermittelst entzündeter brennbarer Luft, hat schon Herr de Luc (Neue Id. zur Meteor. I Th. §. 200) den Schwingungen der Luft selbst, zugeschrieben. — Was ferner Herrn D. Chladni's Längentöne der Saiten anbetrifft: so ist bereits ein Instrument, das solche Töne giebt, vorhanden, das an Länge der Saiten (320 Fuß) und Dicke derselben (von 1, 1½, 2 Linien) alle andere besaitete längst bekannte Instrumente, welche die Töne durch Lateralschwingungen hervorbringen, bey weitem übertrift — ich meine die, mit den mannichfaltigsten Abwechselungen tönende, vom Pater Ventan (Propst zu Bürckli) erfundene Riesen- oder Wetterharfe des Herrn Hauptmann Haas zu Basel.

---

3. Die für das laufende 1794ste und das künftige 1795ste Jahr, von der Fürstlich Jablonowskischen Societät der Wissenschaften ausgeschriebenen mathematischen und physischen Preisfragen, stehen auf der 3ten und 4ten Seite des Umschlags dieses Heftes.

---

Leipzig,
gedruckt bey Christian Friedrich Solbrig.

# Archiv
der
# reinen und angewandten Mathematik.

Zweytes Heft. 1794.

## I.

## Fortsetzung des Versuchs einer Theorie über die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen; durch J. F. Hennert, Professor der Mathematik zu Utrecht *).

§. 17. Die Geschwindigkeiten nehmen nicht zu von der Oberfläche bis zum Boden, wie zufolge der paraboliſchen Lehre geſchehen müßte. Dieſe Erſcheinung iſt allgemein bey allen Flüſſen, vorzüglich in den tiefen Flüſſen, und wird durch Herrn Brunings Verſuche augenſcheinlich beſtätiget. Daß dieſelbe in den Verſuchen des Michelotti, Zendrini und Lecchi ſtatt habe, iſt leicht zu beweiſen. Wenn man die Parabel, die den Verſuchen des Michelotti entſpricht (§. 9), aus dem erſten und zweiten Verſuche, wo PM = 436,4 Linien, und NQ = 467,4 und PN = 47 ſind, ſucht, wird man den Parameter = 596,1 Linien finden. Hernach findet man die Höhe des Scheitel-

*) Der erſte Theil dieſer Abhandlung ſteht im erſten Hefte, S. 1–12; die hier im Texte angeführten Figuren beziehen ſich auf das Kupfer im erſten Hefte.

telpunkts, oder AB = 304,5, alſo AD = 725,5. Die unterſte Geſchwindigkeit DE iſt $\sqrt{AD \times p}$ = 657,5; dieſelbe iſt aber 631,3 nach den Verſuchen, alſo kleiner. Doch weichen dieſe Verſuche nicht weit von der Parabel ab.

§. 18. Die Verſuche des Zendrini (§. 11) werden unſern Satz beſtätigen. Nimmt man den 6ten und 8ten Verſuch, um den Parameter der Parabel zu beſtimmen, alſo daß PM = 4660 und NQ = 5529 und PN = 21,74 Zolle, ſo findet man den Parameter p = 423580. Doch dieſer Parameter iſt eine unbeſtimmte Größe, weil die Geſchwindigkeiten und die Tiefen ungleichartige Größen ſind. Man kann aber aus dem Parameter die Höhe des Scheitelpunkts oder AB, finden, weil $AB = \frac{BC^2}{p} = \frac{BC^2 \times NP}{NQ^2 - PM^2}$. Nun ſind $BC^2$ und der Theiler $NQ^2 - PM^2$ gleichartige Größen, alſo ſind auch NP und AB gleichartig. Es iſt aber AB = AP — BP = 50,17 — 17,72 = 32,45 Zollen. Nun ſuche man die Geſchwindigkeiten $DE = \sqrt{p.AD}$ für die folgende Tiefen.

| Tiefen | Berechnete Geſchwindigkeit | Beobachtete Geſchwindigkeit. | Unterſchied | Unterſchied der entſprechenden Winkel. |
|---|---|---|---|---|
| 50,34 | 5917 | 5867 | + 50 | + 18′ |
| 61,09 | 6298 | 6795 | + 103 | + 38′ |
| 72,42 | 6665 | 6357 | + 308 | + 2° |
| 83,73 | 7531 | 6515 | + 1016 | + 6° 38′ |
| 95,01 | 7842 | 6672 | + 1170 | + 7° 35′ |

Man findet ſo bis zu $\frac{2}{3}$ der Tiefe eine gute Uebereinſtimmung mit der Parabel, weil die Unterſchiede der beobachteten und berechneten Abweichungswinkel nur 18′ und

und 38′ betragen. Die Beobachter ſcheinen ſelbſt nicht die Winkel in Minuten, nur in Graden, gemeſſen zu haben. Aber gegen den Boden des Fluſſes nehmen die Geſchwindigkeiten allmählig und beträchtlich ab.

Die Verſuche des Zendrini (§. 13) beſtätigen augenſcheinlich die Verminderung der Geſchwindigkeiten gegen den Boden des Fluſſes.

§. 19. Auch die Beobachtungen des Lecchi (§. 14) beſtätigen die allmählige Verminderung des Waſſers in der Tiefe. Nimmt man NQ = 7908 und PM = 6672 und PN = 6 Oncen (wegen der Oncen, §. 14) ſo findet man für den Parameter die unbeſtimmte Größe p = 3003480, und die Höhe AB = 14,85 — 8 = 6,85 Oncen.

Sucht man nun die Geſchwindigkeit in der Tiefe 20 Oncen; ſo wird dieſelbe = √26,85 p. = 8980, welche dem Abweichungswinkel 38° 52′ entſpricht. Zufolge der Beobachtung war nur dieſe Geſchwindigkeit = 8524, und der Abweichungswinkel 36 Gr.

In der Tiefe von 26 Oncen, wird die Geſchwindigkeit = 9933 und der Abweichungswinkel = 44° 36′ gefunden. Aber der Verſuch gab die Geſchwindigkeit = 9161, und den Winkel = 40 Gr.

§. 20. Die Verminderung der Geſchwindigkeit eines Fluſſes gegen den Boden entſpringt aus derſelben Urſache, welche die Verminderung der Waſſermenge aus den Oeffnungen hervorbringt (Leipz. Mag. der Natk. und Math. 2ten Bandes 2tes Stück (1782) S. 180).

Das unterſte Waſſer, welches auf den Boden läuft, muß durch den Boden, er mag rauh oder eben ſeyn, in ſeiner Bewegung verzögert werden. Weil nun die unterſte Schicht Waſſer verzögert wird, muß dieſelbe wegen der Cohäſion des Waſſers, ihre Verzögerung der erſten nächſten und obern, und dieſe der zweyten und ſo fort mittheilen; dieſe Mittheilung der Retardation muß ab-

nehmen, vom Boden bis zur Oberfläche, oder vielmehr bis zu einer gewiſſen Höhe, wo die Retardation phyſice unbeträchtlich iſt. Wir müſſen alſo zwey Sachen hierbey unterſuchen, einmal das Geſetz der Verzögerung; zweytens die Höhe des Waſſers, wo dieſe Verzögerung der Geſchwindigkeit unmerklich iſt.

Die Verminderung der Geſchwindigkeit ſcheint ohngefähr in einer arithmetiſchen Progreſſion der Waſſerhöhen zu folgen. Es ſey DE = der aus (Fig. 4) der Parabel hergeleiteten Geſchwindigkeit am Boden, und DL die beobachtete Geſchwindigkeit, folglich LE = der Verzögerung. Es ſey ST = RD = der Höhe, wo die Verzögerung der Geſchwindigkeit verſchwindet. Man ziehe die Seiten SL, SE des Dreyecks LSE, deſſen Inhalt der Summe der Verzögerungen der Geſchwindigkeiten, und folglich die verlangte Correction der paraboliſchen Fläche BCDE beſtimmt. Die parallele Linien ef, cd, ab, bezeichnen die Verminderungen der Geſchwindigkeiten OM, IK, GH, dergeſtalt, daß ef = der berechneten Geſchwindigkeit OM — der beobachteten. Es müßte alſo ſeyn ST: LE = Sg: ab = Sh: cd; etc oder, die Tiefen unter dem Punkt S, wo die Verminderung der Geſchwindigkeit ſehr klein iſt, verhalten ſich wie die Verminderungen der Geſchwindigkeiten.

§. 21. Wie beſtimmt man nun die Höhe ST? da, wo die Geſchwindigkeiten, nach der Parabel, unmerklich von den beobachteten anfangen abzuweichen. Wenn man nach der Parabel, die den erſtern Beobachtungen des Herrn Brunings entſpricht (§. 16), die Geſchwindigkeiten ſucht, wird man finden, daß die Geſchwindigkeit in der Tiefe von 24 Zollen = 37,704, die beobachtete war 37,727 Zollen, alſo hier noch kein merklicher Unterſchied.

In der Tiefe von 30 Zollen müßte die Geſchwindigkeit = 38,565 ſeyn, ſie iſt aber 38,135; der Unterſchied

ſchied iſt noch klein. Aber in der Tiefe von 36 Zollen müßte die Geſchwindigkeit = 39,407 ſeyn, ſie iſt aber nur = 37,557; der Unterſchied 1,85 Zoll iſt ſchon etwas beträchtlich. Man könnte alſo die Höhe ST = RD = BD — BR = 90 — 36 = 54 Zoll nehmen. Weil aber die Geſchwindigkeit ſchon über der Tiefe von 54 Zollen abgenommen hat, könnte man ST = 58 Zolle nehmen. Aber die unterſte Geſchwindigkeit DE müßte = $\sqrt{p.AD}$ = 46,298 ſeyn; ſie war nur 33,217, alſo LE = DE — 33,217 = 13,081. Alſo iſt die Correction oder das Dreyeck LSE = $\frac{1}{2}$ ST × LE = 29 × 13,081 = 379,349. Nun war die paraboliſche Fläche = 3641,098 (§. 16). Alſo die verbeſſerte Fläche = 3641,098 — 379,349 = 3267,749, welche durch die Höhe BD = 90 dividirt, giebt 36,241 für die mittlere Geſchwindigkeit, welche nach der genauern Methode = 35,978; alſo iſt jene um 0,263 größer, welches auch ſeyn muß. Denn in der erſten Methode wurde die Fläche als geradelinicht, nun aber als krummlinicht angenommen.

§. 22. Ehe ich dieſe Theorie auf andere Verſuche anwende, werde ich das angenommene Geſetz der Verminderung der Geſchwindigkeiten durch Beobachtungen nahe genug der Wahrheit beſtätigen.

Man ſuche alſo, nach der paraboliſchen Theorie die Geſchwindigkeiten in den Tiefen von 36, 42, 48 Zollen u. ſ. w. Man nehme die Unterſchiede zwiſchen den berechneten und beobachteten Geſchwindigkeiten; dieſe Differenzen müſſen den Linien ab, cd, ef ohngefähr gleich ſeyn. Z. B. Für die Tiefe 36 Zoll; iſt sg = 36 — 32 = 4 Zolle, weil wir ST = 54 Zolle angenommen haben, alſo iſt ST : LE = Sg : ab oder 58 : 13,081 = 4 : 0,909.

Nun iſt die Geſchwindigkeit in der Tiefe von 36 Zoll = 39,407, und die beobachtete = 37,557, alſo die

Verminderung der Geschwindigkeit = 1,850; nach der Voraussetzung war sie = 0,909, also nur um 0,941 größer. Auf diese Art habe ich folgende Tabelle berechnet:

| Tiefen Sg, Sh | Parabol. Geschwindigk. | Beobachtete Geschwindigk. | Verminderungen der Geschwindigk. | Beobachtete Verminderung | Unterschied. |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 39,407 | 37,557 | 1,850 | 0,909 | + 0,941 |
| 10 | 40,231 | 37,473 | 2,759 | 2,269 | + 0,489 |
| 16 | 41,040 | 37,387 | 3,653 | 3,606 | + 0,047 |
| 22 | 41,832 | 36,797 | 5,035 | 4,962 | + 0,073 |
| 28 | 42,610 | 35,152 | 7,458 | 6,316 | + 1,142 |
| 34 | 43,385 | 34,525 | 8,860 | 7,670 | + 1,190 |
| 40 | 44,124 | 33,981 | 10,143 | 9,021 | + 1,122 |
| 46 | 45,862 | 33,791 | 11,071 | 10,376 | + 0,695 |
| 52 | 47,798 | 33,697 | 11,891 | 11,733 | + 0,158 |

Die erste Colonne zeigt die Tiefen unter dem Punkt S, wo die Verminderung der Geschwindigkeit nicht merklich ist. Die zweyte Colonne enthält die Geschwindigkeiten nach der gefundenen Parabel berechnet u. s. w. Die letzte Colonne zeigt die Abweichung des angenommenen Gesetzes der verminderten Geschwindigkeiten an; aus dieser Colonne kann man von der Richtigkeit dieses Gesetzes urtheilen.

§. 23. Weil die Beobachtungen des Michelotti nicht merklich von der Parabel abweichen, braucht man nicht die Correction anzuwenden (§. 17). Man findet aber die parabolische Fläche ADE = $\frac{2}{3}$. 477016,4, die Fläche ABC = $\frac{2}{3}$. 129730, also die Fläche BCED = 231524,16, welche mit der Tiefe BD = 421 dividirt, die mittlere Geschwindigkeit = 550 giebt ohngefähr, wie dieselbe (§. 9) bestimmt war.

§. 24. Der Parameter, der den Beobachtungen des Zendrini (§. 18) entspricht, war = 423580, die Höhe des

des Scheitelpunkts AB = 32,45 Zoll, die Axis AD = 127,46; die unterſte Geſchwindigkeit DE = 7842, folglich die Parabel BCED = $\frac{2}{3}$(999541,32 — 1203171) = 586149. Die Höhe ST, wo die Verminderung der Geſchwindigkeit wirklich aufhört, fällt zwiſchen den Tiefen, 61 und 72 Zollen. Man kann alſo die Höhe ST bey der Tiefe von 65 Zollen annehmen, eine gröſſere oder kleinere Höhe hat keinen merklichen Einfluß auf die mittlere Geſchwindigkeit. Alſo ST = 95,01 — 65 = 30. Nun iſt LE = 7842 — 6672 = 1170, alſo ΔLSE = 17550, folglich iſt die verbeſſerte Fläche = 586149 — 17550 = 568599, welche durch 95,01 dividirt, wird die mittlere Geſchwindigkeit 5963 gefunden, für den Abweichungswinkel von 19° 34′; dieſer war nach der genauern Methode = 19° 13′, und die mittlere Geſchwindigkeit = 5906, alſo etwas kleiner (§. 12).

§. 25. In dem zweyten Verſuche des Zendrini (§. 13) wird der (Fig. 3 und 4) Parameter = 7453 gefunden, wenn man NQ = 570 und MP = 499, alſo PN = 10,41 ſetzt. Man findet die Höhe AP = 34,94, alſo die Fläche PMED = ADE — APM = 16646. Die Geſchwindigkeit fängt ſchon an ſich merklich zu vermindern, zwiſchen den Tiefen von 38 und 43; denn die Geſchwindigkeit in der Tiefe von 43,65 müßte ſeyn = 637, und ſie iſt nur 603, alſo kann man ST bey 40 ohngefähr annehmen, alſo daß ST = 50,07 — 40 = 10,07. Die unterſte Geſchwindigkeit müßte = 672 = DE ſeyn, ſie iſt aber nur DL = 586, alſo LE = 86, alſo das Dreyeck LSE = 433, folglich die verbeſſerte Fläche = 16213, welche durch die Tiefe PD = 50,07 — 21,86 = 28,21 getheilt, wird die mittlere Geſchwindigkeit = 574, die zufolge der ſchärfern Methode = 561 war.

§. 26. Endlich geben die Verſuche des Lecchi, die Fläche PMED = 151416. Weil die Geſchwindigkeiten in der Tiefe von 20 Oncen ſchon merklich abnehmen (§. 19), ſo kann man die Höhe ST bey der Tiefe von 17 Oncen annehmen, alſo ST = 9 Oncen. Aber DE = 9933 — 9161 = 772, alſo das Dreyeck LSE = 3478, folglich die verbeſſerte Fläche = 151416 — 3478 = 147938, welche durch die Tiefe PD = 26 — 8 = 18 getheilt, wird die mittlere Geſchwindigkeit = 8219 gefunden; dieſe aber war = 8136 (§. 14).

§. 27. Zum Beſchluß muß ich über den Gebrauch dieſer Methoden handeln.

1) Wenn man in einem nicht zu tiefen Fluße von Fuß zu Fuß viele Verſuche machen kann, ſo kann man ſich mit der gemeinen Methode begnügen, welche in §. 3 beſchrieben iſt.

2) Man braucht nicht unter gleichen Tiefen die Verſuche anzuſtellen, wenn man ſich der erwähnten Methode bedienen will. Im Gegentheil wäre es leichter und vielleicht richtiger, wenn man die Verſuche in ungleichen Tiefen anſtellt, wie es die Gelegenheit giebt. Will man aber das Werkzeug unter gleichen Tiefen ſetzen, ſo iſt dieſes nicht allein mühſamer, ſondern der Verſuch könnte auch nicht richtig ausfallen, wenn man das Werkzeug genau auf eine gewiſſe Tiefe ſetzen wollte.

3) Wenn man aber nicht viele Verſuche machen kann, ſo iſt die vorgetragene Theorie vortheilhaft. Man braucht nur vier oder fünf Verſuche zu machen. Man mißt die Geſchwindigkeiten an der Oberfläche des Waſſers, und in einer gewiſſen Tiefe, mit Rückſicht auf die Tiefe des Fluſſes. Oder man mißt in zween Tiefen, davon die eine nicht viel unter der Oberfläche liegt, die Geſchwindigkeiten, um den Parameter der Parabel und den

Flä-

Flächeninhalt nach dem 15 §. zu beſtimmen. Ferner mißt man in einer dritten Tiefe die Geſchwindigkeit; dieſe Geſchwindigkeit vergleicht man mit der paraboliſchen, um zu ſehen, wo man wegen der Abweichung dieſer Geſchwindigkeiten die Höhe ST annehmen muß, wo die Verminderung der Geſchwindigkeit unmerklich iſt. Beſſer wäre es, wenn, zu einer genauern Beſtimmung dieſer Höhe ST, man in zweien Tieffen die Geſchwindigkeiten beobachten könnte. — Endlich muß man die Geſchwindigkeit bey dem Boden des Fluſſes meſſen, um die Grundlinie des Dreyecks, LE zu wiſſen, und zufolge des (21 §.) die nöthige Verbeſſerung zu machen. Wäre der Fluß zu tief, um mit dem Werkzeug bis zum Boden zu reichen, müßte man daſſelbe ſo tief untertauchen, als es ſich thun läßt.

4) Man muß die mittlern Geſchwindigkeiten in dreyen Oertern des Querſchnitts beſtimmen, eine in der Mitte, oder wo der ſchnellſte Lauf des Waſſers fällt, und zwo nicht weit von den Ufern.

5) Man nimmt das Mittel dieſer drey mittlern Geſchwindigkeiten um die mittlere Geſchwindigkeit des Querſchnitts zu beſtimmen.

6) Man muß dieſe mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers mit der Fläche des Querſchnitts multipliciren, um die Waſſermenge zu kennen, nicht aber, wie Lecchi meynt, die mittlere Geſchwindigkeit mit der Breite des Querſchnitts, und mit der mittlern Tiefe, die aus den dreyen Meſſungen abgeleitet iſt. Das könnte in regulären Flüſſen, deren Boden nicht ſehr ungleich wäre, zugelaſſen werden. Aber gewiß nicht in vielen holländiſchen Waſſern. Ich will dieſes mit einigen Verſuchen beſtätigen, die man in dem breiten Waſſer gemacht hat, das vor Amſterdam tief ins Land geht, wo ſich der Fluß Amſtel ergießt, und

das Ye genannt wird. Ich habe dieselben aus dem Project om den Stroom van het oostelyke *Ye* meer diepte te winnen. Leiden 1778 entlehnt. Die Messungen der Durchschnitte sind in den Jahren 1776 und 77 gemacht. Die Querschnitte sind in einem Abstande von 1200 Ruthen, von 50 zu 50 Ruthen, gemessen, und zwar hat man die Tiefen des Querschnitts in gleichen Entfernungen von 25 Ruthen bestimmt. In einem Querschnitte fand man, in der Entfernung von 25 Ruthen vom Ufer, die Tiefe 7 Fuß 8 Zoll, in gleichen Entfernungen, 14 Fuß 3 Zoll, und 51 Fuß 8 Zoll, und 35 Fuß, und 16 Fuß; endlich 16 Fuß 3 Zoll in der Entfernung von 30 Ruthen vom Ufer. Die Breite des Querschnitts war also $25 \times 6 + 30 = 180$ Ruthen. Zufolge der Methode des Lecchi, nimmt man drey Tiefen, zwey bey den Ufern und eine in der Mitte, diese waren also 7 Fuß 8 Zoll + 51 Fuß 8 Zoll + 16 Fuß 3 Zoll, also die mittlere Tiefe = 25 Fuß $2\frac{1}{3}$ Zoll, mit welcher die Breite 180 Ruthen multiplicirt, giebt 54420 Quadratschuhe für den Inhalt des Querschnitts.

Wenn man aber den Inhalt des Querschnitts zufolge des 4. §s sucht, so bezeichne die Linie AH die Breite des Querschnitts (Fig. 5), Bb = 7, 8 = der ersten Tiefe, Cc = 14, 3, Dd = 51, 8, Ee = 35, Ff = 16, und Gg = 16, 3. Nun sind die Entfernungen BC, CD, etc gleich und = 25 R. = 300 Schuhen, also ist der Inhalt der Figur BbdfgG = 300 × 129 = 38700 Quadratschuhen. Zu dieser muß man die Rectangula ABba, GghH bey den Ufern fügen. Es ist aber AB = 300 Schuhen und Aa = 7 F. 8 Z., also AabB = 2300. Ferner ist GH = 30 R. = 360 F. und Hh = $16\frac{1}{4}$ Fuß, also GHhg = 5850. Also ist der ganze Querschnitt = 46850 Quadraschuhe, welcher um $52\frac{1}{2}$ Quadratruthen weniger als der Inhalt nach der Methode des Lecchi.

Ich

Ich will noch ein Beyſpiel beybringen. In einem Abſtand von ohngefähr 250 Ruthen vom vorigen Durchſchnitt hat man folgende Meſſungen gemacht. Nahe beym Ufer war die Tiefe Bb = 6,7, und Cc = $19\frac{1}{2}$, und Dd = 50,7, und Ee = 58,7, und Ff = $11\frac{2}{3}$, und Gg = $4\frac{1}{8}$, aber GH = 25 Ruthen. Nimmt man alſo nach der Lecchiſchen Methode, unter den dreyen Tiefen 6,7 + 58,7 + $4\frac{1}{8}$ die mittlere = $23\frac{1}{12}$ Fuß, und multiplicirt dieſelbe mit der Breite BH = 6 × 25 Ruthen = 1800 Schuhe, ſo bekommt man 41550 Quadratſchuhe für den Querſchnitt. — Aber nach der genauern Methode findet man den Inhalt der Figur Bbdg G = 300 × 145, $\frac{1}{8}$ = 43550; hierzu kommt noch das Rectangel GghH = 300 × $4\frac{1}{8}$ = 1250, alſo der Queerſchnitt = 44800. Zufolge der Lecchiſchen Methode verhalten ſich dieſe beyden Querſchnitte wie 5442: 4155 = 27: 20, aber zufolge der genauern Methode ſind dieſe Durchſchnitte faſt gleich. Hieraus erhellet zur Genüge, wie man in der Vergleichung der Waſſermengen irren kann, wenn man die Rechnungen nicht nach genauern Methoden macht.

7) Endlich muß ich noch bemerken, daß man die Meſſungen der Querſchnitte und der Geſchwindigkeiten in zweien Flüſſen unter gleichen Umſtänden unternehmen muß, entweder in ihren höchſten oder niedrigſten Waſſerſtänden.

§. 28. Wenn die Beobachtungen des Mariotte und Pitot in Rückſicht des Laufes nicht tiefer und durch mancherley Hinderniſſe verzögerter Flüſſe ſtatt finden: ſo könnte man ſich nicht unſrer paraboliſchen Methode bedienen, ſondern vielmehr der Regeln und Formeln die im 3 und 4 §. gegeben ſind. Mariotte hat nämlich im zweiten Theile ſeines Traité du mouvement des eaux, pag. 404, 405) durch Beobachtungen erfahren, daß in gewiſſen

ſen Flüſſen, die Geſchwindigkeit in der Oberfläche die gröſste ſey, und die Geſchwindigkeiten allmählig gegen dem Boden abnehmen. Daſſelbe hat auch Pitot mit ſeinem bekannten Werkzeuge in der Seine bey dem Pont-neuf in Paris beobachtet. Er fand z. E. die Geſchwindigkeit in der Oberfläche 4 Fuß 3 Zoll, in der Tiefe eines Fußes nur 4 Schuhe, in der Tiefe zwoer Füße, nur 3 Fuß 9 Zoll, in der Tiefe von 3 Füßen, nur $3\frac{1}{2}$ Fuß. In nicht tiefen Gewäſſern, wo die Geſchwindigkeit in der Oberfläche ſehr ſchnell iſt, fand er das Waſſer am Boden faſt ſtilleſtehend. (Memoires de l'Academie de Paris de l'année 1732, pag. 512 und folgende. Amſterd. Ausg.). Aus dieſem Beyſpiel erhellt ohne meine Erinnerung, warum man in ſolchen Fällen die paraboliſche Theorie nicht anwenden kann. Man müſste zwey Geſchwindigkeiten, wie BC, PM (Fig. 3) gebrauchen, wovon PM gröſser als BC wäre, um den Parameter der Parabel zu beſtimmen. Nun aber iſt PM kleiner als BC, und zufolge des 4ten §s wird die mittlere Geſchwindigkeit = 3 Schuh $10\frac{1}{2}$ Zoll gefunden.

---

## II.

## Ueber eine beſondere Methode, die Polhöhen zu finden, von Herrn Beitler, Profeſſor der Mathem. in Mietau *).

Nachdem ich bereits durch mehr als 2300 ausgeſuchte und auf verſchiedenen Wegen angeſtellte Beobachtungen, die Polhöhe der mir anvertrauten Sternwarte zu Mietau dergeſtalt beſtimmt hatte, daß ich ſie mit aller Genauigkeit auf 56° 39′ u. 6 bis 7″ feſtgeſetzt glauben konnte, ſo ließen mir dem ungeachtet die Ungleichheiten der Eintheilung meines Quadranten noch die Muthmaßung übrig, dieſe Beſtimmung möchte einem Fehler von 2 bis 3 Secunden unterworfen ſeyn. Deswegen war ich neugierig, noch eine Methode zu verſuchen, welche keinesweges, weder von der Genauigkeit der Eintheilungen des Limbus und des Vernier, noch von der Strahlenbrechung, noch von dem Fehler des Quadranten, noch von den Ungleichheiten der Schrauben, des innern ſowohl als des äußern Mikrometers, abhienge. Noch iſt beyzufügen, daß ich Ungleichheiten, beſonders in der Eintheilung des Bogens, welcher über den 90ſten Grad gehet, bemerkt hatte, und von dieſem Bogen hatte ich im Anfange meiner Beobachtungen, im Jahr 1783, Gebrauch gemacht, um durch die Methode des Umwendens den Fehler des Inſtruments zu beſtimmen. Da nun die beſagte Methode genaue Eintheilungen des Limbus auf beyden Seiten der Verticallinie vorausſetzt, ſo kann ſie nicht dienen, wenn man eine Unrichtigkeit dieſer Eintheilungen muthmaßet, und noch weni-

*) Aus einem franzöſiſchen Schreiben deſſelben an Herrn Bernoulli in Berlin, vom 7ten Jul. 1790 überſetzt.

weniger, wenn man derselben gewiß ist. Einen großen Nutzen gewähret demnach eine Methode, welche zu gleicher Zeit dienet, die Polhöhe, und auch den Fehler des Instruments bey dem Eintheilungspunkt zu bestimmen, auf welchen die Beobachtung Bezug hat.

Die Auflösung dieser Aufgabe, der XVIIten in Maupertuis Astronomie nautique, ist bekannt genug. Herr Hofr. Kästner liefert sie in seinen astronomischen Abhandlungen, 1ste Sammlung, S. 419, und Herr Prof. Hennert in Herrn Bode's astronom. Jahrbuch, auf das Jahr 1787, a. d. 151 S. u. f. Indessen dünkt mich, daß die Astronomen von dieser Methode nicht so viel, als sie mir zu verdienen scheinet, Gebrauch machen, und daß man auch nicht alle Vortheile, die sie darbietet, eingesehen hat. Allerdings ist es etwas langweilig, 4, 5 und mehrere Stunden aufzupassen, um correspondirende Höhen zu erhaschen, wobey man noch Gefahr läuft, sie wegen einer Wolke zu verfehlen, oder wegen einer in der Zwischenzeit vorgefallenen Veränderung der Strahlenbrechung, nicht mit Zuverläßigkeit benutzen zu können. Ueberdies sind die Stundenwinkel bey den Astronomen insgemein etwas verschrieen, weil man sie nicht anders, als mittelst einer Uhr, messen kann. Diese Betrachtungen sind nun zwar gegründet, wenn man ohne Wahl die ersten besten Sterne, die sich darstellen, benutzen will. Allein die aus nachfolgenden Berechnungen gezogenen Schlüsse haben mich dennoch veranlaßt, diese Methode jeder andern vorzuziehen, wenn man Höhen zu nehmen kein anderes Werkzeug hat, als einen englischen Quadranten mit beweglichem Fernrohr, und dessen Eintheilungen etwas ungleich sind.

Es seyen hier A und a die Abweichungen vom Aequator, H und h die Stundenwinkel von 2 Sternen, von denen der eine an dem südlichen Theil, und der an-

andere an dem nördlichen Theil des Mittagskreises, vom Zenith an gerechnet, culminiret. Ich nehme an, daß die gröſsern Buchſtaben A und H ſich auf den letztern beziehen, nämlich auf denjenigen von beyden Sternen, deſſen Abweichung die gröſste iſt, und alſo die kleinern Buchſtaben a und h auf den erſtern Stern, der eine kleinere Declination hat. Dieſe beyden Sterne ſeyen in einer unbekannten Höhe = x beobachtet worden, und man habe die Zeiten der Beobachtungen mittelſt einer Pendeluhr beſtimmt, von der ich, um mehr Bequemlichkeit willen, vorausſetze, daß ſie genau die Sternzeit zeige. Es ſey endlich die ebenfalls unbekannte Polhöhe = p: ſo erhält man,

$$\text{tang } p = \frac{\cos h.\ \text{cof. a}\left(1 - \frac{\cos. H \cos A}{\cos. h \cos a}\right)}{2 \text{ ſin.}\left(\frac{A-a}{2}\right) \cos.\left(\frac{A+a}{2}\right)} \text{ und}$$

$$\text{ſin } x = (\cos H \cot A \cot p + 1) \text{ ſin A ſin p,}$$
$$= (\cos h \cot a \cot p + 1) \text{ ſin. a ſin. p.}$$

welche Formeln mit Hülfe der Logarithmen leicht können berechnet werden.

Setzt man $\cos H = 1$, und $\cos h = 1$, ſo findet man

$$\text{tang } p = \frac{\cos a - \cos A}{\text{ſin A} - \text{ſin a}} = \text{tang}\left(\frac{A+a}{2}\right), \text{ oder}$$

$p = \frac{A+a}{2}$, welches der einfachſte Fall iſt, und uns auf die von Zell empfohlne Methode zurückführet.

## Beyſpiel:

Am 11ten October 1787 fand ich durch correſpondirende Sonnenhöhen, daß meine Pendeluhr von Shelton, welche

welche genau den Gang der Sternzeit hielt, dem Puncte der Nachtgleiche um 2″,55 vorgieng. Am Abend desselben Tages legte ich den Tubus meines Quadranten an den Eintheilungspunkt, welcher 76° 55′ 0″ Höhe zeigt, und beobachtete am Horizontalfaden des Fernrohrs die Sterne δ Cygni und ε Draconis in folgenden Zeittheilen:

| | | |
|---|---|---|
| δ. Cygni | | 19 St. 2′ 48″ der Uhr |
| ε. Draconis | | — 23 29 10 |
| ε. Draconis | | 20 8 36 |
| δ. Cygni | | — 14 1 |

Nun war an diesem Tage

$A = 69° 44′ 10″,54$ und $a = 44° 37′ 35′,65$ folglich

$\frac{A-a}{2} = 12° 33′ 17″,45$ und $\frac{A+a}{2} = 57° 10′ 53′,10$

und aus der Beobachtung ergiebt sich

$H = 19′ 43″$ in Zeit, oder $4° 55′ 45″$ in Theilen des Kreises

$h = 35\ 36,5 \quad 8\ 54\ 7,5$

Daher wird bey Anwendung unserer Formeln

| | |
|---|---|
| 20 + log. cos. A. cos. H | = 39, 5378961 |
| log. cos. a. cos. h | = 19, 8470339 |
| Rest | = 19, 6908622 |

Dieser Rest sey = log. cos. $y^2$, so wird

| | |
|---|---|
| log. cos. y | = 9, 8454311 = |
| log. cos. 45° 31′ 47″,62 | |
| Ferner 2 log. sin. y | = 19, 7069292 |
| log. cos. a. cos. h | = 19, 8470339 |
| compl. Log. Denominatoris | = 0, 6277783 |
| log. tang. p | = 10, 1817414 |

Demnach die Polhöhe $p = 56° 39′ 11″,2$.

Berech-

## Berechnung der Höhe.

| Für ε Draconis | Für δ Cygni |
|---|---|
| l.cot.p.cot.A.cos.H = 19,3839017 | l.cot.p.cot.a.cos.h = 19,8186567 |
| Dieser sey = l. tang. $y^2$ | Dieser sey = l. tang. $z^2$ |
| so ist log. tang y = 9,6915508 | so ist, log. tang. z = 9,9093283 |
| y = 26° 11′ 47″,18 | z = 39° 3′ 42″, 83 |
| 2 log. sec. y = 20,0941384 | 2 log. sec. z = 20,2197554 |
| log. sin p = 9,9218726 | log. sin. p = 9,9218726 |
| log. sin. A = 9,9722530 | log. sin. a = 9,8466359 |
| log. sin. x = 9,9882640 | log. sin. x = 9,9882639 |

Folglich die wahre Höhe der Sterne,

oder x = 76° 44′ 23″,5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Die Strahlenbrechung war | = | | | 13, 9 |
| Scheinbare Höhe der Sterne | = | 76 | 44 | 37, 4 |
| Allein der Quadrant zeigte | = | 76 | 55 | 0, 0 |
| der Unterschied | + | | 10 | 22, 6 |

Ist demnach der Fehler des Instruments bey dem in der Beobachtung gebrauchten Punkte der Eintheilung *).

Nun giebt uns der Differenzialcalcul folgende Verhältnisse zwischen den Fehlern in den Stundenwinkeln und denjenigen, die daraus in der Polhöhe und in der Höhe der Sterne entstehen:

I. dp

*) Beyläufig zeige ich hier an, daß eben diese Beobachtung mit einen Fehler in Ansehung der asc. rect. ε Draconis in dem bey der Astronomie des Herrn de la Lande befindlichen Sternverzeichniß entdeckt hat. Denn zufolge der Beobachtung des δ Cygni, dessen scheinbare asc. recta an diesem Tage = 19 St. 38′ 21″,48 war, gieng die Uhr dem Aequinoctium 3″,0 vor, also nur 0″,45 mehr als die aus den correspondirenden Sonnenhöhen geschlossene Zahl 2″,55. Demnach hätte ε Drac. dessen Rectasc. nach demselben Sternverzeichniß = 19 St. 49′ 18″,6 ist, um 19 U. 49′ 21″ 6 culminiren sollen; allein dieser Stern war am Mittagskreise um 19 U. 48′. 53″,0, welches einen Unterschied von 28″,6 in Zeittheilen ausmacht.

$$\text{I. } dp = \frac{+\cos A . \sin H . \cos . p^2}{2 \sin\left(\frac{A-a}{2}\right) \cos.\left(\frac{A+a}{2}\right) r^2} dH.$$

$$\text{II. } dp = \frac{-\cos . a \sin . h . \cos . p^2}{2 \sin\left(\frac{A-a}{2}\right) \cos.\left(\frac{A+a}{2}\right) r^2} dh.$$

$$\text{III. } dx = \frac{-\cos A . \sin . H . \cos . p}{\cos . x . r^2} dH.$$

$$\text{IV. } dx = \frac{-\cos . a . \sin . h . \cos . p}{\cos . x . r^2} d h.$$

Ferner ist jetzt zu bedenken: 1stens: daß, wenn man (wie man bey dem gegenwärtigen Zustande der Sternkunde thun darf) die Genauigkeit der Sonnentafeln und der in den Sternverzeichnissen befindlichen Rectascensionen voraussetzt, und nur ungefähr die geographische Länge der Sternwarte kennt*) man sich mit einer einzigen Beobachtung von jedem der beyden Sterne begnügen, und demnach unterlassen kann, die Stundenwinkel durch zwey correspondirende Beobachtungen zu bestimmen; indem man nur braucht die Zeit des Mittages zu kennen, wenn man sich anders auf den regelmäßigen Gang der Uhr, in der Zwischenzeit der beyden Beobachtungen verlassen darf. — 2tens: daß es vortheilhaft ist, die beyden Sterne so nahe als möglich bey dem Mittagskreise zu beobachten. — 3tens: daß wegen des Factors $\sin\left(\frac{A-a}{2}\right)$ in dem Nenner, die Sterne so weit als möglich in der Abweichung von einander entfernet müssen gewählt werden.

*) Z. B. durch eine Sonnenfinsterniß, oder eine Verfinsterung des ersten Jupitersträbanten, oder eine mit den Tafeln verglichene Bedeckung eines Sternes vom Monde.

den. — 4tens.: daß die Fehler in der Polhöhe und in der Höhe der Sterne desto kleiner werden, je gröſser die Abweichungen sind *). — 5tens: daß wegen des Faktors cos. $p^2$ diese Methode mit desto gröſserm Vortheil kann angewandt werden, je gröſser die geographische Breite der Sternwarte ist. — 6tens: Endlich, daß wenn man die Zeit des Mittages nicht mit der äuſsersten Schärfe kennt, die beyden Sterne auf der nämlichen Seite des Mittagskreises müssen beobachtet werden, weil alsdann die aus dem besagten Umstande entspringende Fehler zum Theil wenigstens einander aufheben. Eben diese Fehler würden sich aufhäufen, wenn man den einen Stern im Steigen und den andern im Neigen beobachtete.

Nach diesen Grundsätzen machte ich im October 1787 für 4 verschiedene Puncte des Limbus meines Quadranten 44 Beobachtungen. Die Stundenwinkel für die Zeiten der Beobachtungen zu finden, bediente ich mich nur des durch correspondirende Sonnenhöhen an meiner vortreflichen **Sheltonschen** Pendeluhr bestimmten wahren Mittages, der **Mayerschen Sonnentafeln** und der Sternverzeichnisse von **la Caille** und **Bradley**, ohne mir die Mühe zu geben, diese Winkel durch correspondirende Sternhöhen zu suchen. Das Mittel von allen Resultaten war für die **Polhöhe von Mietau** = 56° 39′ 7″,5, und der Fehler des Instruments an den besagten 4 Puncten = 10′ 18″,9. Nur



*) Hr. Prof. Hennert sagt zwar das Gegentheil in dem Berliner astronom. Jahrbuch aufs Jahr 1787. S. 153; allein seine Absicht war, den Fehler zu erforschen, welcher in der Polhöhe entstehet, wann die in dem Sternverzeichniß angegebenen Abweichungen vom Aequator fehlerhaft sind. Auſserdem ist die Methode, die dieser berühmte Gelehrte vorschlägt, von der obgedachten verschieden, indem er Sterne wählet, die in der Abweichung nur wenig von einander entfernt sind; welches jedoch, meines Erachtens, nie eine hinreichende Genauigkeit in den gesuchten Gröſsen gewähren kann.

zwey Resultate wichen in Absicht der Polhöhe etwas stark von jener Mittelzahl ab: das eine gab 56° 38′ 59″,8, das andere 56° 39′ 15″,0; und dazu waren die zwey Beobachtungen, aus welchen ich sie gezogen hatte, wegen einer kleinen Deviation des Senkbleyes, als zweifelhaft angemerkt.

Es ist sogar nicht durchaus nothwendig, daß die Sonnentafeln die äußerste Genauigkeit haben; auch nicht, daß man die Zeit des wahren Mittages an der Uhr mit astronomischer Schärfe wisse; endlich eben so wenig, daß die Uhr von der Zeit an, der bey Tage genommenen correspondirenden Sonnenhöhen bis zur Zeit der des Nachts angestellten Beobachtungen der Sterne, einen ganz gleichförmigen Gang behalten habe; wenn nur der eigentliche Gang der Uhr gut bekannt ist, und in der Zwischenzeit der zwey letzten Beobachtungen sich nicht geändert hat. Die Formeln I. und II. zeigen uns an, daß wenn man die Fehler der Stundenwinkel für die beyden Sterne, nördlich und südlich vom Zenith an, oder dH und d h als gleich annimmt, alsdann die für die Polhöhe daraus entstehenden Fehler ebenfalls gleich sind, nur mit entgegen gesetzten Zeichen; vorausgesetzt, man habe jeden der beiden Sterne auf derselben (entweder östlichen oder westlichen) Seite des Meridians beobachtet, wann

V. cos. A. sin. H. = cos. a. sin. h.

Die Ursache dieses wechselseitigen Aufhebens entdeckt sich sogleich, wenn man einen Blick auf die Formeln III. und IV. wirft, als welche uns zu erkennen geben, daß eben in den Punkten, wo diese Gleichung V. statt findet, die Bewegung des einen Sterns in der Höhe, der Bewegung des andern, während einem Zeitraum von einigen Minuten, vollkommen gleich ist.

Setzen wir nun das Azimuth des im Norden des Zeniths beobachteten Sterns = B, und des andern,

der

der im Süden des Scheitelpunkts culmiret = b, so ist

$$\text{sin. B} = \frac{\text{cos. A. sin. H}}{\text{cos. x}}, \text{ und sin. b} = \frac{\text{cos. a. sin. h}}{\text{cos. x}},$$

woraus man sogleich den Schluß ziehet, daß die beyden Azimuthe, deren das eine vom Nord- und das andere vom Südpunkt des Horizonts, beyde aber gegen derselben Seite hin, es sey gegen Osten oder gegen Westen, gezählet werden, einander gleich seyn müssen, wenn man in den Fehlern der Polhöhe eine Compensation verlangt, so daß diese einander aufheben.

Da die Polhöhe allemal beyläufig bekannt ist, so hat man für diesen Fall:

$$\text{cos. h} = \frac{\left(\frac{\text{cos. 2 p. sin. a}}{\text{sin. A}} + 1\right) \text{sin. A, und}}{\text{sin. 2 p. cos. a}}$$

$$\text{cos. H} = \frac{\left(\frac{\text{cos. 2 p. sin. A}}{\text{sin. a}} + 1\right) \text{sin. a}}{\text{sin. 2 p. cos. A}}$$

oder wenn man $\frac{\text{cos. 2 p. sin. a}}{\text{sin. A}} = \text{tang. u}$

und $\frac{\text{cos. 2 p. sin. A}}{\text{sin. a}} = \text{tang. w}$ setzt,

so wird $\text{cos. h} = \frac{\text{sin}(45° \pm \text{u}) \text{ sin. A} \sqrt{2}}{\text{cos. u. sin. 2 p. cos. a}}$

$$\text{cos. H} = \frac{\text{sin. } (45° \pm \text{w}) \text{ sin. a} \sqrt{2}}{\text{cos. w. sin. 2 p. cos. A}}.$$

In welchen Formeln die Zeichen + oder — gelten müssen, je nachdem die Werthe von tang u und von tang w bejahend oder verneinend sind.

Wenn die zwey Größen $\frac{\cos. 2p. \sin. a}{\sin. A}$, und $\frac{\cos. 2p \sin. A}{\sin. a} < 1$ ſind, (wirklich iſt es die erſte allezeit, und die zweyte in den mehreſten Fällen), ſo können ſie auch cos. y und cos. z gleich geſetzt werden, wie ich in dem nachſtehenden Beyſpiel gethan habe. Da nun dieſe Coſinus bejahend ſind, wenn cos 2p daſſelbe Zeichen führt als ſin. a oder ſin. A, ſo erhält man für dieſen Fall

$$\cos. h = \frac{2 \cos \frac{1}{2} y^2 \sin. A}{\sin. 2p. \cos. a} \text{ und } \cos. H = \frac{2 \cos \frac{1}{2} z^2 \sin. a}{\sin. 2p. \cos. A.}$$

Wenn hingegen cos. 2p mit einem andern Zeichen afficirt iſt als ſin. a oder ſin. A, ſo werden die Coſinus der Winkel y oder z verneinend, und man hat

$$\cos. h = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} y^2 \sin. A}{\sin. 2p. \cos. a.}, \quad \cos. H = \frac{2 \sin \frac{1}{2} z^2 \sin. a}{\sin. 2p. \cos. A.}$$

welche Formeln vermittelſt der Logarithmen leicht berechnet werden. Kennt man dann hierdurch den Stundenwinkel, ſo findet man ferner die Höhe mittelſt der Formel für ſin. x.

## Beyſpiel

Ich ſetze, man habe am 11ten October 1787 unter der Polhöhe von Mietau dieſe Methode verſuchen wollen, und zu dieſem Behuf die Sterne ζ Draconis und α Cygni gewählet. Für den bemeldten Tag hätte man gehabt $A = 67^\circ. 16'. 35'',05$; $a = 44^\circ. 32'. 7'',48$. p kann man annehmen $= 56^\circ. 39'. 6''$. Nun würde für erſt h folgendermaßen berechnet.

log.

log. cos. 2 p = 9, 5972550
log. sin. a = 9, 8459348
cpl. log. sin. A = 0, 0350906
cos. y = 9, 4782804
y = 72°, 29'. 39", 24
½ y = 36. 14. 49, 62

2 log. sin. ½ y = 19, 5435702
log. 2 = 0, 3010300
log. sin. A = 9, 6490094
cpl. log. sin. 2 p = 0, 0369571
cpl. log. cos. a = 0, 1470219
log. cos. h = 9. 9934886
h = 9°. 53'. 48", 11

Dieser gefundene Werth von h beträgt in Zeit 39' 35", 2.

Eine ganz ähnliche Berechnung giebt H = 18°. 29'. 28", 45 oder in Zeit 1 St. 13' 57", 9.

Hiernächst wird die Höhe gefunden wie folgt

Für α. Cygni.

l.cos.h.cot. a.cot. p = 9,8188144
Dies sey gleich log. cos. z
so ist z = 48°. 47', 4", 4
2 log. cos. ½ z = 9, 9187882
log. 2 = 0, 3010300
log. sin. a sin. p = 9, 7678001
log. sin. x = 9, 9876183
x = 76°. 23'. 0", 0

Für ϱ. Draconis.

l.cos.H.cot. A.cot. p = 9,4172606
Dies sey gleich log. cos. u
so ist u = 74°. 30'. 54", 44
2 log. cos. ½ u = 9, 7998136
log. 2 = 0, 3010300
log. sin. A. sin. p = 9, 8867747
log. sin. x = 9, 9876183
x = 76°. 23'. 0", 0

Ziehet man ferner die Strahlenbrechung in Betracht, und den ungefähr bekannten Fehler des Quadranten, so weiß man, an welchem Punkt des Limbus man das Fernrohr an besagten Tage hätte anlegen müssen, um den Stern zu erwarten. In unserm Beyspiel ist die Strahlenbrechung = 14". Setzt man den Fehler des Quadranten = + 10'. 18", so hätte man die beiden Sterne erwarten müssen, indem man das Sehrohr an den Punkt von 76°. 33'. 30" des Limbus gelegt haben würde, als welcher dem gefundenen x = 76°. 23'. 0" wahrer Höhe entspricht.

Die Beobachtung des α Cygni wäre ungefähr 39'. 35" vor oder nach, und die des ϱ Draconis 1 St. 13'. 58" vor oder nach dem Durchgang durch den Mittagskreis gemacht worden.

Die vorige Berechnung zu bewähren, kann man suchen, ob wirklich die Azimuthe einander gleich sind. Ich finde

Für α des Schwans

$$\log. \sin. \text{Azim.} = \log. \frac{\cos. a. \sin. h}{\cos. x} = 9{,}7163317$$

demnach das Azimuth = 31°. 21'. 31",1.

Für ϱ des Drachen

$$\log. \sin. \text{Azim.} = \log. \frac{\cos. A. \sin. H.}{\cos. x} = 9{,}7163344$$

Folglich das Azimuth = 31°. 21'. 39",9.

Noch bemerke ich, daß weil die beyden Azimuthe B und 180° — B sind, daraus folgt, daß

$$\cos B = \frac{\text{Sin. A} - \sin. p. \sin. x}{\cos. p. \cos. x} = \frac{-\sin. a + \sin. p. \sin. x}{\cos. p. \cos. x}$$

Daher $\sin. A + \sin. a = 2 \sin. p. \sin. x$, oder

$$\text{VI. } \sin. x = \frac{\sin. A + \sin. a}{2 \sin. p.} = \frac{\sin. \left(\frac{A+a}{2}\right) \cos. \left(\frac{A-a}{2}\right)}{\sin. p}$$

und

$$\text{VII. } \cos. B = \frac{\sin \left(\frac{A-a}{2}\right) \cos. \left(\frac{A+a}{2}\right).}{\cos. p. \cos. x}$$

welche Formeln auf die einfachste Weise das Azimuth und die Höhe, unter welcher man die beyden Sterne erwarten muß, ausdrücken. In dem obigen Beyspiel hat man

$\log. \sin. \left(\frac{A+a}{2}\right) = \log. \sin. 55°. 54'. 21",26 = 9{,}9180923$

$\log. \cos. \left(\frac{A-a}{2}\right) = \log. \sin. 11°. 22'. 13",78 = 9{,}9913913$

$\text{cpl. log. sin. } p = \text{cpl. log. sin. } 56. 39. 6 = 0{,}0781347$

$\log. \sin. x = 9{,}9876183$

folglich x = 76°. 23'. 0"; gerade wie vorhin.

Endlich

Endlich so geben die Formeln $\sin. H = \frac{\sin. B \cos. x}{\cos. A}$ und $\sin. h = \frac{\sin. b. \cos. x}{\cos. a}$ die Stundenwinkel, welche die Zeiten der Beobachtungen anzeigen.

Um zu wissen, welche im Süden des Zeniths culminirende Sterne man zu wählen hat, selbige mit einem gegebenen im Norden des Zeniths culminirenden Stern zu combiniren, muß man Achtung geben, daß

I) $a < 2p - A$; II) $a > 2p + A - 180$;

III) $\sin.a < 2 \sin. p - \sin. A$; und IV) $\sin. a > \sin. A - 2 \cos. p$.

Dies wäre also die vollständige Auflösung einer Aufgabe, welche wirklich etwas paradox scheinet: man soll nämlich, ohne die wahre Zeit näher zu wissen, als etwa mittelst einer gewöhnlichen Sonnenuhr seyn kann, mit einem unrichtig eingetheilten Quadranten, ohne den Fehler beym angewandten Punkte der Eintheilung zu kennen, ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung, ohne weder correspondirende Höhen, noch ein Passageinstrument zu Hülfe zu nehmen, auch ohne Zuthun eines Micrometers — ungeachtet aller dieser Einschränkungen, sage ich, soll man die Polhöhe eines Ortes genau bestimmen. Daß aber dies möglich, hoffe ich in diesem Aufsatze hinreichend dargethan zu haben.

---

## III.

## Combinatorische Verfahren, zu Bestimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, in und ausser der Ordnung; von dem Herausgeber.

(Fortsetzung des Aufsatzes im 1sten Hefte, S. 47–68.)

---

10. Die continuirliche Substitution in

$$Z=A+\frac{a}{y};\ y=a+\frac{b}{x};\ x=b+\frac{c}{w};\ w=c+\frac{b}{v};\ \text{etc,}$$

giebt, auf ähnliche Art (wie die in 1, 2, S. 49) den continuirlichen Bruch

$$Z=A+\cfrac{a}{a+\cfrac{b}{b+\text{etc}}}=o+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\text{etc}}}$$

Für den Index oder Zeiger

$$\begin{pmatrix} o; & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\ldots \\ A; & a, & a, & b, & b, & c, & c, & b, & d\ldots \end{pmatrix}$$

11. Hier ist o ein Localzeichen (3) für A, wie 1, 2, 3, 4... für a, a, b, b ... Nämlich die einzelnen Zähler und Nenner in dem continuirlichen Bruche Z, gehören zu den Stellen 1, 2, 3, 4...; und A, das weder als Zähler noch als Nenner in diese Reihe gerechnet werden kann, liegt unmittelbar vor a, welches die erste Stelle in den einzelnen Brüchen einnimmt, und kann so füglich durch o bezeichnet werden. Dadurch wird zugleich Z (in 10) von z (in 1, 2) abhängig gemacht, oder $Z=o+z$, indem jenes von diesem, nur allein durch den Anfang A oder o verschieden ist. Das Lokalzeichen o, das, als solches, nur auf die Stelle geht, ist also an sich von dem

Zahl-

Zahlzeichen o verſchieden. Gäbe man aber A den Werth Null, ſo würde ſich auch das Lokalzeichen o auf dieſen Werth beziehen, und würden dadurch alle Complexionen verſchwinden, worin es als Factor vorkäme; auch würde $Z = z$ werden.

12. Aufgabe. Eines continuirlichen Bruches

$$Z = o + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \text{etc}}}} \qquad \left(\begin{matrix} A; a, b, c, d, e \ldots \\ o; a, b, c, d, e \ldots \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} 1, 3, 5, 7, 9 \ldots \\ 2, 4, 6, 8, 10 \ldots \end{matrix}$$ *)

willkührlich verlangten Werth, z. B. den nten anzugeben.

Auflöſung I. Werden hier die Werthe für Z ſo gezählt, daß $o + \frac{1}{2}$ der erſte, $o + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4}}$ der zweyte, u. ſ. w; und bedeutet $Z\,v\,n$ (Z valor ntus) den nten Werth von Z (wie $z\,v\,n$ von z in 4. S. 50), ſo iſt $Z\,v\,n = o + z\,v\,n$, alſo (6, VI, X, XI.)

$$Z\,v\,n \begin{cases} = o + \dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}} \\ = o + \dfrac{\overset{-1}{\mathfrak{N}}.2n + \overset{-2}{\mathfrak{N}}.(2n-1)}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}.2n + \overset{-2}{\mathfrak{N}}.(2n-1)} \\ = o + \dfrac{1.4.\mathfrak{S} + 1.5.\Sigma}{(2.4+3)\mathfrak{S} + 2.5\,\Sigma} \\ = o + z\,v\,n \text{ (für } z\,v\,n \text{ den Werth S. 58 geſetzt).} \end{cases}$$

Anmerk.

*) Auch dieſe Art, den Index für dergleichen Brüche anzugeben, iſt kurz und expreſſiv.

Anmerk. Die Buchſtaben $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, S, Σ, haben hier die (6, VI, X, XI) feſtgeſetzte, auf zvn ſich beziehende Bedeutung. Sonſt könnte man auch $Zv1 = \frac{(\mathfrak{A})}{(A)}$; $Zv2 = \frac{(\mathfrak{B})}{(B)}$ ..... $Zvn = \frac{(\mathfrak{N})}{(\mathfrak{N})}$, zum Unterſchiede der Werthe von zv1, zv2 ... zvn ſchreiben. Für obige erſte Formel geben die Involutionen $\gamma$ und $\delta$ (S. 34) die Werthe für $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$, unabhängig von einander; die zweyte Formel zeigt die Abhängigkeit der Zähler und Nenner, von zwey nächſt vorhergehenden Zählern und Nennern, reſpective (nach der Regel S. 54); die dritte, die Abhängigkeit des Nenners vom Zähler, und umgekehrt (S. 41, V); für die vierte habe ich die Formel (S. 58, unten) nicht noch einmal herſetzen wollen.

Dadurch wird alſo die Aufgabe (12) auf die in (6) und die dortigen Formeln und Vorſchriften (VI, X, XI) reducirt; auch haben deswegen viele Analyſten, z. B. Daniel Bernoulli (Nov. Comm. Petr. T. XX.) blos die Aufgabe (6) in Betrachtung gezogen.

II. Will man aber, wie Euler (Introd. in Anal. Inf. §. 360) und Andere thun, das Anfangsglied A, als Factor, mit unter den einzelnen Gliedern des Zählers für Zvn aufführen, d. i. das Localzeichen o mit unter die Complexionen des Zählers verwickeln (welches in combinatoriſcher Hinſicht wichtig iſt) ſo darf man nur jeden Ausdruck für $o + zvn$ (in I) auf einen gemeinſchaftlichen Nenner bringen, ſo findet man:

$$\text{Zu}\,n \begin{cases} = \dfrac{0.\mathfrak{N}+\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} \\ = \dfrac{(0\overset{-1}{\mathfrak{N}}+\overset{-1}{\mathfrak{M}})2n+(0\overset{-2}{\mathfrak{N}}+\overset{-2}{\mathfrak{M}})(2n-1)}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}.2n+\overset{-2}{\mathfrak{N}}(2n-1)} \\ = \dfrac{(0.2.4+1.4+0.3)\mathfrak{S}+(0.2.5+1.5)\Sigma}{(2.4+3)\mathfrak{S}+2.5\Sigma} \end{cases}$$

[So auch für $0+\text{zu}\,n$, nach dem Werthe S. 58, unten].

Die Bedeutung der Buchſtaben iſt hier wie in I. Anmerk.

13. Exempel I. Den 3ten Werth des continuirlichen Bruchs, deſſen Zeiger

$$\begin{pmatrix} 0; & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \\ a; & \alpha, & b, & \beta, & c, & \gamma, & d \ldots \end{pmatrix}$$

nach 12, II auszudrücken.

Weil hier $n=3$, alſo $2n=6$ und $2n-1=5$; ſo braucht man für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Involutionen $\gamma$ und $\delta$ (S. 55), nur bis auf 6 und 5 entwickelt, zu nehmen; und ſo kommt $(0.\mathfrak{N}+\mathfrak{M}):\mathfrak{N}$ d. i. hier

$$\text{Zu}\,3 \begin{cases} = \dfrac{0.2.4.6+0.3.6+0.2.5+1.4.6+1.5}{2.4.6+3.6+2.5} \\ = \dfrac{abcd+a\beta d+ab\gamma+\alpha cd+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+b\gamma} \end{cases}$$

eben ſo, wie bey Euler (Introd. in An. Inf. §. 360).

Exempel II. Den 6ten Werth des continuirlichen Bruchs, deſſen Zeiger

$$\begin{pmatrix} 0; & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \ldots \\ A; & 1, & 1, & 1, & 2, & 0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

nach 12, I auszudrücken.

Man

Man setze, z. B. in dem dritten Ausdrucke für Zυn (in I.) n = 6; und 5 = Null; so kommt der verlangte Werth, oder

$$Z\upsilon 6 = o + \frac{1.4\,\mathfrak{S}}{(2.4+3)\mathfrak{S}} = o + \frac{1.4}{2.4+3} = A + \frac{a\beta}{\alpha\beta + b}$$

Exempel III. Den vollen Werth des continuirlichen Bruches Z, dessen Zeiger

$$\begin{pmatrix} & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 \\ A; & a, & b, & c, & d, & e, & f \\ o; & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \varphi \\ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung, daß φ = Null, nach 12, II auszudrücken.

Hier ist n = 6, und da φ d. i. 12 = o, so kommt aus der dritten Formel in II, und in den Werthen für $\mathfrak{S}$ und Σ (S. 41) 12 = o, und statt der übrigen Localzeichen die Buchstabenwerthe gesetzt, und oben und unten mit dem gemeinschaftlichen Factor 11 = f dividirt:

$$Z\upsilon 6 = \frac{[(A\alpha + a)\beta + Ab].[\gamma\delta + d] + (A\alpha + a)c.\delta}{(a\beta + b).[\gamma\delta + d] + \alpha c.\delta} = Z.$$

Anmerk. 1. Setzt man hier im Exempel II und III o oder A gleich Null, so giebt das die Resultate zweyer Exempel, die schon Daniel Bernoulli (Nov. Comm. Petrop. T. XX. p. 31—34), in Betrachtung gezogen hat, wo nämlich ein einzelner Zähler oder ein Nenner (im Zeiger) gleich Null ist. Im ersten Fall übersieht man hier mit einem Blicke, daß alle Glieder, vom dritten an, dem zweyten, und im andern Falle, das geforderte 6ste Glied, dem 4ten gleich seyn müssen; auch findet man hier, die allgemeinere Form, worin A mit verwickelt ist (II.), noch leichter, als dort die speciellere, für A gleich Null.

Anmerk.

Anmerk. 2. Es ist unnöthig, mehr Exempel beyzufügen. Nützlich aber wird es seyn, noch einige Betrachtungen über die Ausdrücke in 12; II, beyzubringen.

14. I. Die Factoren, wie sie die dritte und vierte Formel (in 12, I, II) vorgelegt, verkürzen die Arbeit ungemein, und können die letzten auch hier eben so leicht, wie S. 58, 59, 64, 65 (vergl. S. 44, 45) angewendet werden.

II. Die Glieder des dritten Ausdrucks in 12. II, können sehr mannichfaltig versetzt und zusammengenommen werden. Jede Versetzung der Glieder des Factors $(0.2.4+1.4+0.3)$ giebt mit $\mathfrak{S}$, und die von $(0.2.5+1.5)$ mit $\Sigma$, eine neue Folge von Complexionen, also ein anderes Ordnungsgesetz für den Zähler, und auf ähnliche Art für den Nenner: so daß man unter mehrern hier die Wahl hat,

III. Eben so lassen sich auch $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ versetzen. So kommt z. B. aus 12, II

$$Zvn \begin{cases} = \dfrac{[(0.2+1)4+0.3]\mathfrak{S}+(0.2+1)5\Sigma}{2.4\mathfrak{S}+2.5\Sigma+3\mathfrak{S}} \\ = \dfrac{(0.2+1).(4\mathfrak{S}+5\Sigma)+0.3\mathfrak{S}}{2.(4\mathfrak{S}+5\Sigma)+3\mathfrak{S}} \end{cases}$$

Der letzte Ausdruck giebt $Zvn = \dfrac{(0.2+1)\,{}^{[4]}S+0.3\,{}^{[6]}S}{2\,{}^{[4]}S+3\,{}^{[6]}S}$.

Die für dergleichen Verwandlungen der Ausdrücke (die ich hier nicht häufen will, nöthigen Involutionen, findet man: für $\mathfrak{S}$ und $\Sigma$ (S. 41), für $\mathfrak{S}+\Sigma$ (S. 40), für $4\mathfrak{S}+5\Sigma$ oder für ${}^{[4]}S$ (S. 35), wenn man nämlich in den Complexionen für das dortige $\gamma$ überall 1 wegläßt, weil $\gamma = 1.\,{}^{[4]}S$.

IV.

IV. Unter den verſchiedenen **Formen**, welche die mannichfaltigen Verſetzungen der beyderley Factoren (in II und III) geben, verdienen diejenigen vor andern erwähnt zu werden, welche alle Complexionen, die ſich mit o anfangen, ungetrennt unter einander bringen; dergleichen eine, hier zur Seite, für den **Zähler** (D) des **vierten** Werthes von Z (in 12) ſteht, wo man zugleich den **zugehörigen** (im Zähler mit enthaltenen) **Nenner** des Bruches, durch einen (hier mit eingeſchriebenen) Winkel herausſchneiden kann. Das weiſen die Formeln in 12, II, beſonders die erſte, ſehr deutlich nach. Denn da hier

1.4.6.8
1.5.8
1.4.7

o | 2.4.6.8
o | 3.6.8
o | 2.5.8
o | 2.4.7
o | 3.7

$$Z\upsilon n = \left\{{}^{o\,|\,\mathcal{N}}_{+\,\mathfrak{N}}\right\} : \mathcal{N} = \left\{{}^{\mathfrak{N}}_{+o\,|\,\mathcal{N}}\right\} : \mathcal{N}$$

alſo der Nenner $\mathcal{N}$ in dem Zähler mit enthalten iſt; ſo darf man nur für den **vierten** Werth von Z, die Involutionen (S. 34) für $\gamma$ und $\delta$ (und zwar die letzte mit dem Factor o verſehen) bis auf 8 und 7 entwickelt, wie oben zur Seite, **unter einander** ſetzen. Eine noch bequemere Darſtellung ſolcher Complexionen vom Herrn Magiſter Rothe kommt unten vor.

Für die dritte Formel (in 12) könnte man eben ſo, die Glieder, die den Factor o enthalten, zuſammennehmen oder den Zähler nach ſolchen Factoren (wie in III. 2te Form.) ordnen, dergleichen auch im Nenner vorkommen; welches, wie in die Augen fällt, auf mehrere Arten geſchehen kann.

**Anmerk.** Die Auflöſung der Aufgaben (in 6 und 12) und die Bemerkungen (hier in 14) zeigen eine überaus große Mannichfaltigkeit combinatoriſcher Geſetze für die Werthe der continuirlichen Brüche. Sie fließen dennoch ſämmtlich aus der einzigen, ſehr ergiebigen, Quelle:

Folgende Werthe aus vorhergehenden involutorisch abzuleiten. Ob nun aber schon die beygebrachten Auflösungen, besonders die beyden letzten, so leicht sind, als man nur immer erwarten kann: so hat mich doch der Reichthum der combinatorischen Hülfsmittel veranlaßt, die Auflösung dieser Aufgabe auch denen Herrn Rothe, Töpfer und Burckhardt zu empfehlen, aber — ohne jene Auflösungen ihnen vorher bekannt zu machen, um zu sehen, welche Wege sie zu dieser Absicht einschlagen würden.

Ich will nun ihre, von den vorigen ganz verschiedene, und auch unter sich im höchsten Grade abweichende, Auflösungen, hier aufführen, jedoch mit Uebergehung der Beweise, zu Ersparung des Raumes, und weil es hier blos darum zu thun ist, den Lesern, denen der Gebrauch figürlicher Anordnungen, zu wirklicher Darstellung und Entwickelung von Sätzen und ihrer Resultate (S. 98) noch fremd und unbekannt ist, die Reichhaltigkeit der combinatorischen Methoden und Gesetze anschaulich vorzulegen.

## 15. Herrn Magister Rothens Verfahren.

Aufgabe. Den nten Werth des continuirlichen Bruches

$$Z = \cfrac{0}{2+\cfrac{1}{4+\text{etc}}}$$

anzugeben.

### Vorerinnerung zu den folgenden Auflösungen.

a) In den Complexionen für den nten Werth, was man auch immer für eine Anordnung dafür wählen und befolgen mag, kann keine Lokalzahl unter 0 (keine negative Zahl) und keine über $2n$ vorkommen.

b) Alle gut geordnete Complexionen (wo man von kleinen Zahlen auf größere fortgeht) endigen ſich mit $2n$ oder $2n-1$, und fangen mit 0 oder 1 für den Zähler, mit 2 oder 3 für den Nenner an.

c) Alle umgekehrt gut geordnete Complexionen (wo man von größern Zahlen auf kleinere fortgeht) fangen mit $2n$ oder $2n-1$ an, und endigen ſich, mit 0 oder 1 für den Zähler, mit 2 oder 3 für den Nenner.

## (A) Erſte Auflöſung: Gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen.

I. Die erſte Complexion iſt 0. 2. 4. 6.... $2n$ für den Zähler, und 2. 4. 6. 8... $2n$ für den Nenner; die Reihe nämlich aller geraden Zahlen von 0 bis $2n$ im erſten Falle, von 2 bis $2n$ im zweyten Falle.

II. Auf jede vorhergehende Complexion wird die nächſtfolgende ſo gefunden:

α) Man ſetze, von der Rechten nach der Linken zu gehend,

1) Unter die erſte gerade Zahl, die auf die (gerade oder ungerade) Endzahl der gegebenen Complexion folgt, die um 1 größere (ungerade) Zahl, für die folgende Complexion

2) Daneben, zur Rechten, die um 3 größere (gerade) Zahl

3) Dieſer, weiterfort zur Rechten, alle zunächſt auf einander folgende größere gerade Zahlen, bis auf und mit $2n$

4) Die Zahlen zur Linken derjenigen, welche die erſte Veränderung veranlaßt hat, werden ſämtlich, aus der vorhergehenden Complexion in die folgende, ungeändert heruntergeſetzt.

auf 0 3. 6 8. 11. 15. 19 (für n = 10)
folgt 0 3 6 9 12. 14 16. 18. 20

auf 1. 5. 8 10. 13. 17. 20 (für n = 10)
folgt 1. 5. 8 11. 14. 16. 18. 20

Diese viertheilige Regel befolge man, so lange und so weit, als man durch sie nicht auf eine größere Zahl als 2n (wider Vorer. a) geleitet wird. Man kann daher nicht immer alle Theile der Regel in Ausübung bringen. Z. E.

β) Sind die letzte und vorletzte Zahl der gegebenen Complexion beyde gerade Zahlen: so kann man von α nur 1 und 4 befolgen, weil α, 2 und α, 3 größere Zahlen geben würden, als hier vorkommen dürfen (Vor. a)

auf 3. 6. 8. 11. 14. 16. 18. 20 (für n = 10)
folgt 3. 6. 8. 11. 14. 16. 19.

γ) Ist die Endzahl der gegebenen Complexion eine ungerade Zahl, und die unmittelbar darauf folgende die um 3 kleinere (gerade) Zahl; so kann man von α nur 1, 2 und 4 befolgen, weil α, 3 schon eine zu große Zahl geben würde; wider Vor a.

auf 2. 4 6. 8. 10. 13. 16. 19 (für n = 10)
folgt 2. 4. 6. 8 10. 13. 17. 20

δ) Fällt die (nach α, 1) um 1 zu erhöhende gerade Zahl, wie 0 oder 2, zu äußerst linker Hand, so kann α, 4 nicht angewendet werden, weil es neben dieser Zahl keine weiter zur Linken giebt

auf 0. 3. 7. 11. 15. 19 (für n = 10)
folgt 1. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20

III. So fahre man fort, bis man auf die letzte Complexion verfällt, die entweder aus lauter ungeraden Zahlen besteht, oder doch nur in der letzten Stelle rechter Hand eine gerade Zahl (2n) hat; auf welche Complexion man also das Verfahren (II) nicht weiter anwenden kann.

IV. Die Vorſchriften II und III geben, des nten Werthes Zähler $\mathfrak{N}$ oder Nenner $\mathfrak{N}$, nachdem man $0.2.4.6.\ldots.2n$, oder $2.4.6.8.\ldots.2n$, als Anfangscomplexion (I) ſetzt. Daher kann man hier den Nenner aus dem Zähler, durch einen Winkel herausſchneiden, wie folgendes Beyſpiel zeigen wird.

**Exempel. Des continuirlichen Bruches Z(15) fünften Werth, d. i. $Zv5 = \frac{(\mathfrak{E})}{(E)}$ [12, 15 Anmerk.] in Lokalzeichen auszudrücken.**

$$(\mathfrak{E}) = \left\{\begin{array}{l|l} 1)\,0 & 2.4.6.8.10 \\ \beta)\,0 & 2.4.6.9 \\ \gamma)\,0 & 2.4.7.10 \\ \alpha)\,0 & 2.5.8.10 \\ \beta)\,0 & 2.5.9. \\ \alpha)\,0 & 3.6.8.10 \\ \beta)\,0 & 3.6.9 \\ \gamma)\,0 & 3.7.10 \\ \hline \delta)\,1 & 4.6.8.10 \\ \beta)\,1 & 4.6.9 \\ \gamma)\,1 & 4.7.10 \\ \alpha)\,1 & 5.8.10 \\ \beta)\,1 & 5.9 \end{array}\right\} = (E)$$

Hier ſind, aus der erſten Complexion 0.2.4.6.8.10 des Zählers die zweyte, aus dieſer die dritte u. ſ. w. jede folgende aus der unmittelbar vorhergehenden, bis zur letzten 1.5.9, nach den Vorſchriften (II, III) abgeleitet, und die griechiſchen Buchſtaben den einzelnen Complexionen, in der dortigen Bedeutung, vorgeſetzt worden. Auch iſt hier der Nenner (E) aus dem Zähler (E) durch einen Winkel herausgeſchnitten worden, weil jener in dieſem mit enthalten iſt. Sonſt könnte man auch den Nenner nach eben dem

Geſetze,

Geſetze, aus ſeiner Anfangscomplexion 2. 4. 6. 8. 10 (der erſten hier im Winkel) unmittelbar herſtellen, wie eben das Schema ſogleich zu erkennen giebt.

Zuſ. 1. Der Werth von (E) ſo dargeſtellt, involvirt die Zähler der Brüche

$$\frac{2+\frac{3}{4+\frac{5}{\text{etc bis 10}}}}{} \qquad \frac{4+\frac{5}{6+\frac{7}{\text{etc bis 10}}}}{} \qquad \text{u. ſ. w.}$$

mehrere mal und dadurch auch die Nenner, die ſich durch Winkel längſt der Colonne der 2en, der 4en u. ſ. w. ausſchneiden laſſen, wie im Exempel der Nenner (E) längſt der Colonne der 0en. Alſo iſt (E) im Exempel, der Nenner zu (E) für den Bruch $0+\frac{2}{\text{etc bis 10}}$ und zugleich der Zähler für den Bruch $2+\frac{4}{\text{etc bis 10}}$ u. ſ. w.

Zuſ. 2. Setzt man

ſtatt der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5....
die Buchſtaben a, b, c, d, e, f....

ſo gehen die Buchſtabencomplexionen des **Exempels**, oder überhaupt dieſer erſten Auflöſung (15, A) in **alphabetiſcher** oder **lexikographiſcher Ordnung** unter einander fort. Denn, wenn man ſich dieſe Buchſtabencomplexionen als **Wörter** irgend einer Sprache denkt, ſo würden ſie in einem **Lexikon**, das alle Wörter dieſer Sprache enthielte, zwar unter andere Wörter gemengt, aber doch gerade in der **Ordnung** und **Lage** gegen einander, wie ſie hier ſtehen, in dieſem Wörterbuche vorkommen, und darin aufgeſucht werden müſſen *).

acegil
acegk
acehl
acfil
acfk
adgil
adgk
adhl
begil
begk
behl
bfil
bfk



*) Dieſe Quaſi-Wörter befolgen auch unter ſich eine alphabetiſche Ordnung von der Art, „daß, auf ſchon geſetzte Buchſtaben,

## (B) Zweyte Auflöſung: Umgekehrt gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen.

V. Wegen der umgekehrt gut geordneten Complexionen gelten hier die Vorerinnerungen a, c (15), wie vorher a, b.

VI. Die erſte Complexion für den Zähler des nten Werthes, iſt $2n.(2n-2)\ldots 8.6.4.2.0$; für den Nenner dieſes Werthes, $2n.2n-2)\ldots 8.6.4.2$

VII. Auf jede vorhergehende Complexion wird die nächſtfolgende ſo gefunden:

Man ſetze, von der Rechten nach der Linken zu gehend, 1) unter die erſte gerade Zahl, die auf die (gerade oder

„ben, kein gleicher, und eben ſo wenig ein niedrigerer oder frü„herer folgen darf.“ Wo z. B. ſchon a c e ſteht, kann weiter kein a, b, c, d, e (ſelbſt nicht zwey unmittelbare Nachbarn können auf einander) folgen. Man vergleiche hiermit die Anmerk. S. 31. Ferner: Wenn man auch keine Buchſtaben ſtatt der Zahlen ſetzte, aber (im Exempel) die erſten Ziffern (0 und 1) aller Complexionen, durch ein Comma (wie bey Decimalbrüchen) von den übrigen abſonderte, z. B. 0, 2 4 6 8 10 und 0, 2 4 6 9; u. ſ. w. bis 1, 5 9; ſo würde, in jedem Zahlenſyſtem von mehr als 10 Grundzeichen (weil hier 10 für eine einfache Ziffer gilt) der erſte Syſtemsbruch des Exempels: 0, 2 4 6 8 10 kleiner als der zweyte 0, 2 4 6 9; und dieſer wieder kleiner als der dritte 0, 2 4 7 10; u. ſ. w. jeder vorhergehende kleiner als der folgende, alſo der letzte 1, 5 9 unter allen der größte ſeyn; und ſo würde dadurch die lexikographiſche Ordnung nachgewieſen. Dieſe Bemerkung, auf die ich bey meinen combinatoriſchen Unterſuchungen ſehr frühzeitig gekommen bin, iſt um ſo wichtiger, da ſie zwey Hauptabtheilungen in dem unermeßlichen Gebiete combinatoriſcher Veränderungen, die Zahlenordnung und die alphabetiſche Darſtellung, die auch nicht die entfernteſte Aehnlichkeit mit einander haben, in den genaueſten Zuſammenhang und die innigſte Verbindung bringt; da ſie den geraden Weg zeigt, wie man aus einer in die andere übergehen kann. So viel vorläufig. Mehr hiervon in der (S. 16) von mir verſprochenen Abhandlung über die alphabetiſche Ordnung. Uebrigens hat Herr Magiſter Rothe die alphabetiſche oder lexikographiſche Darſtellung bey den Complexionen der Werthe für die continuirlichen Brüche zuerſt aufgeſucht, und die ſehr leichten Regeln dafür hier (in A und B) mitgetheilt.

oder ungerade) Endzahl folgt, die um 1 kleinere (ungerade) Zahl; 2) neben dieser zur Rechten, die um 3 kleinere (gerade) Zahl; 3) neben dieser weiter fort zur Rechten, alle zunächst auf einander folgende kleinere gerade Zahlen, bis auf und mit 0 für die Complexionen des Zählers, bis auf und mit 2 für die des Nenners; 4) die übrigen Zahlen zur Linken, setze man aus der gegebenen Complexion ungeändert in die folgende herunter

auf 15. 12. 10. 7. 3. 0; auf 14. 12. 9. 5. 1
folgt 15. 12. 9. 6. 4. 2. 0; folgt 14. 11. 8. 6. 4. 2. 0.

Diese viertheilige Regel befolge man, so lange und so weit, als man durch sie nicht auf eine kleinere Zahl als 0 (auf eine negative Zahl) für die Complexionen des Zählers, oder auf eine kleinere Zahl als 2 für die des Nenners, geleitet wird; dergleichen hier nicht statt finden (Vor. a, c). Man kann daher auch hier, wie oben (III) nicht immer alle Theile der Regel in Ausübung bringen, und es kommen, hier wie dort, einzelne Fälle dieser Art vor, bey denen ich mich aber hier nicht weiter aufhalten will. Kurz: den oder die Theile der Regel, die für Complexionen des Zählers auf negative Zahlen, oder, für Complexionen des Nenners auf Zahlen kleiner als 2, führen würden, übergehe man; und, wo die erste Veränderung auf die äußerste Zahl linker Hand der gegebenen Complexion fällt, da hat man auch für die folgende nichts herunter zu setzen.

VIII. Die Vorschriften in VII führen endlich die letzte Complexion herbey, die entweder aus lauter ungeraden Zahlen besteht, oder doch nur in der letzten Stelle rechter Hand eine gerade Zahl hat, auf welche Complexion das Verfahren (VII) nicht weiter anwendbar ist.

IX. Da man des nten Werthes Zähler $N$ oder Nenner $N$ findet, nachdem man $2n.(2n-2)\ldots 6.4.2.0$

oder $2n.(2n-2)\ldots 6.4.2$ als Anfangscomplexionen (VI) ſetzt, ſo iſt

der Nenner $\mathfrak{N}$ von $0+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{\text{etc bis } 2n}}$ gleich dem Zähler $\mathfrak{Z}$ von $2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{\text{etc bis } 2n}}$.

Man erhält alſo $\mathfrak{N}$ aus dem Werthe $\overline{\mathfrak{Z}}^{-1}$, wenn man

ſtatt der Zahlen $0, 1, 2 \ldots (2n-3).(2n-2)$ in $\overline{\mathfrak{Z}}^{-1}$
ſetzt die Zahlen $2, 3, 4 \ldots (2n-1), 2n$ für $\mathfrak{N}$

Exempel. Zu $5 = \frac{(E)}{(E)}$ in Lokalzeichen und Buchſtaben, nach dem Zeiger

$$\begin{pmatrix} 0; & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10\ldots \\ a; & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k, & l\ \ldots \end{pmatrix}$$

auszudrücken.

Der Zähler (E) iſt aus der Anfangscomplexion

| | |
|---|---|
| 10, 8 6 4 2 0 | l i g e c a |
| 10, 8 6 4 1 | l i g e b |
| 10, 8 6 3 0 | l i g d a |
| 10, 8 5 2 0 | l i f c a |
| 10, 8 5 1 | l i f b |
| 10, 7 4 2 0 | l h e c a |
| 10, 7 4 1 | l h e b |
| 10, 7 3 0 | l h d a |
| 9, 6 4 2 0 | k g e c a |
| 9, 6 4 1 | k g e b |
| 9, 6 3 0 | k g d a |
| 9, 5 2 0 | k f c a |
| 9, 5 1 | k f b |

abgeleitet worden. Den Nenner (E) findet man aus IX, oder man ſchaft ihn ſogleich aus des hier entwickelten Zählers

lers Complexionen, die sich auf o oder à endigen, indem man blos dieses Zeichen oder diesen Buchstaben wegläßt (S. 165). Wegen der Zeichen (E) und (E) sehe man 12, 1 Anmerk.

Anmerk. Hier sind die höchsten Zeichen 10 und 9 durch ein Comma abgeschnitten, so, daß man die Ziffern der einzelnen Complexionen als Systemsbrüche zusammenlesen kann; wobey sich denn zeigt, daß der letzte 9, 5 1 der kleinste, der vorletzte 9, 5 2 0 ein größerer Bruch u. s. w. die folgenden von unten herauf, immer größere Brüche seyen, bis zum ersten oder größten 10, 8 6 4 2 0. Das zeigt (S. 165. 166. Note), daß hier die Complexionen, von der ersten an, in umgekehrter lexikographischer Ordnung fortgehen, oder, daß die zugehörigen Buchstabencomplexionen, als Wörter einer Sprache angesehen, in einem Lexikon, das alle Wörter dieser Sprache enthielte, gerade in einer umgekehrten Ordnung hinter einander liegen, und, unter andere Wörter gemengt, auf einander folgen würden: das letzte zuerst, dann das vorletzte u. s. w.

X. Wenn (Aufg. 15) o = Null, so bleibt der Nenner (in welchem das Localzeichen o nicht vorkommt) ungeändert, im Zähler aber (z. B. IV, Ex. IX, Ex.) fallen alle Complexionen weg, welche mit o anfangen oder auf o sich endigen. Aber diese Complexionen blos deswegen mit darzustellen, um sie nachher wegzulassen, würde (da besonders die Menge der wegzulassenden weit größer und beträchtlicher ist, als die der bleibenden) viel zu weitläuftig seyn. Dies erspart man sich, wenn man weiß, daß

der Zähler des Bruchs $\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{\text{etc bis } 2n}} = A$ dem Zähler des Bruchs $\cfrac{4+5}{6+\cfrac{7}{\text{etc bis } 2n}} = B$

multiplicirt in $x^2$, gleich iſt, wo hier

die Zahlen 4, 5, 6, 8 ... $2n$ wegen B

wie die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... $(2n-4)$ (15, V-IX u. Ex.)

zu brauchen, oder, jene für dieſe in $\mathfrak{A}^{-2}$ zu ſetzen wären.

XI. Die Zähler, nach beyden Auflöſungen (IV, Ex.; IX, Ex.) ſind einander gleich, folglich iſt

der Zähler des Bruchs $\cfrac{0+1}{2+\cfrac{3}{\text{etc bis } 10}}$ = dem Zähler des Bruchs $\cfrac{10+9}{8+\cfrac{7}{\text{etc bis } 0}}$

oder, man findet den Zähler des letztern Bruchs aus dem des erſtern, wenn man überall

ſtatt der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

hier, die Zahlen 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

d. i. ihre Ergänzungen zu 10, für den 5ten Werth, und eben ſo allgemein, für die Reihe der Localzeichen 0, 1, 2, 3 ... $2n$, ihre Ergänzungen zu $2n$, für den nten Werth, ſetzt.

XII. Die Complexionen des nten Werthes (nach 15 B, V-IX, Ex.) beſtehen demnach, aus Zuſammenſetzungen der Größen 0, 1, 2, 3 ... $2n$ für den Zähler, und 2, 3, 4, 5 ... $2n$ für den Nenner, dergeſtalt, daß

1) jede Complexion (nach Vor. c) mit $2n$ oder $2n-1$ anfängt, und mit 1 oder 0 für den Zähler, mit 2 oder 3 für den Nenner, ſich endigt.

2) in jeder Complexion, auf eine gerade Zahl, nur die um 2 kleinere gerade, oder die um 3 kleinere ungera-

de,

de, auf eine ungerade Zahl aber, nur die um 3 kleinern gerade, oder die um 4 kleinere ungerade, folgt.

Es sind 10.7.3.0 und 9.6 4. 1, zum Zähler (E) des 5ten Werthes gehörige Complexionen, weil sie vorstehende beyde Bedingungen erfüllen.

Noch ist ferner zu bemerken:

3) wenn die Complexionen so unter einander gesetzt werden, wie im Exempel (IX), so liegt, neben jedem Stücke einer verticalen Reihe, in welchem einerley Zahl, z. B. $m$, mehrere male widerholt wird, in der zunächst folgenden verticalen Reihe, ein anderes gleich langes Stück, das mit $m-2$ oder $m-3$ anfängt, und mit $m-3$ oder $m-4$ sich endigt, nachdem $m$ in dem vorhergehenden Stücke eine gerade oder ungerade Zahl ist.

## (C) Dritte Auflösung. Zusammensetzung der Complexionen durch Schreiben der Localzeichen in die Tiefe, oder nach verticalen Reihen.

XIII. Diese Zusammensetzung geschieht vermittelst der Bemerkungen in XII, mit Hülfe der Zahlen in folgender Tafel. Diese Tafel geht hier nur bis auf die Zahl 21 im Zähler und 23 im Nenner, und kann, nach der ihr beygefügten Beschreibung sehr leicht, so weit als man will, fortgesetzt und erweitert werden.

| Zähler | | ⊙ | Nenner | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| 5 | 4 | 2 | 6 | 7 |
| 7 | 6 | 3 | 8 | 9 |
| 9 | 8 | 5 | 10 | 11 |
| 11 | 10 | 8 | 12 | 13 |
| 13 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 15 | 14 | 21 | 16 | 17 |
| 17 | 16 | 34 | 18 | 19 |
| 19 | 18 | 55 | 20 | 21 |
| 21 | 20 | 89 | 22 | 23 |

Die Zahlen für die Zähler sind hier 0, 1, 2, 3 ... 21, für die Nenner 2, 3, 4, 5 ... 23, weil 0, 1 in den Nennern nicht vorkommt. Jede Zahl in der Colonne ⊙, ist die Summe der beyden nächstvorhergehenden, und zeigt zugleich die Anzahl der Complexionen in den bestimmten Werthen der Brüche an.

XIV. Die Anwendung von XII und XIII hier zu zeigen, mag folgendes Beyspiel statt aller übrigen dienen.

Den Zähler (E) des 5ten Werthes (wie er in IX, Ex. steht) zu finden, verfahre man so:

10. 8. 6. 4. 2. 0
10. 8. 6. 4. 1
10. 8. 6. 3. 0
10. 8. 5. 2. 0
10. 8. 5. 1
10. 7. 4. 2. 0
10. 7. 4. 1
10. 7. 3. 0
9. 6. 4. 2. 0
9. 6. 4. 1
9. 6. 3. 0
9. 5. 2. 0
9. 5. 1

1) Man setze die erste Complexion 10. 8. 6. 4. 2. 0 (VI und IX, Ex.). Diese giebt die Anfangszahlen jeder Verticalreihe.

2) Da für den gesuchten Werth alle Complexionen mit 10 oder 9 anfangen (15, Vorer. c) so kann die erste Verticalreihe auch nur diese Zahlen enthalten, und keine andern. Nun zeigt die Colonne ⊙ in der Tafel (XIII), für den Zähler, die Zahl 10 müsse 8mal, die Zahl 9 aber 5mal wiederholt werden; und so geben die Wiederholungen dieser Zahlen die erste Verticalreihe des Zählers, und mit ihr $8 + 5 = 13$, die Zahl aller Complexionen.

3) Die-

3) Dieſelbe Colonne ⊙ zeigt weiter für den Zähler, die Zahl 8 müſſe 5mal; die Zahl 7, 3mal; die Zahl 6, 3mal; die Zahl 5, 2mal wiederholt werden. Das giebt die zweyte Verticalreihe; und die Zahlen, die bey den Verticalreihen hier neben einander ſtehen, haben ſolche Differenzen, wie nach XII, 2 zuläſſig iſt.

4) Eben ſo muß für die dritte Verticalreihe, die Zahl 6, 3mal; die Zahl 5, 2mal; die Zahl 4, 2mal, die Zahl 3, einmal wiederholt werden. Wollte man aber weiter fort in dieſer Reihe mit den noch übrigen Zahlen 2, 1, 0, nach den Zahlen der Colonne ⊙ verfahren: ſo würden hierdurch Zahlen neben einander zu ſtehen kommen, deren Differenzen größer wären, als nach XII, 2 ſeyn darf. Man ſetze alſo hier zu den Zahlen 9. 6 aus den beyden erſten Verticalreihen, neben die gerade Zahl 6 (weil ſie die erſte von den drey 6en iſt, die ſich in der zweyten Reihe wiederholen) die um 2 kleinere gerade Zahl 4 (XII, 3). Das übrige dieſer dritten Verticalreihe folgt von da an ohne Schwierigkeit.

5) Die Wiederholung der Zahlen nach der Tafel (XIII) mit Rückſicht auf die Vorſchrift (XII, 2) beſtimmt die Folge der Zahlen für die übrigen Colonnen, und jeder Anſtoß wider XII, 2 wird durch XII, 3 gehoben. So kann man z. B. in der vierten Verticalreihe, bey der Complexion 10. 7. 4. 2. 0 nicht da 0 ſetzen, wo hier ∗ ſteht, weil es XII, 2 nicht verſtattet. Daher 2 nach XII, 3 in dieſe Stelle geſetzt werden muß. Auch könnte man ſich, ohne auf XII, 2 zu ſehen, ganz allein nach XII, 3 richten.

6) Bey weiterer Anwendung dieſer Regeln auf folgende Verticalreihen des Zählers, müſſen die Complexionen, die ſchon mit den Endzahlen 1 oder 0 verſehen ſind, als ſchon vollendet übergangen, und für die übri-

gen

gen XII, 3 zu Rathe gezogen werden. Für den Nenner müßte man ſchon die Complexionen übergehen, die bereits mit den Endzahlen 2 oder 3 verſehen ſind.

## 16. Herrn Burckhardt's Verfahren.

Den Titel ſeiner Schrift habe ich bereits (S. 48) angegeben. Herr Burckhardt hat die Werthe des Bruchs

$$z = \cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\text{etc}}}}$$

in Betrachtung gezogen, und iſt in Anſehung der Ableitung derſelben durch dieſelben Subſtitutionen, von $2+\frac{3}{4}$ ſtatt 2, von $4+\frac{5}{6}$ ſtatt 4, u. ſ. w. (wie in 5, S. 50, 51) fortgegangen; aber die ſo große Mannichfaltigkeit combinatoriſcher Verwickelungen und Geſetze, die oft bey einer und derſelben, vorzüglich aber bey dieſer Aufgabe ſtatt findet, hat ihn gar bald auf einen von dem meinigen ganz verſchiedenen Weg geleitet. Herrn Burckhardt's Vorſchrift (S. IX - IX ſeiner Schrift) iſt folgende:

### A. Complexionen des Zählers.

I. Man ſchreibe alle gerade Zahlen von 4 bis $2n$

4. 6. 8. 10. 12. .... $2n$

hin. Haupt- und einzige Complexion der erſten Claſſe.

II. Daraus entſtehen die Complexionen der zweyten Claſſe folgender Geſtalt:

In der Complexion der erſten Claſſe ſchreibe man: ſtatt der erſten und zweyten geraden Zahl [4. 6] die zwiſchenfallende ungerade [3] mit Beybehaltung aller übrigen Zahlen; ſtatt der zweyten und dritten geraden

Zahl

Zahl [6. 8] die dazwischen fallende ungerade [7] mit Beybehaltung aller übrigen Zahlen. Dasselbe thue man für die dritte und vierte, vierte und fünfte, u. s. w. gerade Zahl, bis man endlich auf die beyden letzten geraden Zahlen [$2n-2$ und $2n$] verfällt, für die man die zwischenfallende ungerade [$2n-1$] mit Beybehaltung aller übrigen Zahlen setzt, und so die letzte Complexion der zweyten Classe findet.

Aus der ersten Complexion der ersten Classe

4. 6. 8. 10 .... $2n-2$. $2n$

folgen:

5. 8. 10 .... $2n-2$. $2n$
4. 7. 10 .... $2n-2$. $2n$
4. 6 9 .... $2n-2$. $2n$
. . . . . .
4. 6. 9 .... $(2n-4)$. $(2n-1)$

die sämtlichen Complexionen der zweyten Classe.

III. Auf ähnliche Art entstehen die Complexionen der dritten Classe, indem man die Complexionen der zweyten, eben so, wie vorher die der ersten, verändert, mit dem Unterschiede, daß hier die erste Verwandlung zweyer nächsten geraden Zahlen (in die zwischenfallende ungerade, mit Beybehaltung der übrigen Zahlen) von dem Paare anfängt, das unmittelbar auf die in der Complexion schon befindliche ungerade Zahl folgt

aus 5. 8. 10. 12 folgt 5. 9. 12. und 5. 8. 11
aus 4. 7. 10. 12 » die einzige Compl. 4. 7. 11

IV. Eben so entspringt die vierte Classe aus der dritten, die fünfte aus der vierten, u. s. w. nur muß man in den Complexionen, wo mehrere ungerade Zahlen vorkommen, die erste Verwandlung zweyer nächsten geraden Zahlen (in die zwischenfallende ungerade mit Beybehaltung der übrigen Zahlen) von dem Paare anfangen, das unmittelbar auf die letzte oder höchste ungerade Zahl, die in der Complexion vorkömmt, folgt.

aus

Aus 4. 6. 9. 12. 14. 17. 20. 22. 24

folgt 4. 6. 9. 12. 14. 17. 21, 24

und 4. 6. 9. 12, 14. 17. 20. 23

Aus der Complexion 4. 6. 8. 11. 14. 16. 19. 22 kann keine für die folgende Claſſe hergeleitet werden, weil auf 19 (die letzte oder höchſte ungerade Zahl in ihr) nicht weiter ein Paar gerader Zahlen folgen.

V. Die weiter fortgeſetzte Anwendung der Vorſchrift (IV) führt endlich die letzte Complexion in der letzten Claſſe herbey, die

entweder 4. 7. 11. 15. 19....2n — 1,

oder 5. 9. 13. 17. 21....2n — 1,

jenes für die geraden, dieſes für die ungeraden Werthe von n.

VI. Allen ſo gefundenen Complexionen muß 1 vorgeſetzt, oder die Summe aller Complexionen muß in 1 multiplicirt werden.

## B Complexionen des Nenners.

VII. Der Nenner kann auf doppelte Art erhalten werden:

a) entweder nach demſelben Verfahren, wie der Zähler, jedoch dergeſtalt, daß die Complexion der erſten Claſſe nicht mit 4 ſondern mit 2 anfängt, alſo 2. 4. 6. 8...2n in die erſte Claſſe geſetzt, und den einzelnen Complexionen keine 1 (wie in VI) vorgeſetzt wird.

b) oder, aus dem Zähler, indem man in allen Complexionen des Zählers 2 ſtatt 1 ſchreibt, und ihnen noch diejenigen beyfügt, die mit 1. 4 anfangen, nur daß man darin 3 ſtatt 1. 4 ſetzt, die übrigen aber, mit 1. 5 anfangenden, übergeht.

## C Darſtellung der einzelnen Claſſen für den Zähler.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (1) | 1. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16; | Cl. I. |
| aus Cpl. 1; | (2) | 1. 5. 8. 10. 12. 14. 16 | |
| | (3) | 1. 4. 7. 10. 12. 14. 16 | |
| | (4) | 1. 4. 6. 9. 12. 14. 16 | Cl. II. |
| | (5) | 1. 4. 6. 8. 11. 14. 16 | |
| | (6) | 1. 4. 6. 8. 10. 13. 16 | |
| | (7) | 1. 4. 6. 8. 10. 12. 15 | |
| Cpl. 2; | (8) | 1. 5. 9. 12. 14. 16 | |
| | (9) | 1. 5. 8. 11. 14. 16 | |
| | (10) | 1. 5. 8. 10. 13. 16 | |
| | (11) | 1. 5. 8. 10. 12. 15 | Cl. III. |
| Cpl. 3; | (12) | 1. 4. 7. 11. 14. 16 | |
| | (13) | 1. 4. 7. 10. 13. 16 | |
| | (14) | 1. 4. 7. 10. 12. 15 | |
| Cpl. 4; | (15) | 1. 4. 6. 9. 13. 16 | |
| | (16) | 1. 4. 6. 9. 12. 15 | |
| Cpl. 5; | (17) | 1. 4. 6. 8. 11. 15 | |
| Cpl. 8; | (18) | 1. 5. 9. 13. 16 | |
| | (19) | 1. 5. 8. 12. 15 | Cl. IV. |
| Cpl. 9; | (20) | 1. 5. 8. 11. 15 | |
| Cpl. 12; | (21) | 1. 4. 7. 11. 15 | |
| Cpl. 18; | (22) | 1. 5. 9. 13; | Cl. V. |

Die beygeſetzten Zahlen in Klammern ſind **Ordnungszahlen** der Complexionen. Daneben ſind die **vorhergehenden** Complexionen angezeigt, aus denen die folgenden (nach A) ſind abgeleitet worden.

Dieſe **Complexionen ohne Wiederholung** ſind ſämtlich **gut geordnet**, und gehen in ihren Claſſen, nach der **Ordnung** geleſen, wie **abnehmende**, von unten herauf, wie **wachſende Zahlen** unter einander

fort. Für den letzten Fall ſind alſo hier gut geordnete Complexionen und Claſſen*).

Den Nenner findet man aus dem hier dargeſtellten Zähler (VII, b)

## 17. Herrn Magiſter Toepfers Verfahren.

Hier werden (wie in 16) die Werthe des Bruches $z = \frac{a}{a + \text{etc}}$ (6. S. 51) in Betrachtung gezogen, aber die Lokalzeichen für Zähler und Nenner nicht, wie bisher durchgängig geſchehen, gemeinſchaftlich fortgezählt, ſondern jeder beſonders, von 1 an, beziffert. Dabey ſind drey Fälle unterſchieden worden, von denen die beyden erſten ganz einfach ſind, und zugleich dazu dienen, den dritten und allgemeinen Fall, aus den beyden erſten ganz mechaniſch zuſammenzuſetzen.

I. Wenn

*) Die Complexionen, die Herr Burckhardt hier in C vorlegt, ſind alſo unter den Complexionen in β (hier S. 35 und Inſt. Dign. p. 161) mit begriffen, ſie geben aber keine Involution, nach dem (S. 13, 1) feſtgeſetzten Begriffe davon. Denkt man ſich hier die erſte Ziffer 1 durch ein Comma von den übrigen abgeſondert, und lieſt ſo die Ziffern der einzelnen Complexionen, wie Syſtemsbrüche zuſammen, ſo erhellet (S. 169 Anmerk. und die Note zu S. 165) daß die Complexionen jeder Claſſe, nach der Reihe geleſen in umgekehrter, von unten herauf, in directer lexikographiſcher Ordnung fortgehen. Die hier befolgte alphabetiſche Ordnung iſt aber noch mehr beſchränkt, als die Rothiſche (15, IX, Ex. auch IV, Zuſ. 2), da hier blos Brüche von gleichviel Ziffern claſſenweiſe beyſammen ſtehen. Merkwürdig iſt: „daß dieſe Beſchränkung den Vereinigungs„punkt angiebt, wo Zahlenordnung und alphabetiſche Dar„ſtellung zuſammentreffen.“ Gut geordnete Complexionen in gut geordneten Claſſen, gehen unter ſich allemal in directer alphabetiſcher oder lexikographiſcher Ordnung fort.

## I. Wenn die Zähler alles, die Nenner aber Eins sind.

$$z = \cfrac{a}{1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{1+\cfrac{\varepsilon}{1+\text{etc}}}}}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \\ a, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

Auflös. Für den $\left\{\begin{matrix}\text{Zähler}\\ \text{Nenner}\end{matrix}\right\}$ des gesuchten Werths schreibe man aus den Elementen $\left\{\begin{matrix}2, 3, 4, 5, 6 \ldots n-1\\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots n-1\end{matrix}\right\}$ von der Nullion (1° oder Eins) an, alle Unionen, Binionen, Ternionen ꝛc. überhaupt alle Combinationen *simpliciter*, ohne Wiederholung, die aus Elementen bestehen, welche unter sich zur kleinsten Differenz 2 haben.

Exempel für den 6ten Werth von z, oder für $n = 6$.

$$z_{\nu 6} = a \left\{\begin{matrix}35\\25\\24\\5\\4\\3\\2\\1^\circ\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}135\\35\\25\\24\\15\\14\\13\\5\\4\\3\\2\\1\\1^\circ\end{matrix}\right\}$$

Anmerk. 1. Hier ist a ein gemeinschaftlicher Factor in die Complexionen des Zählers, der in Klammern daneben steht, und von dem Nenner durch das gewöhnliche Divisionszeichen abgesondert ist.

Anmerk. 2. Wegen des dritten Falls sind hier die Complexionen im Zähler und Nenner in ihrer Ordnung, von unten hinauf, geschrieben worden.

II. Wenn die Nenner alles, die Zähler aber Eins ſind.

$$z = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc}}}}}}}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots. \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

Auflöſung. α. Für den Zähler des geſuchten Werths. Wenn $n\begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ iſt, ſo ſchreibe man nach der Ordnung, aus den Elementen 2, 3, 4, 5, 6 .... n alle $\begin{Bmatrix}0, 2, 4, 6 \ldots n-1\\ 1, 3, 5, 7 \ldots n-1\end{Bmatrix}$tionen (auch hier, wie in I, iſt die Nullion 1° oder Eins) die in den ungeraden Stellen, von der Linken nach der Rechten zu gezählt, gerade Elemente, in den geraden Stellen, ungerade Elemente haben.

β) Für den Nenner des geſuchten Werths. Wenn $n\begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ iſt, ſo ſchreibe man nach der Ordnung, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... n, alle $\begin{Bmatrix}1, 3, 5, 7 \ldots n\\ 0, 2, 4, 6 \ldots n\end{Bmatrix}$tionen, die in den ungeraden Stellen ungerade Elemente, in den geraden Stellen gerade haben.

Ex. Für den 6ten Werth von z, oder für $n = 6$

$$z\nu 6 = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 34 \\ 36 \\ 56 \\ 234 \\ 236 \\ 256 \\ 456 \\ 23456 \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} 1^{\circ} \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 34 \\ 36 \\ 56 \\ 1234 \\ 1236 \\ 1256 \\ 1456 \\ 3456 \\ 123456 \end{matrix}\right\}$$

**Anmerk. 1.** Zähler und Nenner stehen auch hier, wie in I, in Klammern eingeschlossen, neben einander.

**Anmerk. 2.** Auch hier, wie in I, ist $1^{\circ}$ kein Localzeichen, sondern eine absolute 1. Daher, wenn man in I und II, die Buchstaben statt der Zahlen, nach dem Zeiger setzt, diese 1 statt $1^{\circ}$, als erstes Glied gehörigen Orts zu setzen ist.

**Anmerk. 3.** Der erste Fall kommt nur selten vor, desto häufiger aber der zweyte, der auch bey weitem der bekannteste ist.

## III. Wenn Zähler und Nenner alles seyn können.

$$z = \cfrac{a}{a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{etc}}}}}}}$$

$$\left[\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5 \dots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots \\ a, b, c, d, e, f \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots \end{matrix}\right]$$

**Auflösung.** Man mache die Complexionen für Zähler und Nenner, nach den Vorschriften in I und II, beyde für den gesuchten Werth n in III. Die so gefundenen Complexionen der beyderley Zähler, und so auch der

Nenner, in der Ordnung und Lage, wie sie hier (z. B. für n = 6) in I und II stehen, setze man, Glied für Glied, wie Factoren neben einander: so erhält man dadurch den Zähler und Nenner des gesuchten nten Werthes für III.

Ex. Für den 6ten Werth von z, oder für n = 6

$$zv6 = a. \left\{ \begin{matrix} 2.35 \\ 4.25 \\ 6.24 \\ 234.5 \\ 236.4 \\ 256.3 \\ 456.2 \\ 23456.1^{\circ} \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} 1^{\circ}.135 \\ 12.35 \\ 14.25 \\ 16.24 \\ 34.15 \\ 36.14 \\ 56.13 \\ 1234.5 \\ 1236.4 \\ 1256.3 \\ 1456.2 \\ 3456.1 \\ 123456.1^{\circ} \end{matrix} \right\}$$

Anmerk. 1. Da hier $1^{\circ}$ d. i. 1, im Zähler und Nenner, neben andern Ziffern (Factoren) steht: so könnte man $1^{\circ}$ hier in III, auch ganz weglassen, welches in I und II nicht geschehen darf.

Anmerk. 2. In allen drey Fällen kommen Complexionen ohne Widerholungen vor, und gehen in ihrer Ordnung, (also in I von unten herauf) gelesen, wie wachsende Zahlen fort. Rechnet man hier, wie sonst, gleichvielzifrige Complexionen zu einer Classe, so führen die Auflösungen für I und II, zu gut geordneten Complexionen und Classen *), und so auch für III,

*) Auch gehen hier, nach der Bemerkung in der Note zu S. 178 die Complexionen classenweise in directer lexikographischer Ordnung fort, wie man auch gleich übersieht, wenn man hier statt

III, wenn man, wegen der erstern, auf die getrennten, nicht auf die verbundenen Factoren und Producte Rücksicht nimmt.

Anmerk. 3. Das Fortschreitungsgesetz dieser Complexionen ist sehr einfach, und eben so die figürliche Anordnung, durch die man sie mechanisch darstellen, und von einander ableiten kann. Rechnet man die Einheiten jeder Zifer der einzelnen Complexionen zusammen: so verwandeln sich die *Combinationes simpliciter*, wie wir jetzt betrachtet haben, in *Combinationes ad definitam Summam*. Formeln dafür, so wie Tafeln von beyderley Arten von Complexionen, für die continuirlichen Brüche, ließen sich leicht mittheilen, wenn es nöthig wäre. Hier mag es genug seyn, den Zusammenhang beyderley Complexionen, und den Uebergang aus der einen Art in die andre, für eine und dieselbe Aufgabe, gezeigt zu haben.

18, I. So verschieden immer diese Auflösungen einer und derselben Aufgabe sind: so verschieden sind auch die Quellen, aus denen sie fließen. Mein Verfahren leitet Werthe aus Werthen ab, und bestimmt die Ordnung und Folge der einzelnen Complexionen, durch ein der mannichfaltigsten Abänderungen fähiges Involutionsgesetz; die Rothischen Vorschriften folgern, Complexionen aus Complexionen, in directer und umgekehrter lexikographischer Ordnung; die Burckhardtischen, Classen aus Classen, nach gutgeordneten Complexionen aber umgekehrt gut geordneter Folge derselben: alle drey, folgende (Werthe, Complexionen, Classen) aus vorhergehenden; das Toepferische, am meisten abweichende Verfahren endlich, behandelt zuerst zween ganz einfache Fälle, ohne alle Beziehung auf ein-



statt der Zahlen die Buchstaben setzt, und so die Buchstabencomplexionen aus gleichviel Elementen, als zusammengehörige Wörter ansieht.

ander, und setzt daraus den dritten allgemeinen, ganz mechanisch zusammen: die Complexionen sind hier, so wie ihre Classen, gut geordnet, die Classen gehen aber, in ununterbrochner Folge im ersten; und sprungweise im andern Falle fort.

II. Die Darstellungen in 15, 16, 17 sind unter sich, und von den meinigen, in der Ordnung, wie ihre Complexionen auf einander folgen, verschieden. So groß aber auch hierbey die Abweichung ist, so lassen sie sich dennoch insgesammt, wie ich bey näherer Untersuchung gefunden habe, aus meiner Involution (S. 31, 8) herleiten, die, wie ein wahrer Proteus, alle dafür nöthige Lagen, Formen und Gestalten annimmt. Da die Sache für die Involutionen überhaupt wichtig ist, so will ich sie hier vorlegen, und zu mehrerer Deutlichkeit, die von mir schon aufgeführten, und (S. 42) ausführlich erklärten Zeichen, in Absicht auf **Lage** und **Entwickelung**, noch etwas näher bestimmen.

Es sollen nämlich itzt, statt der dortigen, dem S in Klammern beygefügten, **einzelnen** Zifern, die zugehörigen **Anfänge** selbst, wie sie (S. 42) angegeben sind, und zwar nach Umständen, **rechts** oder **links**, dem S beygesetzt, auch, wo es nöthig ist, die Zifern des Zeigers unten mit beygefügt werden. Die Zeichen z und Z behalten ihre (S. 51 und 154) festgesetzte Bedeutung. Daraus folgt, für die nten Werthe von Z und z

$$Z\cdot vn = {}^{0.2}{}_{1}S:\ {}^{2.4}{}_{3}S;\qquad z\cdot vn = {}^{4.6}{}_{5}S:\ {}^{2.4}{}_{3}S.^{*})$$

(0, 1, 2, 3, 4 ... 2n) (1, 2, 3, 4, 5, 6 ... 2n)

auch ist $\mathfrak{S} = {}^{6.8}{}_{7}S$ und $\Sigma = {}^{8.10}{}_{9}S$ (S. 42)

(6, 7, 8 ... 2n) (8, 9, 10 ... 2n)

ferner

*) Eigentlich sollten, den kleinern Zahlen neben S (so wie unten in III) die Winkel beygefügt werden; ich habe sie aber, wegen der Schwierigkeit im Druck, bey den übrigen weggelassen.

Ferner geben $^{0.2}_{1}S = S^{2.0}_{1}$ und $^{2.4}_{3}S = S^{4.2}_{3}$ u. ſ. w. dieſelben Complexionen der Ordnung nach, aber in umgekehrter Lage. Von Involutionen wie dieſe, $S^{8.10}_{9}$ (2,3,4...10) oder $S^{8.10}_{9}$ (4,5,6...10) (wo hier die gröſsere gerade Zahl [10] die Eckzahl, und unter der nächſten geraden Zahl [8] die zunächſt gröſsere ungerade Zahl [9] ſteht, in der Folge, bey der Ableitung der Rothiſchen, Burckhardiſchen und Toepferiſchen Anordnungen, aus der, nach S. 31,8.

## III. Darſtellungen der Anordnungen (15, 16, 17) aus meiner Involution.

| $^{0.2}_{1}S$ (0, 1, 2, 3...10) | $S^{2.0}_{1}$ (0, 1, 2, 3...10) | $S^{8.10}_{9}$ (0, 1, 2...8, 9, 10) |
|---|---|---|
| 0.2 \| 4.6.8.10 | 10.8.6.4. \| 2.0 | 0.2.4.6. \| 8.10 |
| 1 \| 4.6.8.10 | 10.8.6.4. \| 1 | 0.2.4.6. \| 9 |
| 0.3.6.8.10 | 10.8.6.3.0 | 0.2.4.7.10 |
| 0.2.5.8.10 | 10.8.5.2.0 | 0.2.5.8.10 |
| 1.5.8.10 | 10.8.5.1 | 0.2.5.9. |
| 0.2.4.7.10 | 10.7.4.2. | 0.3.6.8.10 |
| 1.4.7.10 | 10.7.4.1 | 0.3.6.9 |
| 0.3.7.10 | 10.7.3.0 | 0.3.7.10 |
| 0.2.4.6.9 | 9.6.4.2. | 1.4.6.8.10 |
| 1.4.6.9 | 9.6.4.1 | 1.4.6.9 |
| 0.3.6.9 | 9.6.3.0 | 1.4.7.10 |
| 0.2.5.9 | 9.5.2.0 | 1.5.8.10 |
| 1.5.9 | 9.5.1 | 1.5.9 |

A — B

Dieſe Involutionen ſtellen ſämtlich den 5ten Werth des Zählers (und dadurch auch des Nenners, S. 160) bey-

beyſpielsweiſe dar, mit ihren Anfängen im Winkel, aus denen das übrige entſteht. Eben ſo für den nten Werth, wenn man $n$ ſtatt 5 und 2 $n$ für 10 ſetzt u. ſ. w. Die nähere Vergleichung dieſer Darſtellungen lehrt folgendes.

a) Den Anfang macht meine Involution ${}^{0.2}_{1}S$, die eben ſo für den 5ten Werth aus dem Anfange ${}^{0.2}_{1}$ bis zu den Endzahlen 10 und 9 fortgeſetzt (S. 55) entſteht, wie die Involutionen S und Σ (S. 41) aus ihren Anfängen, nach dem Schema S. 35, das man auch auf die hieſige erſte Darſtellung reducirt, wenn man dort überall 1 wegläßt, und von jeder der übrigen Zahlen der Complexionen 4 abzieht (S. 42).

b) Die zweyte Darſtellung, für ${}^{2.0}S^{1}$ iſt (wie auch ſchon der Anfang ${}^{2.0}_{1}$, rechter Hand an S geſetzt, andeutet) nichts weiter, als meine Involution rückwärts, von der Rechten nach der Linken zu, geſchrieben; oder jene erſte (in a) um die Colonne der Zahlen 10, 9, wie um eine unbewegliche Axe gedreht, und auf die andere Seite gelegt. Dieſe Darſtellung kommt mit der zweyten Rothiſchen (15, IX, Ex.) überein, in welcher die Complexionen in umgekehrter lexikographiſcher Ordnung fortgehen. Eben ſo zeigt auch das Schema, S. 35, auf die andere Seite gelegt, ſo daß die Einſen nun Rechter Hand zu ſtehen kommen, die umgekehrte lexikographiſche Ordnung.

c) Setzt man ſtatt jeder Zahl meiner Involution, in der zweyten Lage (b) ihre Ergänzung zu 10, alſo 0 ſtatt 10, und 1 ſtatt 9, und 2 ſtatt 8 u. ſ. w. 10 ſtatt 0; oder, ſchreibt man die Involution ${}^{8.10}S^{9}$ gerade zu aus dem Anfange ${}^{8.10}_{9}$, von der Rechten nach der Linken zu: ſo erhält man obige dritte Darſtellung, und mit ihr die erſte Rothiſche (15, IV, Ex.) bey welcher die Complexionen in directer lexikographiſcher Ordnung fortgehen.

Bey

Bey der hier (in c) zu schreibenden Involution kommt man immer von gröſsern Zahlen auf kleinere und hört zuletzt mit 0 und 1, auf (wie in a und b mit 10 und 9) auch schreitet man hier von kleinern geraden Zahlen auf gröſsere ungerade fort (von 8 auf 9, von 6 auf 7, von 4 auf 5 u. ſ. w. von 0 auf 1) nicht wie in a und b (von 2 auf 1, von 4 auf 3, von 6 auf 5 u. ſ. w. von 10 auf 9).

d) Jeder neue Zuſatz, um welchen meine Involution erweitert wird, geſchieht durch wiederholtes Schreiben zweyer nächſten Zahlen, mit Beyfügung der zugehörigen ſchon vorher evolvirten Werthe (S. 36, A, B). Dieſe Wiederholungen der beyderley Zahlen, fallen allemal in eine verticale Reihe, und ſo kann man auch die Zahlen der einzelnen Complexionen der beyzufügenden Werthe, in verticalen Reihen ihnen beyſchreiben. So erhält man meine Involution durch Schreiben ihrer Zahlen in die Tiefe. Dies Verfahren iſt von dem Rothiſchen (15, XIII, XIV) blos dadurch unterſchieden, daß bey mir, außer der letzten verticalen Reihe, alle übrigen aus Stücken der vorhergehenden zuſammengeſetzt werden, da hingegen Herrn Rothens Vorſchrift (15, XIV), mit Hülfe der Tafel (15, XIII) eine verticale Reihe nach der andern, mit Beziehung jeder folgenden auf die nächſtvorhergehende (15, XIII, 3) ſchaft.

e) Jede der drey vorſtehenden Anordnungen enthält den Zähler und Nenner, beyde für Z und z (S. 51,). Man ſchneide z. B. die dritte Darſtellung in der Richtung und Lage von AB: ſo zerfällt das Ganze in zwey Stücke, wie ſie die Gleichung

$$S^{9}_{(0;1,2,3\ldots10)}{}^{8.10} = 0.S^{9}_{(2,3,4\ldots10)}{}^{8.10} + 1.S^{9}_{(4,5,6,\ldots10)}{}^{8.10}$$

vorlegt, wo ſich die mit 0 und 1 multiplicirten Stücke aus dem Ganzen durch Winkel ausſchneiden, ſelbſt (nach

S. 42) aus einander herleiten, und so $zv_5$ und $Zv_5$ durch sie ausdrücken lassen.

Hier war es nothwendig, die Zeiger für das erste und zweyte Glied der zweyten Hälfte obiger Gleichung mit 2 und 4 anzufangen, damit man wisse, wo die von der Rechten nach der Linken, nach dem gegebenen Anfange zu construirende Insolution aufhören müsse: mit der verticalen Reihe nämlich, in welcher die niedrigste Zifer hier (2 oder 4) mit vorkommt.

f) Dieser Durchschnitt A B (e) kann noch weiter so benutzt werden. Unter ihm liegen die Complexionen der Zähler für z (e), in directer lexikographischer Ordnung (c), also von unten herauf in umgekehrter. In der letzten Ordnung gehen auch die Burckhardtischen Complexionen (16, C) fort, aber classenweise. Man lese also von den Complexionen hier unter dem Striche A B, immer die gleichvielzifrigen, aber von unten herauf, zusammen, so erhält man dadurch nach und nach alle Burckhardtische Classen, mit ihren Complexionen, in der Ordnung, wie in 16, C, S. 177.

A——————B

| | | |
|---|---|---|
| (1) | 1.4.6.8.10 | 12.14 |
| (6) | 1.4.6.8.10 | 13 |
| (5) | 1.4.6.8.11.14 | |
| (4) | 1.4.6.9.12.14 | |
| (12) | 1.4.6.9.13 | |
| (3) | 1.4.7.10.12.14 | |
| (11) | 1.4.7.10.13 | |
| (10) | 1.4.7.11.14 | |
| (2) | 1.5.8.10.12.14 | |
| (9) | 1.5.8.10.13 | |
| (8) | 1.5.8.11.14 | |
| (7) | 1.5.9.12.14 | |
| (13) | 1.5.9.13 | |

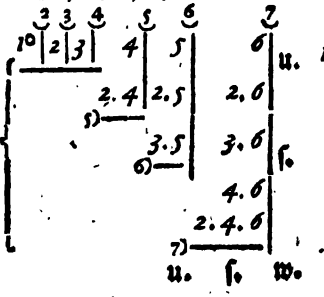
Weil bey den wenigen Complexionen der obigen dritten Darstellung (S. 185) unter dem Striche A B keine Classe von einer mindervielzifrigen Complexion unterbrochen wird, so habe ich, um auch diesen Erfolg vorzulegen, die Complexionen für den 7den Werth, hier zur Seite unter A B entwickelt, unabhängig von den Complexionen über A B, die man hier nicht braucht. Die

in

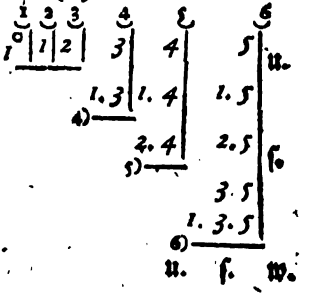
in Klammern daneben ſtehenden Zahlen, zeigen, in welcher Ordnung die Complexionen in den Burckhardtiſchen Claſſen auf einander folgen, und beſtätigen zugleich die dafür gegebene Anweiſung.

g) Für die Toepferiſchen Auflöſungen (17, I-III) gelten folgende Involutionen:

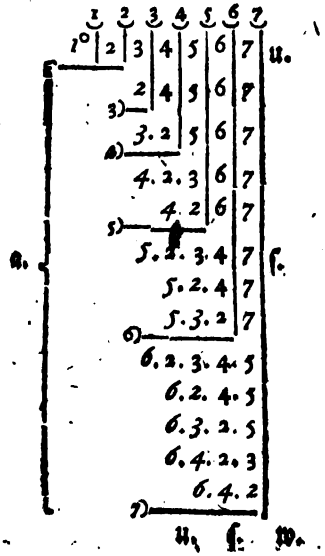
(A) Zähler.



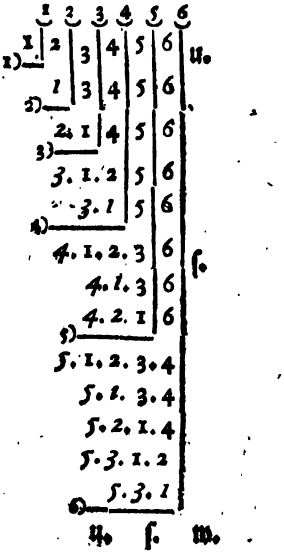
(B) Nenner.



(C) Zähler.



(D) Nenner.



Die

Die beyden ersten (A und B) für den ersten Fall und den dortigen Zeiger (S. 179), die beyden letzten (C und D) für den dritten Fall und den dortigen Zeiger (S. 181). Die beyden Zähler (A und C) sind hier, bis auf den 7ten Werth entwickelt, um den Fortgang desto besser nachzuweisen. Für die Toepferischen Exempel (S. 179, 181, 182) braucht man nur die Involution bis zum 6ten Werthe. Für jeden einzelnen (durch kleine Ziffern nachgewiesenen) Werth gelten auch hier (wie immer) alle Zahlencomplexionen, von dem ersten Gliede (1° oder 1) an bis zum zugehörigen Winkel.

Die Involutionen A und B für den ersten Fall (S. 179) sind nach der Formel S. 62, II (das dortige $a = 1$, und $n - 1$ statt $2n - 1$ gesetzt) entworfen, und bedürfen so keiner Erläuterung.

Die Involutionen C und D für den dritten Fall (S. 181) lassen sich nach der Formel S. 63, Zus. (n statt des dortigen $2n$ gesetzt) aus den Anfängen $\frac{1°|2|3|}{2|}$ und $\frac{1|2|}{1|}$ jedoch so, ableiten, daß, so bald der folgende Werth gefunden ist, den Complexionen, die aus dem vorletzten Werthe heruntergerückt werden, die Zahlen (3 für den Zähler und 2 für den Nenner) vorgeschrieben, und so auch für den nächstfolgenden Werth (4 für den Zähler und 3 für den Nenner) u. s. w. beygefügt, und zwar, ehe noch der folgende Werth entwickelt wird, beygefügt werde.

Auch kann man hier C und D aus $\gamma$ und $\delta$ (S. 55) ableiten, wenn man (n statt $2n$ und $n - 1$ statt $2n - 1$) überhaupt, statt jeder dortigen geraden Zahl ihre Hälfte, statt jeder dortigen ungeraden Zahl ihre kleinere Hälfte, und a statt 1 in $\gamma$ setzt. In $\delta$ näm-

lich

lich kommt 1 nicht vor. So werden hier die verschiedenen Gesetze, nach denen die beyderley Complexionen in III fortgehen, in eine Involution zusammengefaßt.

Die Involutionen für den zweyten Fall (S. 180) die sich aus den Anfängen $\underline{1^{\circ}|2|}$ und $\underline{\underline{1}|2|}$ $\quad 1^{\circ}$ nach der Formel S. 63 Zus. (n statt 2n gesetzt) unmittelbar herleiten lassen, habe ich hier nicht beygebracht, weil sich selbige leicht, vermittelst der Complexionen für den dritten Fall (hier aus C, D) herstellen lassen. Man darf nur die Cursivziffern von den Complexionen wegnehmen, und da, wo nach Wegnahme dieser Zifern keine von den andern Zifern am Scheitel des Winkels übrig bliebe, $1^{\circ}$ an diese Stelle setzen. So wäre für den Zähler, in den Stellen, wo hier 2 und 4. 2 und 6. 4. 2 steht, $1^{\circ}$; und eben so im Nenner, wo hier 1 und 3. 1 und 5. 3. 1 steht, $1^{\circ}$ zu setzen.

Die Involutionen für den ersten Fall lassen sich zwar auch aus den dritten herleiten; dennoch habe ich sie besonders aufgestellt, weil sie nicht viel Raum einnehmen, und hier im dritten Fall rückwärts geschrieben vorkommen.

Aus der letzten Hälfte dieses Abschnitts ergiebt sich ein sehr wichtiger Vortheil der combinatorischen Analytik, nach welchem sich die Veränderungen, die man sonst gewöhnlich mit den analytischen Formeln vornimmt, um sie für diese oder jene Absicht bequemer einzurichten, hier mit den Resultaten selbst vornehmen lassen. Hierbey zeigt sich der große Umfang meiner Involution, die überdies jede andere, auch noch so leichte Regel der Entwickelung, an Leichtigkeit der Darstellung noch übertrift, und wegen der dafür aufgefundenen Factoren (S. 43-45; 57-59; 64, 65) in der Anwendung auf vorkommende Fälle vorzüglich bequem ist. Uebrigens habe

ich fast durchgängig die Involutionen mit ihren eingeschriebenen Winkeln dargestellt; welches blos der leichten Nachweisung wegen (S. 36, A) anfänglich nützlich, aber keinesweges nothwendig ist.

20. Noch muß ich hier den wahren Gesichtspunct angeben, aus welchem man die Abhandlung über die continuirlichen Brüche, in diesem und dem vorigen Hefte, zu betrachten hat, um sie nicht falsch zu beurtheilen. Die mitgetheilten Auflösungen und Formeln gehen sämtlich auf die Bestimmung der successiven, oder überhaupt jeder auch außer der Ordnung verlangten, Werthe dieser Brüche; andere damit verwandte Untersuchungen: die Summe für unendlich viel Glieder bestimmter Arten und Gestalten, für periodische Zähler und Nenner, für die Anzahl der Glieder u. d. g. (denn die Rothische Tafel [S. 172] ist nur beyläufig beygebracht worden) habe ich nicht in Betrachtung gezogen. Ich habe nämlich hier keine ausführliche Untersuchung und Beantwortung aller Fragen, die bey continuirlichen Brüchen vorkommen können, liefern, sondern blos die Anwendung einer wichtigen und sich weiter erstreckenden combinatorischen Involution mit ihren mannichfaltigen Modificationen zeigen wollen *). Dafür waren denn nun diese Brüche vorzüglich und um so mehr bequem: da die

*) Auch bey andern Anwendungen auf dergleichen Brüche wird man meine Zeichen mit Nutzen gebrauchen. So kommt z. B. der Eulersche Ausdruck für den Bruch x (Introd. ad Anal. Inf. §. 364) aus den Unterschieden der successiven Werthe (daf. §. 363), in meinen Zeichen:

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1.3}{A.B} + \frac{1.3.5}{B.C} - \frac{1.3.5.7}{C.D} + \text{etc.}$$

Die Werthe für A, B, C, D... giebt hier (6. I, II und VI) und die Involution 3 (S. 55). Meine z, A, B, C, D... sind nämlich hier, mit den Eulerischen x, P, Q, R, S... (§. 367) gleichgültig; auch stehen hier die Localzeichen 1, 3, 5, 7... für die dortigen α, β, γ, δ...

die sie betreffende Aufgabe so ganz isolirt dasteht; die combinatorische Behandlung derselben wenig Vorkenntnisse in der Combinationslehre voraussetzt, und man den Leser ohne weitere Hülfsmittel von außen, sogleich zur Sache selbst führen kann: da diese Brüche zugleich ein sehr einfaches Beyspiel (1. S. 49; 154, 10) von dem darstellen, was ich continuirliche Substitution (Nov. Syst. XXVII, XXVIII) zu nennen pflege, daher denn auch die dabey gebrauchten Involutionen sich weiter auf die so wichtigen Series reeurrentes anwenden und erstrecken lassen; und weil es endlich wenige Aufgaben giebt, bey welchen sich, in combinatorischer Rücksicht, so viel bemerken und erinnern läßt, als bey dieser ganz einfachen Aufgabe, die man daher gleichsam als eine vorbereitende auf andere, ungleich mehr zusammengesetzte, ansehen kann. Dieser letzte Umstand vornehmlich, den ich zum Vortheile derjenigen Leser benutzt habe, die sich über die (wie es scheint, noch immer sehr wenig bekannte) Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis näher unterrichten wollen, wird zugleich die Ausführlichkeit meiner Abhandlung über diese Brüche hinlänglich rechtfertigen; denn wenn es blos um geschmeidige, weiter ausreichende, oder leichter zum Ziele führende Formeln, als man bisher gekannt hat, zu thun gewesen wäre: so hätte man nur die in C und D (S. 57 und 58) vorkommenden, und die weitere Anwendung derselben (S. 155, 157) aufstellen dürfen, die ihre Bequemlichkeit beym wirklichem Gebrauche in vorkommenden Fällen (vermittelst der Elemente S. 59) aufs vollkommenste bewähren.

25. Nach meinem (S. 45, 46, Anmerk. 3 und 4 gethanen) Versprechen, sollte ich nun noch zeigen, wie nahe mehrere große Analysten der Erfindung von Involutionen gewesen sind, und wie sich ihre Vorschriften, wenn man sie auf eine figürliche Anordnung bringt, die sich nach combinatorischen Begriffen von selbst ergiebt, theils

ansehnlich verkürzen, theils ungleich bequemer ausführen und auf allgemeinere Vorstellungen bringen lassen. Ich kann aber diese, wie man finden wird, lehrreiche Untersuchung, da sie gegenwärtige Abhandlung zu sehr verlängern würde, voritzt nicht beybringen. Zum Schluß also nur noch folgende, in mehrerer Rücksicht wichtige, Bemerkung:

Wenn man den Reichthum der combinatorischen Hülfsmittel, und die mannichfaltigen Aufschlüsse, die sie für die gesuchten Resultate, auf so ganz verschiedenen Wegen gewähren, nicht kennt; und in diesem Falle ist Jeder, der sich mit combinatorischen Auflösungen analytischer Aufgaben entweder gar nicht, oder doch nicht in der hier gezeigten Ausdehnung, abgegeben hat: so könnte man, wenn man erführe, ein gesuchtes Resultat lasse sich combinatorisch, auf eine überaus leichte und höchst natürliche Art darstellen, wohl auf den sehr irrigen Gedanken gerathen: „diese Darstellung müsse eine einzige ihrer Art seyn.“ Daß man sich aber dafür nicht unbedingt und ohne weitern Beweis, auf die unveränderliche Natur der Dinge und eine innere Nothwendigkeit berufen könne, wird diese Abhandlung sehr einleuchtend darthun, wobey man sich gern im voraus bescheiden wird, daß die hier benutzten Hülfsmittel wohl nicht die einzigen seyn möchten, welche die Combinationslehre für die Analysis darbietet. Mehrere derselben, zum Theil von noch ungleich größerm Umfange, habe ich in meiner Abhandlung über combinatorische Involutionen, im ersten Hefte dieses Archivs vorgelegt, die auch bereits insgesamt schon vorher in Ausübung gebracht, und zu Auflösung der verwickeltsten Aufgaben sind angewendet worden. Diese Mannichfaltigkeit der Hülfsmittel, und die verschiedenen Wege, die man oft, wie sich hier gezeigt hat, dabey gehen kann, machen bestimmte Vorschriften ihrer Entwickelung

und

und Darstellung, (so leicht solche Vorschriften auch immer an sich seyn mögen, eben deswegen, weil es combinatorische sind) unumgänglich nothwendig. Der wissenschaftliche Vortrag fordert ohnehin dergleichen Regeln allemal, und man darf, um sicher zu gehen und keinen Anstoß übrig zu lassen, der bey der Anwendung aufhalten oder wohl gar zu Fehltritten verleiten könnte, der eigenen Einsicht der Leser, oder dem gesunden Menschenverstande, nichts hierbey überlassen.—

## IV.

## Zwo Fragen zur Assecuranzrechnung.

### I.

1. Wenn ich assecuriren lasse, zahle ich dem Assecurateur etwas gewisses Procent von der Summe, die assecurirt wird, das heißt die Prämie.

Kömmt das Assecurirte glücklich an, so habe ich also, was ich assecuriren ließe, weniger der von mir ausgezahlten Prämie.

Verunglückt das Assecurirte, so muß der Assecurateur es ersetzen, hat aber seine Prämie schon bekommen. Ich erhalte also wiederum nur das Assecurirte weniger der Prämie.

2. Lasse ich nur so viel assecuriren, als in der That der Gefahr verlohren zu gehen ausgesetzt ist; als ich wirklich wage:

Und geht das verlohren:

So ersetzt mir der Assecurateur, nicht das Verlohrne ganz, sondern das Verlohrne weniger der Prämie.

3. Will ich also das Verlohrne ganz ersetzt haben, so muß ich mehr assecuriren lassen, als ich wirklich wage. Kommt das, was ich gewagt habe an, so hat mich mein Verfahren eine stärkere Abgabe an den Assecurateur gekostet, als ich ausgezahlt hätte, wenn ich nur das Gewagte hätte assecuriren lassen. Vielleicht ergebe ich mich in diesen stärkern Aufwand, um sicher zu seyn, daß mir im entgegengesetzten Falle mein völliger Verlust ersetzt wird — wenn der Assecurateur nicht zuvor mit der erhaltenen Prämie davon läuft.

4. Das führt auf folgende Frage:

Die Prämie ist b Procent, oder es verhält sich allemal die assecurirte Summe zur Prämie = 100 : b.

Ich wage wirklich a, und lasse x assecuriren, damit die Absicht (3) erreicht wird.

Die Prämie von x ist $\frac{b.x}{100}$. Also

$$x - \frac{b.x}{100} = a \text{ und } x = \frac{100.a}{100-b}.$$

5. **Exempel.** Die Prämie beträgt 30 (= b) Procent. Ich wage wirklich 315 (= a), so lasse ich assecuriren $\frac{31500}{70} = 450$.

Dafür zahle ich als Prämie 450. 0,3 = 135; Wenn also meine 315 verunglücken, bekomme ich statt derselben 450; Davon die ausgezahlte Prämie abgerechnet, habe ich noch die gewagten 315 völlig.

6. Wieviel ich als Prämie mehr bezahle (3) läßt sich allgemein so ausdrücken. Von x ist die Prämie $\frac{b.x}{100}$; Von a wäre sie $\frac{b.a}{100}$; also bezahle ich mehr

$$\frac{b}{100}.(x-a) = \frac{a.b^2}{100.(100-b)}.$$

Im

Im Exempel (5) $\frac{315.900}{100.70} = 45.0,9 = 40,5$;
Nämlich $135 - 94,5 = 40.5 = 315.0,3 =$ der Prämie von 315.

7. In: Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences, to the End of the Year 1783; Vol. I. Boſton 1785; iſt in der erſten Abtheilung, welche mathematiſche Aufſätze enthält, der VI; überſchrieben: Several Ways of determining what ſum is to be inſured on an Adventure, that the whole intereſt may be covered. By *Mercator*. Die Ueberſchrift enthält die Frage (4). Die letzte und kürzeſte Beantwortung iſt eben die in (4) gegebene, nur mit Worten ausgedruckt, nicht durch eine Formel in Buchſtaben. Zuvor ein paar etwas weitläuftigere.

8. Die erſte läßt ſich ſo ausdrücken:

$$x = a.\left(\frac{b}{100} + \frac{b.\ b.}{100.100} + \frac{b.\ b.\ b}{100.100.100} \cdots\right)$$

welche unendliche Reihe allerdings aus dem Quotienten (4) entwickelt wird (Meine Anal. endl. Gr. [7]). Die Glieder dieſer Reihe werden nach Mercators Vorſchrift einzeln berechnet, bis ſie unbeträchtlich werden, und dann zuſammen addirt.

Die andere heißt in meinen Zeichen $a - \frac{a.b}{100} : a = a : x$.

Sölche weitläuftigere Vorſchriften ſind nöthig, wenn man alles mechaniſch auf Regul Detri bringen will. Bey der zweyten wird ganz überflüßig mit der gewagten Summe, einmal multiplicirt, darnach wiederum dividirt.

9. Die Frage iſt ohngefähr ſo was, wie die: Was man jetzo jemanden, der Geld borgt, auszahlen muß,

wenn man die jährlichen Intereſſen ſogleich abzieht. In meiner Fortſetzung der Rechenk. 122 Seite. Nur wird da weniger bezahlt, als das Capital beträgt, hier mehr aſſecurirt als das Gewagte beträgt.

## II.

1. Mevius hat die Größe M aſſecurirt für eine Prämie von m Procent, die er erhalten hat.

Das heißt, er hat $\frac{M.m}{100}$ als Prämie bekommen.

2. Es iſt aber ausgemacht worden: Wenn die Größe M nicht ganz abgeht, ſondern nur $\mathfrak{M}$, was geringeres als M; ſo behält er nicht die Prämie (1) ganz, ſondern nur ſo viel, als für den Theil $\mathfrak{M}$ gehört; alſo

$$M : \mathfrak{M} = \frac{Mm}{100} : \frac{\mathfrak{M}m}{100}$$

das letzte Glied der Proportion zeigt an, was er behält.

3. Er ſollte alſo eigentlich zurückgeben, was für ein Theil der Prämie für $M - \mathfrak{M}$ gehört.

4. Nun aber iſt noch ausgemacht, daß er noch von $M - \mathfrak{M}$; $\mu$ Procent behält, alſo noch

$$(M - \mathfrak{M}).\frac{\mu}{100}$$

5. Er behält alſo (2; 4)

$$\frac{\mathfrak{M}.m + (M - \mathfrak{M}).\mu}{100}$$

6. Giebt alſo zurück (1)

$\frac{(M-\mathfrak{M}).(m-\mu)}{100}$; Nämlich $\frac{Mm}{100}$ — dem was er behält (5).

7. Er-

7. Gesetzt es wären mehr Assecuratoren, die zusammen für eine Summe S assecurirt hätten; Von dieser Summe wird nur T abgesandt. So ist S : T = M : M also

$$M = \frac{M.T}{S}; \quad M - M = \frac{S-T}{S}.M$$

8. Und was der Assecurator zu viel giebt (5)

$$= \frac{S-T}{S}.\frac{m-\mu}{100}.M$$

9. **Exempel:** Aus Reimers Anweisung zur Rechenkunst (Hamb. 1776) 232. §. Das zweyte Exempel.

Es werden auf ungewisse Ladung, nämlich 20 Pack Juchten von Archangel, 20000 Mark Banco assecurirt; als von

| | Mark, | zu pCent | | Mark, | zu pCent |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4000 | $3\frac{1}{2}$ | C | 6000 | 4; |
| B | 4000 | $3\frac{1}{2}$ | D | 6000 | $4\frac{1}{2}$; |

Auf erhaltene Nachricht und Connossement wird befunden, daß nur 16 Packe verladen sind. Auf Anzeige dessen sind die Assurabeurs verpflichtet, gegen $\frac{1}{2}$ proCent Ristorno, die Prämie von 4000 Mark verhältnißmäßig zurück zu geben. Frage: 1) Wie viel jeder an Capital zu ristorniren schuldig? 2) Wieviel der Ristorno von jedem Assurabeur sich beträgt?

10. Die Bedeutung der Frage ist: Die Assurabeurs haben zusammen Prämie für eine Versicherung auf 20000 empfangen: Weil nun ihre Versicherung nur für 16000 gebraucht wird, so soll jeder von seiner Prämie so viel zurück geben, als das beträgt was in dem 4000, dem Theile, den er versichert hat, gemäß ist. Man fragt also: 1) wieviel von den 4000 ist dem Theile, den er versichert hat, gemäß? 2) Wieviel giebt er wieder, un-

ter der Vorausſetzung, daß er von dem Theile der 4000, der mit zu ſeiner Verſicherung gehört, von dem, was er am Capitale riſtornirt, $\frac{1}{2}$ Procent behalten darf?

11. So hat der erſte 4000 Mark verſichert, und dafür $4000.\frac{3,5}{100} = 4.35 = 140$ Prämie bekommen.

Weil er nun auf den 5ten Theil der ganzen Summe verſichert hatte, ſo folgt, daß ſeine Verſicherung eben ſo auch für $\frac{16000}{5}$ gebraucht wird.

Was er an Capitale zu riſtorniren ſchuldig iſt, beträgt alſo auch den 5ten Theil der 4000, für die nun keine Verſicherung verlangt wird, alſo 800;

Und von dieſen 800 behält er $\frac{1}{2}$ Procent, alſo 4.

Hatte aber von ihnen als Prämie bekommen $800.\frac{3,5}{1000} = 8.3,5 = 28.$

Giebt alſo zurück 24.

Ich habe um gröſſerer Deutlichkeit willen dieſes Exempel durchgeführt. Meine vorigen Formeln laſſen ſich hier ſo brauchen. (7; 8)

13. $S = 20000$, $T = 16000$, $\frac{S-T}{S} = \frac{1}{5}$. $\mu = 0,5$.

14. Nun iſt für

| | M | m | M — M | m — μ | Riſtorno |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4000 | 3,5 | 800 | 3 | 24 |
| B | 4000 | 3,5 | 800 | 3 | 24 |
| C | 6000 | 4 | 1200 | 3,5 | 42 |
| D | 6000 | 4,5 | 1200 | 4 | 48 |

15. Die

15. Die erste Frage (9) wird durch M — M beantwortet. Jeder der beyden ersten versichert nur 800 weniger als er anfangs versichert hatte, und jeder der beyden letzten 1200 weniger, so versichern sie zusammen 4000 weniger.

16. Auf die zweyte Frage steht die Antwort unter: Ristorno. Jeder der beyden ersten giebt 24 zurück; der dritte 42; der vierte 48.

17. Die Zahlen sind wie beym Reimer (9). Die Art aber, sie zu finden, steht bey ihm nicht aus einander gesetzt.

A. G. Kästner.

## V.

## Ueber den Tayloriſchen Satz, ſeine verſchiedenen Formen und Erweiterungen; von dem Herausgeber.

(Man ſehe Heft I. S. 92, 93 und die dortige Note.)

---

### Tayloriſches Theorem.

#### A. Verwandlung der Functionen durch Aenderung der in ihnen vorkommenden variabeln Größen.

1. Für die Reihe $y, y, y, y \ldots$ (S. 93, *a*, 1) iſt das allgemeine Glied (S. 97, VII) oder

$$\overset{n}{y} = 1.\overset{0}{y} + {}^{n}\mathfrak{A}\,\Delta^{1}\overset{0}{y} + {}^{n}\mathfrak{B}\,\Delta^{2}\overset{0}{y} \ldots + {}^{n}\mathfrak{N}\,\Delta^{n}\overset{0}{y}$$

2. Nun ſey $\overset{0}{y}$ d. i. y eine Function von x, und es verwandle

$$\begin{array}{lllll} & 0 & 1 & 2 & n \\ \text{ſich} & y \text{ in } y; & y; \ldots & y & \\ \text{wenn} & x \text{ in } x \pm 1\Delta x; & x \pm 2\Delta x; & \ldots x \pm n\Delta x & \end{array}$$

ſich ändert (wo alſo $y$ den Werth der Funktion $y$ für den Fall ausdrückt, wenn $x \pm n\Delta x$ aus $x$ geworden iſt): ſo läßt ſich dieſe Beziehung des $y$ auf $x$, durch eine leichte Verwandlung der Formel (1), ohne ihren Werth zu ändern, ſo angeben:

$$\overset{n}{y} = y \pm n\Delta x \frac{\Delta^1 y}{\Delta x} + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta x^2 \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \pm \text{etc}$$

Anm. Den Satz, in dieſer Geſtalt, hat Taylor (Meth. Increm. Dir. et Inv. Prop. VII und Cor. I) zuerſt angegeben, wie man findet, wenn man die Zeichen

von Taylor: $x;\ \dot{x};\ \ddot{x};\ \dddot{x};\ z;\ \dot{z}$

in hieſige: $y;\ \Delta^1 y;\ \Delta^2 y;\ \Delta^3 y;\ x;\ \Delta x$

verwandelt, und ſtatt der dortigen $v;\ \dot{v};\ \ddot{v};\ \dddot{v}\ldots$ hier $n\Delta x;\ (n-1)\Delta x;\ (n-2)\Delta x;\ (n-3)\Delta x;\ldots$ ſetzt. Der Satz *) geht zunächſt auf endliche Differenzen (Incrementa, Decrementa) und dient als Grundlage für verſchwindende Differentialen (Fluxiones: Incrementa, Decrementa, naſcentia enneſcentia).

3. Für die endliche Größe $n\Delta x = \omega$, kann man $\Delta x$ ſo klein, folglich $n$ ſo groß annehmen, als man will. Setzt man alſo anſtatt

der

*) In Taylors Sprache: Quo tempore $z$ (hier $x$) *creſcendo* fit $z + v$ (d. i. $x + \Delta x$), dico, $x$ (hier $y$) item *creſcendo* fieri: $x + \dot{x}\frac{v}{1z} + \ddot{x}\frac{vv}{1.2z^2} + \text{etc}$ (d. i. $y + n\Delta x \frac{\Delta^1 y}{\Delta x} + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta x^2 \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \text{etc}$, wie oben) Prop. VII. p. 21. Wie *decreſcendo* ſich in den ungeraden Stellen die Zeichen ändern: Ebendaſ. Cor. I. p. 23.

der Quotienten: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; etc

ihre Gränzverhältniſſe: $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; etc

ſo muß man auch ſtatt der Factoren, die in jene Quotienten multiplicirt ſind, ihre Gränzen ſetzen. Nun verhält ſich, für jeden endlichen Werth von $\omega$, n umgekehrt wie $\Delta x$, und für verſchwindende $\Delta x$ wächſt n unendlich. Folglich iſt $n\Delta x = ndx = \omega$; $n.n-1.\Delta x^2 = n^2 dx^2 = \omega^2$; $n.n-1.n-2.\Delta x^3 = n^3 dx^3 = \omega^3$; u. ſ. w. Wenn alſo x ſich in $x \pm \omega$ verwandelt, oder dieſes überall ſtatt jenem in die Function y geſetzt wird, ſo verwandelt ſich y in

$$y \pm \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 y}{1.2\,dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc}$$

**Anmerk.** Dieſen Satz, den Taylor (l. c. Prop. VII. Cor. II.) zuerſt ſo ausgedruckt, und ungefähr eben ſo aus (2) hergeleitet hat *), nennt man das Tayloriſche Theorem. Es zeigt, wie Aenderungen der Functionen, mit Aenderungen der veränderlichen Gröſſen in ihnen, zuſammenhängen: was aus der Function (y) wird, wenn die variable Größe (x) in ihr ſich ändert; wenn x ſich in $x \pm \omega$ verwandelt, oder dieſes ſtatt jenem überall in die Function geſetzt wird.

4. Wenn

*) In ſeiner Sprache nämlich, und in ſeinen Zeichen: Pro incrementis evaneſcentibus ſcribantur fluxiones ipſis proportionales [$\dot{d}^n y : \dot{d}x^n$ pro $\Delta^n y : \Delta x^n$] factis iam omnibus $\dot{v}, v, \dot{v}, v, \dot{v}$ etc aequalibus [$= n\dot{d}x = \omega$] etc. Einen ausführlichen Beweis dieſes wichtigen Satzes hat neuerlich Herr Prof. Wleiderer (Theorematis Tayloriani Demonſtratio, Tub. 1789) gegeben.

4. Wenn demnach y eine Function von x, und z eine ähnliche Function von $x \pm \omega$, d. i. $y = \varphi x$ und $z = \varphi(x \pm \omega)$; wo also z den Werth der veränderten Functionen y angiebt: so ist nach dem Taylorischen Satze (3)

$$z = y \pm \frac{\omega dy}{1 dx} + \frac{\omega^2 d^2 y}{1.2 dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \text{etc}$$

$$\varphi(x \pm \omega) = \varphi x \pm \frac{\omega d\varphi x}{1 dx} + \frac{\omega^2 d^2 \varphi x}{1.2 dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3 \varphi x}{1.2.3 dx^3} + \text{etc}$$

In der zweyten Gleichung sind nämlich die Ausdrücke für z und y selbst gesetzt. Eben so ist, für $v = x \pm \omega$, die durch $\psi$ bezeichnete Function von v, d. i.

$$\psi v = \psi x \pm \frac{\omega d\psi x}{1 dx} + \frac{\omega^2 d^2 \psi x}{1.2 dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3 \psi x}{1.2.3 dx^3} + \text{etc}$$

Das sind die gewöhnlichen Formen und Gestalten, in welchen der Taylorsche Satz erscheint. Auch kann man hier für die veränderliche Größe x und die endliche $\omega$, was man will, setzen; selbst $\omega$ als eine veränderliche Größe annehmen. Die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc lassen sich unabhängig von $\omega$ finden, und so ist es gleichgültig, ob $\omega$ constant ist oder variabel (Eul. Inst. Calc. Diff. II. §. 66). Die Reihe für z convergirt um so schneller, je kleiner die Größe $\omega$ ist.

Aufgabe. Den Werth der Function $(x \pm a)^n$ in einer Reihe auszudrücken.

Auflösung. Man setze $y = x^n$, und nehme an, x ändere sich (wachsend oder abnehmend) um a, so wird sich y in $z = (x \pm a)^n$ verwandeln, und den verlangten Werth durch die Reihe (in 4) darstellen, wenn man darin $\omega = a$ setzt, und die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

durch

durch fortgeſetzte Differentiation von $y = x^n$, für conſtante $dx$, gehörig entwickelt.

Nun iſt $\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2}$;

$\frac{d^3y}{dx^3} = n.n-1.n-2.x^{n-3}$; u. ſ. w. Das giebt z oder

$(x \pm a)^n = x^n \pm {}^n\mathfrak{A}x^{n-1}a^1 + {}^n\mathfrak{B}x^{n-2}a^2 \pm {}^n\mathfrak{C}x^{n-3}a^3 + \text{etc}$

die bekannte Formel für Potenzen binomiſcher Größen.

**Anmerk.** Das Newtoniſche Binomialtheorem ſteht alſo mit dem Tayloriſchen Satze (wie auch ſchon die Form der Gleichung 4 zu erkennen giebt) im engſten Zuſammenhange. Taylor (Meth. Incr. Prop. VII) ſetzt bey ſeinem Theorem das Newtoniſche als bekannt voraus. Umgekehrt kann, wie hier geſchehen, dieſes wieder aus jenem abgeleitet werden.

5. Wenn man (in 4) $\omega = \Delta x$ ſetzt, ſo verwandelt ſich z in $y \pm \Delta y$ und ſo kommt, wenn x um $\Delta x$ wächſt:

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

und wenn x um $\Delta x$ abnimmt:

$$y - \Delta y = y - \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}\Delta x^2 - \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}\Delta x^3 + \text{etc}$$

Folglich iſt

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}.\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc}$$

Hier

Hier wird dx als eine beſtändige Größe betrachtet. Sieht man aber dx als beſtändig und endlich zugleich an, und differenzirt die Function y übrigens, wie gewöhnlich, ſo kommt:

$$y \pm \Delta y = y \pm \frac{dy}{1} + \frac{d^2y}{1.2} \pm \frac{d^3y}{1.2.3} + \text{etc}$$

6. Die Gleichungen (in 4, 5) ſind wahr, nicht blos für Functionen $y = \alpha x^m$, ſondern auch für $y = \alpha x^m + \beta x^n + \gamma x^p + \delta x^q + \text{etc}$, wo die Exponenten m, n, p, q ... alles ſeyn können. Da nun die algebraiſchen Functionen (ganze und gebrochene, rationelle und irrationelle) und ſo auch die tranſcendentiſchen, auf dergleichen Reihen ſich bringen laſſen: ſo gelten dieſe Gleichungen, und folglich auch der Taylorſche Satz, allgemein für alle Functionen, algebraiſche und tranſcendente. Das hat vornehmlich Herr von Tempelhoff (Anfangr. d. Anal. des Unendl. §. 558-568) ausführlich dargethan, und gezeigt, das vollſtändige Differenzial einer jeden Function, laſſe ſich (nach ſolchen Formeln, wie hier in 5) ohne Schwierigkeit finden. Die endliche Differenz $\Delta y$ iſt nämlich hier in einer Reihe nach Potenzen von $\Delta x$ gegeben, für $\Delta x = dx$, wird $\Delta y = dy$, und die Reihe bricht mit dem erſten Gliede ab (Eul. l. c. §. 49).

7. Auf eine ähnliche Art, wie die erſte, laſſen ſich auch alle übrige Differenzen ausdrücken. Bezieht man nämlich $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots$ eben ſo auf x und $\omega$, ſo findet man (Eul. l. c. §. 52)

$$\overset{1}{y} = y \pm \omega \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{1.2\,dx^2} \pm \text{etc} = \varphi(x \pm \omega)$$

$$\overset{2}{y} = y \pm 2^1 \omega^1 \frac{dy}{dx} + \frac{2^2 \omega^2 d^2y}{1.2\,dx^2} \pm \text{etc} = \varphi(x \pm 2\omega)$$

$$y^3 = y \pm 3^1\omega^1\frac{dy}{dx} + \frac{3^2\omega^2 d^2y}{1.2\,dx^2} \pm \text{etc} = \varphi(x \pm 3\omega)$$

$$y^n = y \pm (n\omega)^1\frac{dy}{dx} + \frac{(n\omega)^2 d^2y}{1.2\,dx^2} \pm \frac{(n\omega)^3 d^3y}{1.2.3\,dx^3} \ldots$$

$= \varphi(x \pm n\omega)$; woraus ſich die Differenzen $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... eben ſo ergeben, wie bey Eulern (l. c. §. 53, 56). Pfleid. Theor. Tayl. Dem. §. 19, 20; und Couſin Calc. diff. et int. T. I. §. 18. p. 43.

8. Für $v = x \pm \omega$, ſetze man (in 4) *)

(I) $y = \varphi^m x$, ſo iſt $\varphi^m(x \pm \omega)$ d. i.

$$z = \varphi^m v = \varphi^m x \pm \frac{\omega}{dx} d\varphi^m x + \frac{\omega^2}{1.2\,dx^2} d^2\varphi^m x \pm \text{etc}$$

(II) $y = \varphi^m x . \psi^n x$, ſo iſt $\varphi^m(x \pm \omega).\psi^n(x \pm \omega)$ d. i.

$$z = \varphi^m v . \psi^n v = \varphi^m x \psi^n x \pm \frac{\omega}{dx} d.\varphi^m x \psi^n x + \frac{\omega^2}{1.2.\,dx^2} d^2.\varphi^m x \psi^n x \pm \text{etc}$$

(III) $y = \varphi^m x : \psi^n x$; ſo iſt $\varphi^m(x \pm \omega) : \psi^n(x \pm \omega)$ d. i.

$$z = \frac{\varphi^m v}{\psi^n v} = \frac{\varphi^m x}{\psi^n x} \pm \frac{\omega}{dx} d.\frac{\varphi^m x}{\psi^n x} + \frac{\omega^2}{1.2\,dx^2} d^2.\frac{\varphi^m x}{\psi^n x} \pm \text{etc}$$

Das iſt Taylors Satz auf der Functionen **Potenzen** und ſolcher Potenzen **Producte** und **Quotienten** bezogen; wo II und III (für entgegengeſetzte n) von einander abhängen.

9. Für $x + \omega = a$ kommt $\omega = a - x$

„ $x + \omega = nx$ „ $\omega = (n-1)x$

„ $x - \omega = o$ „ $\omega = x$

Dieſe

*) Wegen der hier vorkommenden Zeichnung $\varphi^m x$; $\psi^n(x \pm \omega)$ ſehe man die Note zu S. 89.

Diese Werthe von $\omega$ in die Gleichung für z (in 4) gesetzt, geben:

$$z = y + \frac{(a-x)\,dy}{1.\,dx} + \frac{(a-x)^2 d^2y}{1.2\,dx^2} + \text{etc}$$

$$z = y + \frac{(n-1)\,x\,dy}{1.\,dx} + \frac{(n-1)^2 x^2 d^2y}{1.2\,dx^2} + \text{etc}$$

$$z = y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{x^2 d^2y}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc}$$

Diese Gleichungen für z zeigen, was aus der Function $y = \varphi x$ wird, wenn man darin überall statt x entweder a oder nx oder o setzt. Giebt diese Substitution in x den Werth A oder o für die Function y; so wird $z = A$ oder $= o$ (Eul. l. c. §. 68, 69).

Eben so könnte man auch die hier angegebenen Werthe von $\omega$, statt $\omega$, in die Formeln (8) setzen, und die veränderten Werthe der dortigen y suchen, in so fern man a oder nx oder o statt ihrer x setzte.

10. Setzt man $x + \omega = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots$ so kommt $\omega = (\alpha - 1)x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots$. Dieser Werth von $\omega$ in die Gleichung für z (in 4) nach dem Methodo Potentiarum (Inf. Dign. p. 101, 102) substituirt, indem man für die

dortigen y; z; a; b; c; ....

hier setzt $\omega$; x; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{1.2\,dx^2}$; $\frac{d^3y}{1.2.3.\,dx^3}$; ...

giebt

$$z = y + a^1 A \frac{dy}{dx} x + \left\{ a^2 A \frac{dy}{dx} + b^2 B \frac{d^2y}{1.2\,dx^2} \right\} x^2 + \left\{ a^3 A \frac{dy}{dx} + b^3 B \frac{d^2y}{1.2\,dx^2} + c^3 C \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} \right\} x^3 + \text{etc}$$

$$\left( \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ (\alpha - 1), & \beta, & \gamma, & \delta \ldots \end{matrix} \right)$$

Diese

Dieſe Gleichung für z zeigt, was aus der Function $y = \Phi x$ wird, wenn man $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ ſtatt x in $\Phi x$ oder y ſetzt. Der obige Werth von $\omega$, in 8, I, geſetzt, würde eben ſo die Veränderung von dem dortigen $y = \Phi^m x$ angeben. Die Zeichen $a^1 A$; $a^2 A$, $b^2 B$; u. ſ. w. ſind **Combinationsclaſſen**, die ſich auf den hier beygeſetzten Zeiger beziehen. Die Entwickelung ihrer Werthe in einer Tafel (Infin. Dign. p. 167).

11. **Anmerk.** 1. Die Quotienten der Differenzialen in obigem Werthe von z, ließen ſich, für $y = \Phi x = x^a$ (wie in 4, Aufg.) leicht in Binomialcoefficienten und Potenzen von x (und ſo alles in combinatoriſchen Ausdrücken) darſtellen. Dennoch wäre die ſo abgeleitete Formel für $z = \Phi(x + \omega) = (ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc})^n$, ungleich mehr verwickelt, als die (Nov. Syſt. Perm. p. LIV, 7, 8) angegebenen. Die Ausdrückungen nämlich durch höhere Differenzialen enthalten gewöhnlich die für einerley Potenzen zuſammen gehörigen Größen in mehrern Gliedern zerſtreut, welche die bekannten combinatoriſch-analytiſchen Formeln, beyſammen und zugleich gut geordnet, aufſtellen. Dergleichen Differenzialformeln ſind allerdings, wegen der Relationen die ſie enthalten, und weil ſie auf Functionen aller Art ſich beziehen, höchſt wichtig, aber die Darſtellung ihrer Werthe iſt nicht ſelten, beſonders bey den mannichfaltigen Verwickelungen vielgliedriger Größen, äußerſt beſchwerlich und ermüdend. Es iſt alſo immer wichtig, ſolcher Differenzialformeln Verhalten zu den Local- und combinatoriſch-analytiſchen Formeln, aufzuſuchen, und letztere ſtatt der erſtern, bey dem **Gebrauche in der Anwendung**, zu benutzen. Wäre z. B. die combinatoriſch-analytiſche Formel für **unbeſtimmte Potenzen eines Infinitinomiums** nicht ſchon bekannt, ſo ließe ſich hier zeigen, wie man ſie aus der Formel z (in 10) ableiten könnte.

Anmerk. 2. Die Gleichungen für z (von 4.10) gehen sämtlich dahin, den Werth von $y = \varphi x$ für veränderte x anzugeben, indem man entweder $x \pm \omega$ statt x (wie in 4.8) oder überhaupt statt x etwas anders in die Function y setzt, und diesem gemäß, den Werth für $\omega$ in der Gleichung für z (wie in 9, 10) ändert. Da aber die veränderliche Größe x in y alle Werthe annehmen, und man für $\omega$ eine veränderliche Größe setzen darf (4): so kann man auch $x = 0$, und dann $\omega = x$ setzen, und so sehen, was aus z wird. Das Tayloriſche Theorem verändert dadurch ſeine urſprüngliche Form (4) und erſcheint ſodann unter einer von jener etwas verſchiedenen Geſtalt.

## B. Evolution der Functionen in Reihen, nach Potenzen der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe.

12. Setzt man nämlich in $z = \varphi(x + \omega)$ (4) erſt $x = 0$ und dann $\omega = x$, ſo verwandelt ſich z in $\varphi(0 + x) = \varphi x$ oder y. Eben das, in den (zu entwickelnden) Gliedern der Gleichung für z (in 4) gethan, wird auch den Werth von z in den von y verwandeln. Nun mögen in nachſtehenden beyden Reihen

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc}$$
$$\Phi, A, B, C, \text{ etc}$$

die großen Buchſtaben der zweyten Reihe, die reducirten Werthe der darüber ſtehenden Größen in der erſten bedeuten, welche kommen, wenn man in y (der Function von x) und in dem was man daraus, durch fortgeſetztes Differenziiren, für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ꝛc. findet, durchgängig $x = 0$ ſetzt; wo alſo $\Phi$ den Werth von $\varphi x$ oder y, für $x = 0$ aus-

ausdrückt u. ſ. w. Dieſe reducirten Werthe an die Stelle der Größen, von denen ſie herrühren, in die Gleichung (4), und mit ihnen zugleich $\omega = x$, geſetzt, geben den Tayloriſchen Satz, in der hier abgeänderten Form:

$$y = \Phi + \frac{A}{1}x + \frac{B}{1.2}x^2 + \frac{C}{1.2.3}x^3 + \text{etc}$$

An. erk. Hier iſt y die zu evolvirende Function von x, wie ſie iſt gegeben worden. Die Glieder rechter Hand geben ihre Evolution nach Potenzen von x, vermittelſt der reducirten Werthe der Coefficienten Φ, A, B, C, D... Hierbey wird vorausgeſetzt, y ſey eine ſolche Function, deren Entwickelung in einer Reihe, auf Potenzen von x führe, wie ſie hier die Formel für y enthält, deren Exponenten nämlich die Ordnung der natürlichen Zahlen befolgen. Unter den Coefficienten Φ, A, B, C... können jedoch auch einige $= 0$ ſeyn.

Dieſe ſo abgeänderte Form des Tayloriſchen Satzes (4) iſt demnach für die Evolution der Functionen in Reihen vorzüglich bequem. Couſin Leçons de Calc. diff. et int. T. I. §. 36. p. 121, 122.

**Aufgabe I. Den Werth der Function $(a+x)^n$ in einer Reihe, nach Potenzen von x auszudrücken.**

Man ſetze $(a+x)^n = y$, und ſuche die reducirten Werthe für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... (12) ſo kommt $\Phi = a^n$; $A = n\,a^{n-1}$; $B = n.n-1.a^{n-2}$; u. ſ. w. Dieſe gefundenen Werthe in die Gleichung (12) für y geſetzt, geben y, d. i. hier

$$(a+x)^n = a^n + {}^n\mathfrak{A}\,a^{n-1}x + {}^n\mathfrak{B}\,a^{n-2}x^2 + {}^n\mathfrak{C}\,a^{n-3}x^3 \ldots$$

die bekannte Newtoniſche Formel.

Aufgabe II. Den Werth von $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots)^m$ der unbeſtimmten Potenz eines Infinitinomiums, in einer Reihe, nach Potenzen von x, auszudrücken.

Auflöſ. Die geforderte Potenz ſey $y=(\alpha+X)^m$, wo alſo $X=\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots$, und man ſuche, wie vorher (Aufg. I) die reducirten Werthe für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\ldots$ ſo findet ſich (da für $x=0$ auch $X=0$) $\Phi=\alpha^m$; $A=m\alpha^{m-1}\beta$; $B=m.m-1.\alpha^{m-2}\beta^2$; u. ſ. w. und daraus die Gleichung (12) für y, d. i. hier

$$(\alpha+x)^m=\alpha^m+{}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\beta x+({}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\gamma+{}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2}\beta^2)x^2+({}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\delta+2{}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2}\beta\gamma+{}^m\mathfrak{C}\alpha^{m-3}\beta^3)x^3+\text{etc}$$

Anmerk. I. Die ausführlichere Entwickelung dieſer reducirten Werthe habe ich (Infin. Dign. p. 56, 57) beygebracht; und man findet an dieſem Exempel ein anderes Verfahren, die Potenz eines Infinitinomiums durch den Gebrauch höherer Differenzialen auszudrücken; das auch dieſe Potenz ungemein viel leichter giebt, als ſich ſelbige aus der vorigen Formel (10) vermittelſt der Anmerkung 1 (in 11) würde ableiten laſſen. Dennoch würde man auch hier, bey fortgeſetztem Differenziiren für mehrere Glieder der mten Potenz in Weitläuftigkeit gerathen, auch bey der Forderung, ein verlangtes Glied außer der Ordnung anzugeben, anſtehen, ob ſich dies überhaupt bewerkſtelligen laſſe. Die combinatoriſch-analytiſchen Formeln ſolcher Potenzen hingegen (Nov. Syſt. Perm. p. LIV, 7, 8) vermeiden das eine, und ſchaffen das andere, auf einem Wege, der zwar von dem gewöhnlichen ganz abweicht, aber mit unerwarteter Leichtigkeit

tigkeit und Behendigkeit zum Ziele führt (vergl. die Note S. 22, 23 im erſten Hefte).

Anmerk. 2. Setzt man die Reihe für $(\alpha+X)^m$ noch einige Glieder weiter fort, als hier (Aufg. II), ſo ergeben ſich die Coefficienten derſelben gerade ſo, wie ſie Wolff (Elem. Anal. §. 102. p. 329) aber auf einem andern Wege, bis zum 7den Gliede berechnet hat; die dortigen Binomialcoefficienten ſind hier ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$, ${}^m\mathfrak{D}$... die dortigen a, b, c, d... hier $\alpha, \beta, \gamma, \delta$... das dortige y hier x. Wollte man nun die Glieder für $(\alpha+X)^m$ von jenen Differenzialausdrücken der Formel (12) unabhängig finden, ſo müßte man nachſuchen, wie ſich die Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$... der gegebenen Reihe in die Coefficienten der geſuchten Reihe verwickeln, und nach welchem Geſetze das geſchieht. Eine genauere Vergleichung mit Anderer Verfahren auf andern Wegen, würde zugleich zeigen, daß die Zuſammenſetzung dieſer Coefficienten dieſelbe ſey, auf welche ſchon de Moivre (Infin. Dign. S. 46, und die daſ. S. 44, Note v citirten Stellen), und Jacob Bernoulli (Ebend. S. 52) und Colſon (Ebend. S. 55), und ſpäterhin auch Herr de la Grange *) gefallen ſind. Bernoulli und Colſon beſtimmen ſie durch Integrationen ihrer Formeln, das (Aufg. II) vorgelegte Tayloriſche Verfahren, durch Diffe-

 rens-

*) In der (S. 88. Note) angeführten Abhandlung, §. 18–20. Vergl. Toepf. Combin. Anal. S. 116–123. Auch findet man bey Eulern mehrere Spuren dieſer Art von Coefficienten. Die oben angeführten, Lagrangiſche und Moivriſche Vorſchriften, wegen Zuſammenſetzung der Coefficienten $\beta, \gamma, \delta$... laſſen ſich übrigens auch in einer Involution (S. 13, 1) darſtellen, in welcher die Complexionen nach Endbuchſtaben geordnet ſind, und Aehnlichkeit mit der (S. 32.) vorgetragenen hat. Von dieſer Involution, und was ſie weiter hätte nachweiſen können, bey einer andern Gelegenheit.

ferenzialausdrücke, beyde blos aus dem Erfolge; ſo wie auch Wolf (a. a. O.) thut. Moivre hingegen (Ebend. S. 45) und Herr de la Grange (a. a. O.) haben Vorſchriften gegeben, wenigſtens folgende Coefficienten aus vorhergehenden, und alſo dependent von einander herzuleiten. Die Combinationslehre giebt ihre Werthe, wie man will, abhängig und unabhängig von einander. Dahin gehört Infin. Dign. Tab. V. p. 167.

Hier zeigen ſich alſo mehrere Wege, auf denen man die combinatoriſch-analytiſche Formel für die Potenzen des Infinitinomiums hätte finden und ableiten können. Den Gang, den ich gegangen bin, zeigt Infin. Dign. S. 69 u. f.

C. Beſtimmung der Function $y = \varphi x$ dergeſtalt,

daß $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ geſetzt,
dann $y = a, b, c, d, e \ldots$ wird.

13. Für $y = \varphi x$, iſt das $(x+1)$te Glied der Reihe $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)} \ldots$, das iſt

$$y^{(x)} = y^{(0)} + {}^{x}\mathfrak{A}\Delta^{1} y^{(0)} + {}^{x}\mathfrak{B}\Delta^{2} y^{(0)} + {}^{x}\mathfrak{C}\Delta^{3} y^{(0)} + \text{etc}$$

in einer Gleichung (wie in 1) gegeben, nur daß hier x ſtatt des dortigen n ſteht. Ferner,

für $x = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ ſucceſſive,

werde $y^{(x)} = A, B, C, D, E \ldots$ reſpective.

dadurch verwandelt ſich die Reihe $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)} \ldots$ in A, B, C, D ..., auch wird $\Delta^{1} y^{(0)} = \Delta^{1} A$; $\Delta^{2} y^{(0)} = \Delta^{2} A$; $\Delta^{3} y^{(0)} = \Delta^{3} A$; u. ſ. w. und ſo kommt das allgemeine $(x+1)$te Glied, oder der Werth der zu beſtimmenden Function:

$y^{(x)}$

$$y = A + \frac{x}{1}\Delta^1 A + \frac{x.x-1}{1.2}\Delta^2 A + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

das iſt die bekannte, und unter dem Namen der Methode der Differenzen häufig gebrauchte Reihe zum Interpoliren oder Einſchalten. Im Berl. aſtron. Jahrbuche für 1776. S. 9. u. a. J. kommen auch Tafeln für die Coefficienten, zu aſtronomiſchem Gebrauche, vor.

Anmerk. Couſin (Introd. à l'ét. de l'Aſtr. phyſ. §. 22) nennt dieſe Reihe Taylors Theorem in einer andern Geſtalt, und ſucht auch den Werth für $y = a, b, c, d, e \ldots$ wenn man (wie oben angegeben wird) nach und nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ ſtatt x in $\varphi x$ ſubſtituirt. Die weitere Ausführung davon, die nicht hieher gehört, kann man a. a. O. nachſehen; aber man reicht mit den beyden von Couſin angeführten Reihen nicht aus. Lambert (Beytr. zum Gebr. der Math. 3ter Th. S. 66 ꝛc. ingl. Zuſ. zu den log. Taf. S. 89-92; 198, 199) giebt weitere Auskunft über dieſen ſo wichtigen Gegenſtand (die Interpolation der Reihen) durch Formeln und Tafeln.

## D. Verwandlung der Functionen von mehrern veränderlichen Größen, durch Aenderung dieſer veränderlichen Größen. Eine Erweiterung von A.

14. Bisher iſt y als eine Function nur einer veränderlichen Größe angeſehen worden. Wäre aber y eine Function mehrerer veränderlicher Größen x, w, v ... ſo läßt ſich auch der Werth von $y + \Delta y$ (von dem was aus aus y wird) angeben, indem ſich x in $x + dx$ und w in $w + dw$ und v in $v + dv$ u. ſ. w. verwandelt. Es iſt nämlich

$$y+\Delta y=y+\frac{dy}{1}+\frac{d^2y}{1.2}+\frac{d^3y}{1.2.3}+\frac{d^4y}{1.2.3\,4}+\text{etc}$$

Die Auflöſung und den Beweis hat unter andern **Segner** (Curſ. Math. P. IV. §. 139-145 ausführlich aus einander geſetzt, und eine, um ſich dabey nicht zu verſehen, nothwendig zu beobachtende Ordnung des Verfahrens feſtgeſetzt.

15. Die wirkliche Darſtellung der verſchiedenen Differenzialen in den einzelnen Gliedern iſt weitläuftig. Ein Beyſpiel für eine Function von zwey veränderlichen Größen [für $z=\varphi(x,y)$] um $z+\Delta z$ durch x und y auszudrücken, hat **Lambert** (Nouv. Mem. de l'Ac. des Sc. année 1770. p. 236. §. 24) gegeben.

16. Von dieſer Erweiterung des Tayloriſchen Satzes (forme du Théorême plus générale, wie ſie **Couſin** nennt) hat letzterer auch (Lec. ons de Calc. diff. et int. T. I. p. 169-174 gehandelt, und dabey die Bezeichnung der partiellen Differenzen nach **Fontaine** gebraucht. Das Geſetz der dabey vorkommenden $\Delta x$, $\Delta y$ und $dx$, $dy$ und deren Potenzen, ließe ſich durch einzelne Glieder von Variationsclaſſen ausdrücken, und dadurch der Fortgang für andere Glieder (als die dortigen) und mehrere veränderliche Größen (als zwey) leicht angeben.

## E. Evolution der Functionen in Reihen, nach Potenzen einer oder mehrerer in ihnen vorkommenden veränderlichen Größen.

Eine Erweiterung von B.

17. Auch die Evolution in Reihen läßt ſich bewerkſtelligen, wenn y eine Function von mehrern veränderlichen Größen iſt. Couſ. Introd. à l'ét. de l'Aſtr. phyſ. §. 16.

I. Wenn

I. Wenn nämlich y eine Function mehrerer veränderlicher Größen, oder $y = \varphi(z, x, u, t...)$ iſt, und man ſoll y in einer Reihe entwickeln, die nach Potenzen einer der veränderlichen Größen in ihr, wie t, fortgeht; ſo mag v den Werth für y ausdrücken, der zu $t = o$ gehört, auch ſoll $v^{1}, v^{2}, v^{3}...$ das bedeuten, was aus $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}...$ (aus den ſucceſſiven Differentialen von y, in Beziehung auf t, und durch $dt, dt^2, dt^3...$ dividirt) wird, wenn man $t = o$ und $y = v$ ſetzt: ſo kommt:

$$y = v + \frac{t}{1} v^{1} + \frac{t^2}{1.2} v^{2} + \frac{t^3}{1.2.3} v^{3} + \frac{t^4}{1.2.3.4} v^{4} + \text{etc}$$

II. Dieſelbe Function y in einer Reihe zu entwickeln, die nach Potenzen von zwey veränderlichen Größen (t und u) fortgeht, die in der Function mit vorkommen: ſey v der Werth von y, der zu $t = o$ und $u = o$ gehört; auch mögen

$$v^{1}_{1}, v^{1}_{2}; \quad v^{2}_{1}, v^{2}_{2}, v^{2}_{3}; \quad v^{3}_{1}, v^{3}_{2}, \ldots$$

und $\frac{dy}{dt}, \frac{dy}{du}; \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2y}{dtdu}, \frac{d^2y}{du^2}; \frac{d^3y}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^2 du}...$

ſich ſo auf einander beziehen, daß die Glieder der erſten Reihe die reducirten Werthe der unterſtehenden Glieder der zweyten bedeuten, welche kommen, wenn man in dem, was die Differentiation giebt, $t = o$; $u = o$ und $y = v$ ſetzt: ſo kommt

$$y = v + tv^{1} + \frac{t^2}{1.2}v^{2} + \frac{t^3}{1.2.3}v^{3} + \text{etc}$$
$$+ uv^{1} + \frac{tu}{1.2}2v^{2} + \frac{t^2u}{1.2.3}3v^{3} \cdot \cdot$$
$$+ \frac{u^2}{1.2}v^{3} + \frac{tu^2}{1.2.3}3v^{4} \cdot \cdot$$
$$+ \frac{u^3}{1.2.3}v^{4} \cdot \cdot$$

Eben so verfährt man bey Entwickelung einer Function, in eine Reihe, nach Potenzen von drey oder mehrern, in der Function vorkommenden, veränderlichen Größen.

Anmerk. Das Verbindungsgesetz der Potenzen von t und u unter sich und mit den Binomialcoefficienten fällt hier deutlich in die Augen. In andern Fällen, die entweder verwickelter sind, oder wo man auf mehrere Größen zu sehen hat, kann man leicht dafür eine combinatorische Formel verfassen, die das Fortschreitungsgesetz für die Glieder nach der Reihe deutlich vor Augen stellt.

## F. Noch eine wichtige Erweiterung von B.

18. Dahin rechne ich den Satz von Herrn de la Grange (Heft I. S. 81). Er ist Taylors Theorem, auf die Gleichung $x = y + z\varphi x$ angewendet, wo man, nach der dritten Form (hier in 4) $x, \dot{y}, z\varphi x$ statt der dortigen $v, x, \omega$ gesetzt, sogleich (S. 81. §. 2).

$$\psi x = \psi y + z\varphi x \frac{d\psi y}{1.dy} + z^2\varphi^2 x \frac{d^2\psi y}{1.2.dy^2} + \text{etc}$$

findet, und nur noch $\varphi x$, $\varphi^2 x$, $\varphi^3 x$... aus dem Werthe von $\psi x$ wegschaffen darf, um alles in y, durch eine nach Potenzen von z geordnete Reihe, auszudrücken; welches

ches ſich denn auch, wie ſolches der Beweis dieſes Satzes von Herrn Profeſſor Pfaff (S. 82) deutlich zeigt, blos durch weitere Anwendung (vermittelſt 8, 1) des Satzes auf ſich ſelbſt, folglich ohne weitere Beyhülfe irgend eines andern Satzes von außen, bewerkſtelligen läßt.

19. Eine ähnliche noch etwas veränderte Aufgabe folgenden Inhalts: „In einer Gleichung $Z = \varphi(t, x, z)$ „ſey die Function der drey veränderlichen Größen ſo be„ſchaffen, daß ſie ſich für $x = 0$ in eine Function von $t$ „verwandelt: man ſoll den Werth von $z$ oder von $\psi z$ in „$t$ und $x$ durch eine nach Potenzen von $x$ geordnete Rei„he ausdrücken“ hat Couſin (Introd. à l'ét. de l'Aſtron. phyſ. §. 334, 335) vorgetragen und aufgelöſt.

20. Mehrere Abänderungen und Formen, als die urſprüngliche des de la Grangiſchen Satzes (hier S. 88, 89) hat Lambert (Nouv. Mem. de l'Ac. des Sc. année 1770. p. 225-244) in Betrachtung gezogen und gezeigt, wie ſich aus einer gegebenen Gleichung $\Phi y = \psi(x, y)$, wo ſtatt $\Phi y$ auch 0 oder eine conſtante Größe ſtehen kann, der Werth von $x$ oder jeder beliebigen Function von $x$, oder auch von $xy$, ausdrücken laſſe; zu welcher Abſicht Lambert noch allgemeiner $z = \psi(x, y)$ annimmt, damit $x$ und $y$ jede beliebige Werthe haben können, wo ſich alsdann $z$ in $\Phi y$ verwandelt, wenn ſowohl $x$ als $y$ diejenigen Werthe haben, welche die vorgegebene Gleichung erfordert. Auch hat Lambert, durch ſeine Verſuche, die Wurzeln der Gleichungen und ihre Potenzen in Reihen auszudrücken, Herrn de la Grange zu Erfindung ſeiner wichtigen Formel die nächſte Veranlaſſung gegeben. Einen Beweis derſelben von Lambert, den er auf eine vorgängige Conſtruction gründet, findet man daſelbſt §. 11 - 14.

---

## VI.

## Lokalformeln für Producte von Potenzen der Reihen; von Herrn Magiſter Rothe zu Leipzig.

---

1. Wenn man

$$p = az^m + bz^{m+d} + cz^{m+2d} + \ldots \text{ und}$$
$$q = az^h + bz^{h+d} + cz^{h+2d} + \ldots \text{ ſetzt,}$$

ſo hat die Reihe, welche das Product $q^\beta p^\alpha$ ausdrückt, wenn man der Kürze wegen, $m\alpha + h\beta = s$ ſetzt, folgende Form:

$$q^\beta p^\alpha = A z^s + B z^{s+d} + C z^{s+2d} + D z^{s+3d} + \text{etc}$$

2. Statt der willkührlich angenommenen Coefficienten A, B, C... laſſen ſich nun folgende Lokalzeichen ſetzen

$$q^\beta p^\alpha = q^\beta p^\alpha \varkappa 1 . z^s + q^\beta p^\alpha \varkappa 2 . z^{s+d} + q^\beta p^\alpha \varkappa 3 . z^{s+2d} + \ldots$$

wo $\varkappa 1, \varkappa 2, \varkappa 3 \ldots$ den erſten, zweyten, dritten... Coefficienten des daneben ſtehenden Products $q^\beta p^\alpha$ bezeichnet. Die Bedeutung dieſer Lokalausdrücke hat alſo keine Schwierigkeit; ihren Werth auf die gewöhnliche Art anzugeben, wird folgendes lehren.

3. Die Werthe der Lokalzeichen für Coefficienten einzelner Potenzen, $q^\beta \varkappa m$, $p^\alpha \varkappa (n+1)$ hängen, wie bekannt, blos von den Coefficienten $a, b, c \ldots$ und $a, b, c \ldots$ der Reihen p und q, keinesweges aber von den veränderlichen Größen z und den Exponenten m, h, d dieſer Reihen ab. Eben ſo verhält es ſich auch mit den Coefficienten des Productes dieſer Potenzen $q^\beta p^\alpha \varkappa m$,

$q^\beta$

$q^{\beta} p^{\alpha} x(n+1)$, um ſo mehr, da die Coefficienten ſolcher Producte, wie die Folge zeigen wird, aus Coefficienten der einzelnen Potenzen zuſammen geſetzt werden.

4. Wenn daher die Skalen

p [a, b, c ....] und q [a, b, c ...]

die Bedeutung haben, daß ſie anzeigen, der Reihe p Coefficienten ſeyen a, b, c ... und der Reihe q Coefficienten ſeyen a, b, c ... ſo erhellet, wenn man zu dem Ausdrucke, welcher $q^{\beta} p^{\alpha} x(n+1)$ aus den Coefficienten der einzelnen Potenzen $p^{\alpha}$, $q^{\beta}$ zuſammengeſetzt darſtellt, obige Scalen hinzuſetzt, daß der Werth des Coefficienten jenes Products vollkommen beſtimmt iſt.

5. Man bemerkt aber auch zugleich einen Unterſchied, der zwiſchen Lokalzeichen von bloßen Potenzen von Reihen, und zwiſchen Lokalzeichen von Producten, oder von Producten von Potenzen zweyer oder mehrerer Reihen, vorkömmt. Wenn nämlich mehr als eine Scale, z. B. wie hier, zwo Scalen p [a, b, c ...] und q [a, b, c ...] in Betrachtung gezogen werden, und es kommen blos Lokalzeichen von einzelnen Potenzen, z. B. $p^{l} x(n-1)$, $q^{r} x(n-m+1)$ vor, ſo kann man ſich beyde Reihen p und q nach Potenzen verſchiedener veränderlicher Größen, z. B. p nach Potenzen von y, und q nach Potenzen von z geordnet gedenken, oder man kann

$$p = ay^{s} + by^{s+t} + cy^{s+2t} + \ldots \text{ und}$$
$$q = az^{\mu} + bz^{\mu+\lambda} + cz^{\mu+2\lambda} + \ldots \text{ ſetzen.}$$

Kommen aber Lokalausdrücke für Producte von Reihen, oder für Producte von Potenzen von Reihen vor, wie z. B. dieſer, $q^{\beta} p^{\alpha} x(n+1)$, dann muß man ſich die beyden Reihen p und q nicht nur nach Potenzen von einer-

einerley veränderlichen Größe (beyde nach Potenzen von y, oder nach Potenzen von z) geordnet gedenken, sondern es muß auch der Exponenten Unterschied bey beyden Reihen, nicht verschieden (wie hier t, $\delta$) sondern gleich seyn.

6. Was nun den Werth eines solchen Lokalausdruckes, wie $q^{\beta} p^{\alpha} x(n+1)$ anbetrift, so läßt sich leicht zeigen, daß

$$q^{\beta} p^{\alpha} x(n+1) = q^{\beta} x 1 p^{\alpha} x(n+1) + q^{\beta} x 2 p^{\alpha} x n + \ldots$$
$$\ldots + q^{\beta} x(m+1) p^{\alpha} x(n-m+1) \ldots + q^{\beta} x(n+1) p^{\alpha} x 1 \quad (\odot)$$

Denn da

$$p = a z^{m} + b z^{m+d} + c z^{m+2d} + \ldots \text{ und}$$
$$q = a z^{h} + b z^{h+d} + c z^{h+2d} + \ldots \quad (1)$$ so ist

$$p^{\alpha} = p^{\alpha} x 1 z^{m\alpha} + p^{\alpha} x 2 z^{m\alpha+d} \ldots + p^{\alpha} x(n+1) z^{m\alpha+nd} + \ldots$$
$$q^{\beta} = q^{\beta} x 1 z^{h\beta} + q^{\beta} x 2 z^{h\beta+d} \ldots + q^{\beta} x(n+1) z^{h\beta+nd} + \ldots$$

und, wenn man beyde Reihen mit einander multiplicirt, und, wie vorhin geschehen, der Kürze wegen $m\alpha + h\beta = s$ setzt (1), so kommt

$$\begin{aligned}
q^{\beta} p^{\alpha} = {} & q^{\beta} x 1 p^{\alpha} x 1 z^{s} \\
& + \left.\begin{matrix} q^{\beta} x 1 p^{\alpha} x 2 \\ + q^{\beta} x 2 p^{\alpha} x 1 \end{matrix}\right\} z^{s+d} \\
& + \left.\begin{matrix} q^{\beta} x 1 p^{\alpha} x 3 \\ + q^{\beta} x 2 p^{\alpha} x 2 \\ + q^{\beta} x 3 p^{\alpha} x 1 \end{matrix}\right\} z^{s+2d} \\
& + \text{etc} \quad \text{etc}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} + q^{\beta} x 1 p^{\alpha} x(n+1) \\ + q^{\beta} x 2 p^{\alpha} x n \\ + q^{\beta} x 3 p^{\alpha} x(n-1) \\ + q^{\beta} x 4 p^{\alpha} x(n-2) \\ \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \\ + q^{\beta} x(n+1) p^{\alpha} x 1 \end{matrix}\right\} z^{s+nd} + \ldots$$

Es ist aber auch (2)

$$q^{\beta}p^{\alpha} = q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa 1 z^{s} + q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa 2 z^{s+d} + q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa 3 z^{s+2d} + \ldots$$
$$\ldots + q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa(n+1) z^{s+nd} + \ldots.$$

und daraus, wenn man die Coefficienten zu einerley Potenzen von z in beyden Reihen einander gleich setzt, erhellet die Richtigkeit der obigen Formel ⊙.

7. Diese Formel ⊙ dient den Werth von $q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa(n+1)$, vermittelst der Werthe von $p^{\alpha}\varkappa 1$, $p^{\alpha}\varkappa 2$, .... $p^{\alpha}\varkappa(n+1)$ und $q^{\beta}\varkappa 1$, $q^{\beta}\varkappa 2 \ldots q^{\beta}\varkappa(n+1)$ nach den bereits bekannten combinatorischen Formeln und den oben gegebenen Scalen für p und q (4) oder den zugehörigen Zeigern, in die gewöhnliche algebraische Sprache überzusetzen.

8. Mehrere Bemerkungen, die Scalen und Zeiger betreffend, und wie man durch ihre Beyhülfe, die Lokalausdrücke in combinatorische und diese wieder in gewöhnliche algebraische umsetzt; allgemeine Vorschriften und Formeln hierüber, und Anwendungen auf Beyspiele verschiedener Art, findet man in meiner Abhandlung de Ser. Reverf. demonstr. und in Herrn Prof. Hindenburgs Paralip. ad Ser. Reverf.

9. Hieraus erhellet, was Lokalausdrücke, wie $r^{\gamma}q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa(n+1)$ und $s^{\delta}r^{\gamma}q^{\beta}p^{\alpha}\varkappa(n+1)$ u. s. w. für eine Bedeutung haben, und wie sich ihre Werthe auf ähnliche Art (wie in 6) durch Coefficienten der einzelnen Potenzen jener Reihen ausdrücken, vermittelst der Scalen für p, q, r, s vollkommen bestimmen, und durch die zugehörigen Zeiger in die gewöhnliche algebraische Sprache übersetzen lassen. Eine unmittelbare Anwendung dieser Aufgabe wird (in VIII) vorkommen.

---

## VII.

## Reduction der vorhergehenden Aufgabe auf das allgemeine Productenproblem; von dem Herausgeber.

Die Lokalformeln im vorigen Aufsatze (VI, 6, 9) lassen sich unmittelbar aus meinen Productenformeln (Nov. Syst. Comb. p. LXXI-LXXVI) folgendermaßen ableiten, und das Fortschreitungsgesetz derselben zugleich deutlich vor Augen legen.

1. Aus m Reihen,

$$p = p\varkappa_1 z^{\mu} + p\varkappa_2 z^{\mu+\delta} + p\varkappa_3 z^{\mu+2\delta} + \text{etc}$$
$$q = q\varkappa_1 z^{\nu} + q\varkappa_2 z^{\nu+\delta} + q\varkappa_3 z^{\nu+2\delta} + \text{etc}$$
$$r = r\varkappa_1 z^{\pi} + r\varkappa_2 z^{\pi+\delta} + r\varkappa_3 z^{\pi+2\delta} + \text{etc}$$
$$s = s\varkappa_1 z^{\sigma} + s\varkappa_2 z^{\sigma+\delta} + s\varkappa_3 z^{\sigma+2\delta} + \text{etc}$$

2. Und ihren Potenzen nach der Ordnung,

$$p^a = p^a\varkappa_1 z^{a\mu} + p^a\varkappa_2 z^{a\mu+\delta} + p^a\varkappa_3 z^{a\mu+2\delta} + \text{etc}$$
$$q^b = q^b\varkappa_1 z^{b\nu} + q^b\varkappa_2 z^{b\nu+\delta} + q^b\varkappa_3 z^{b\nu+2\delta} + \text{etc}$$
$$r^c = r^c\varkappa_1 z^{c\pi} + r^c\varkappa_2 z^{c\pi+\delta} + r^c\varkappa_3 z^{c\pi+2\delta} + \text{etc}$$
$$s^d = s^d\varkappa_1 z^{d\sigma} + s^d\varkappa_2 z^{d\sigma+\delta} + s^d\varkappa_3 z^{d\sigma+2\delta} + \text{etc}$$

3. Folgt das allgemeine $(n+1)$te Glied;

I. Für das Product aus zwey Potenzen

$$q^b p^a ]^{(n+1)} = {}^{q^b p^a}B_{n+2}\, z^{a\mu+b\nu+n\delta}$$

also $q^b p^a = [{}^2B + {}^3Bz^2 + {}^4Bz^{2^2} + {}^5Bz^{4^2} + \ldots]z^N$

$$\begin{pmatrix} {}^1_a\varkappa 1, & {}^2_a\varkappa 2, & {}^3_a\varkappa 3, & {}^4_a\varkappa 4 \ldots \\ {}^1_b\varkappa 1, & {}^2_b\varkappa 2, & {}^3_b\varkappa 3, & {}^4_b\varkappa 4 \ldots \end{pmatrix},$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, $a\mu + b\nu = N$ und $0, 1, 2, 3 \ldots$ nach und nach für n ſetzt.

II. Für das Product aus drey Potenzen

$$r^c q^b p^a \rangle (n+1) = {}^{n+3}C\, z^{a\mu + b\nu + c\pi + n\delta}$$

also $r^c q^b p^a = [{}^3C + {}^4Cz^2 + {}^5Cz^{2^2} + {}^6Cz^{3^2} + \ldots]z^n$

$$\begin{bmatrix} {}^1_a\varkappa 1, & {}^2_a\varkappa 2, & {}^3_a\varkappa 3, & {}^4_a\varkappa 4 \ldots \\ {}^1_b\varkappa 1, & {}^2_b\varkappa 2, & {}^3_b\varkappa 3, & {}^4_b\varkappa 4 \ldots \\ {}^1_c\varkappa 1, & {}^2_c\varkappa 2, & {}^3_c\varkappa 3, & {}^4_c\varkappa 4 \ldots \end{bmatrix},$$

wenn man, in dem allgemeinen Gliede, $a\mu + b\nu + c\pi = \Pi$, und $0, 1, 2, 3 \ldots$ nach und nach für n ſetzt.

III. Für das Product aus $m$ Potenzen

$$\ldots s^d r^c q^b p^a \rangle (n+1) = {}^{n+m}\mathcal{M}\, z^{a\mu + b\nu + c\pi + d\sigma + n\delta}$$

also

$$\ldots s^d r^c q^b p^a = [{}^m\mathcal{M} + {}^{m+1}\mathcal{M} z^2 + {}^{m+2}\mathcal{M} z^{2^2} + \ldots]z^n$$

(der Zeiger enthält die Coefficienten nach der Ordnung aller m Potenzreihen, wie ſie in a ſtehen.)

Auch hier kommt der Ausdruck für die einzelnen Glieder, aus dem allgemeinen, wenn man $a\mu + b\nu + c\pi + d\sigma \ldots = \Omega$, und $0, 1, 2, 3 \ldots$ nach und nach für n ſetzt.

4. Daß (in 3) die Variationsclaſſen $B, C \ldots \mathcal{M}$ kommen müſſen, erhellet daraus, daß zwey, drey ... m

ſolcher Reihen (2) in einander multiplicirt, alle Binionen, Ternionen ... *m*tionen der Coefficienten geben, und weil dieſe alle von 1 an nach der Ordnung gezählt werden, ſo fängt *B* mit dem Summenexponenten 2, und *C* mit 3, und $\mathfrak{M}$ mit *m* an, und gehen dieſe Exponenten nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Eben ſo erhellet der Fortgang für die Exponenten von *z*. Hier ſind blos den Variationsclaſſen der allgemeinen $(n+1)$ten Glieder die Reihenzeichen $p^a, q^b, r^c, s^d \ldots$ überſchrieben beygefügt worden; dieſelben gelten aber auch, wie ſich von ſelbſt verſteht, bey den Variationsklaſſen der einzelnen Glieder. Von dieſen Zeichen und ihrer Bedeutung: (Nov. Syſt. Combin. p. XLVI-XLVIII. §. 23-26.

5. Dieſe Beziehung der Formeln (3) auf Variationsklaſſen zu beſtimmten Summen, legt das Fortſchreitungsgeſetz derſelben deutlich vor Augen, und ihre Conſtruction vermittelſt der beygefügten Zeiger, hängt von Tab. IV (Nov. Syſt. p. LX) ab. Der Umſtand, daß hier Producte der Potenzen von Reihen verlangt werden, macht, daß man die Coefficienten der Reihen (in 2) zu Zeigern nehmen muß. Für $a = b = c = d = \text{etc} = 1$ verwandeln ſich die Reihen (in 2) in die Reihen (in 1) und die Formeln (in 3) kommen mit denen (Nov. Syſt. p. LXXI-LXXVI) überein; nur daß dort überall das *n*te, wie hier das $(n+)$te Glied angegeben iſt. Ich habe hier für die Coefficienten der Reihen (in 1) ſelbſt Lokalzeichen gebraucht, zur unmittelbaren Vergleichung derſelben, mit denen in (2).

6. Die Ausdrücke (3) für ganze Glieder $\mathfrak{z}(n+1)$, verwandeln ſich ſogleich in ſolche für einzelne Coefficienten $\varkappa(n+1)$; wenn man dort $z = 1$ ſetzt, wo alſo *z* und alle Potenzen von *z*, ganz wegfallen, und nur die

Va-

Variationsklaſſen allein mit ihren Summen- und Reihen-Exponenten übrig bleiben.

7. Exempel. Den Werth von $r^c q^b p^a \varkappa 4$ in Coefficienten der einzelnen Potenzen $p^a$, $q^b$, $r^c$ auszudrücken.

In 3, II ſetze man $n = 3$; $z = 1$ und (6) $\varkappa$ ſtatt $\gamma$, ſo findet man

$$r^c q^b p^a \varkappa(3+1) = {}^{r^c q^b p^a}{}^{6}C$$

das giebt, nach dem Zeiger (3) vermittelſt Tab. IV (Nov. Syſt. p. LX.)

| | |
|---|---|
| $r^c \varkappa 1\ q^b \varkappa 1\ p^a \varkappa 4$ | $r^c \varkappa 2\ q^b \varkappa 2\ p^a \varkappa 2$ |
| $r^c \varkappa 1\ q^b \varkappa 2\ p^a \varkappa 3$ | $r^c \varkappa 2\ q^b \varkappa 3\ p^a \varkappa 1$ |
| $r^c \varkappa 1\ q^b \varkappa 3\ p^a \varkappa 2$ | $r^c \varkappa 3\ q^b \varkappa 1\ p^a \varkappa 2$ |
| $r^c \varkappa 1\ q^b \varkappa 4\ p^a \varkappa 1$ | $r^c \varkappa 3\ q^b \varkappa 2\ p^a \varkappa 1$ |
| $r^c \varkappa 2\ q^b \varkappa 1\ p^a \varkappa 3$ | $r^c \varkappa 4\ q^b \varkappa 1\ p^a \varkappa 1$ |

Die einzelnen Coefficienten der Potenzen $r^c q^b p^a$ aus den gegebenen Coefficienten der Reihen r, q, p auszudrücken, lehren die combinatoriſchen Formeln (Nov. Syſt. Comb. p. LIV, 7, 8). Meine Abhandlung: Ad Ser. Reverſ. Paralip. p. VII, VIII und die dortige Note.

8. Die Vorſchriften (in 3) laſſen ſich leicht auf gebrochene Functionen anwenden. So wäre z. B.

$$\frac{(p\varkappa 1 z^{\mu} + p\varkappa 2 z^{\mu+\beta} + p\varkappa 3 z^{\mu+2\beta} + \ldots)^a}{(q\varkappa 1 z^{\nu} + q\varkappa 2 z^{\nu+\beta} + q\varkappa 3 z^{\nu+2\beta} + \ldots)^b} = \frac{p^a}{q^b}$$

und $\frac{p^a}{q^b}\gamma(n+1) = q^{-b} p^a \gamma(n+1) = {}^{q^{-b} p^a}{}_{n+2}B z^{a\mu - b\nu + n\beta}$

Solche Quotienten aus Potenzen von Reihen habe ich bereits Infin. Dignit. §. XXVI. in Betrachtung gezogen, auch (S. 123, 124) ein berechnetes Exempel dargeſtellt, und den Gang nach der geſchmeidigen combinatoriſchen Formel, mit dem einer andern von Euler (Inſtit. Calc. Diff. P. II. C. VIII. §. 207) angegebenen, verglichen.

9. Wer die Formeln und Rechnungen kennt, welche das Keplerische Problem, die Aufgabe von drey Körpern, überhaupt die Perturbationen, veranlaßt haben, dem werden dieſe und ähnliche Unterſuchungen, die ſich auch auf trigonometriſche Functionen erſtrecken laſſen, weder zu verwickelt noch überflüßig ſcheinen.

## VIII.

## Lokalformeln für höhere Differenziale von Potenzen und ihren Producten, wo alle höhere Differenziale beybehalten werden; von Herrn Magiſter Rothe.

1. Es ſeyen $\varphi x$, $\chi x$, $\psi x$ verſchiedene, von einander ganz unabhängige Functionen von x, und $\varphi z$, $\chi z$, $\psi z$ dieſelben Functionen von z, ſo iſt, wenn $x = z + c$ geſetzt wird, nach dem Tayloriſchen Satze:

$$\varphi x = \varphi z + \frac{d\varphi z}{1}\left(\frac{c}{dz}\right)^1 + \frac{d^2\varphi z}{1.2}\left(\frac{c}{dz}\right)^2 + \text{etc}$$

$$\chi x = \chi z + \frac{d\chi z}{1}\left(\frac{c}{dz}\right)^1 + \frac{d^2\chi z}{1.2}\left(\frac{c}{dz}\right)^2 + \text{etc}$$

$$\psi x = \psi z + \frac{d\psi z}{1}\left(\frac{c}{dz}\right)^1 + \frac{d^2\psi z}{1.2}\left(\frac{c}{dz}\right)^2 + \text{etc}$$

2. Folg-

2. Folglich, wenn man nachstehende drey Scalen einführt:

$$p\left[\varphi z, \frac{d\varphi z}{1}, \frac{d^2\varphi z}{1.2}, \frac{d^3\varphi z}{1.2.3}, \ldots\right]$$

$$q\left[\chi z, \frac{d\chi z}{1}, \frac{d^2\chi z}{1.2}, \frac{d^3\chi z}{1.2.3}, \ldots\right]$$

$$r\left[\psi z, \frac{d\psi z}{1}, \frac{d^2\psi z}{1.2}, \frac{d^3\psi z}{1.2.3}, \ldots\right]$$

so ist

$$\psi^\gamma x.\, \chi^\beta x.\, \varphi^\alpha x = r^\gamma q^\beta p^\alpha \varkappa 1 + r^\gamma q^\beta p^\alpha \varkappa 2 \left(\frac{c}{dz}\right)^1 + r^\gamma q^\beta p^\alpha \varkappa 3 \left(\frac{c}{dz}\right)^2 \ldots + r^\gamma q^\beta p^\alpha \varkappa (n+1) \left(\frac{c}{dz}\right)^n + \ldots$$

3. Es ist aber auch nach der Taylorischen Formel:

$$\psi^\gamma x.\chi^\beta x.\varphi^\alpha x = \psi^\gamma z\, \chi^\beta z\, \varphi^\alpha z + d[\psi^\gamma z\, \chi^\beta z \varphi^\alpha z]\left(\frac{c}{dz}\right)^1 + \frac{d^2[\psi^\gamma z\, \chi^\beta z\, \varphi^\alpha z]}{1.2}\left(\frac{c}{dz}\right)^2 \ldots + \frac{d^n[\psi^\gamma z\, \chi^\beta z \varphi^\alpha z]}{1.2.3.4 \ldots n-1.n}\left(\frac{c}{dz}\right)^n + \ldots$$

4. Und so kommt (2, 3)

$$r^\gamma q^\beta p^\alpha \varkappa (n+1) = \frac{d^n[\psi^\gamma z\, \chi^\beta z\, \varphi^\alpha z]}{1.2.3.4 \ldots n-1.n};$$ also

$$d^n[\psi^\gamma z\, \chi^\beta z\, \varphi^\alpha z] = n.n\text{-}1.n\text{-}2 \ldots 2.1\,[r^\gamma q^\beta p^\alpha]\varkappa(n+1)$$

(Die Scalen für p, q, r sind die oben in 2).

5. Man setze nun $\varphi z = u$, $\chi z = v$, $\psi z = w$, so ist

$$d^n[w^\gamma v^\beta u^\alpha] = n.n-1 \ldots 2.1\,[r^\gamma q^\beta p^\alpha]\varkappa(n+1)$$

für nachſtehende drey Scalen

$$p\left[u,\ du,\ \frac{d^2u}{1.2},\ \frac{d^3u}{1.2.3}\ldots\right]$$
$$q\left[v,\ dv,\ \frac{d^2v}{1.2},\ \frac{d^3v}{1.2.3}\ldots\right]$$
$$r\left[w,\ dw,\ \frac{d^2w}{1.2},\ \frac{d^3w}{1.2.3}\ldots\right]$$

6. Was hier von drey veränderlichen Größen u, v, w erwieſen iſt, läßt ſich ſogleich ohne Schwierigkeit auf mehrere ausdehnen, und ſo iſt allgemein

$$\frac{d^n(\ldots y^\varepsilon x^\delta w^\gamma v^\beta u^\alpha)}{1.2.3.4\ldots n-1.n} = (\ldots t^\varepsilon s^\delta r^\gamma q^\beta p^\alpha)_{x(n+1)}$$

für eben ſo viele Scalen (5) als es hier einzelne Factoren giebt.

7. Daraus folgt, als ein ſpecieller Fall,

$$d^n z^m = 1.2.3\ldots n-1.n.\ p^m{}_{x(n+1)}$$
$$p\left[z,\ \frac{dz}{1},\ \frac{d^2z}{1.2},\ \frac{d^3z}{1.2.3}\ldots\right]$$

8. Exempel. I. Für $n=4$ iſt $d^4z^m = 4.3.2.1\,p^m{}_{x5}$

alſo
$$\frac{d^4z^m}{4.3.2.1} = \left\{\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\,z^{m-1}\,a^4A + {}^m\mathfrak{B}\,z^{m-2}\,b^4B \\ + {}^m\mathfrak{C}\,z^{m-3}\,c^4C + {}^m\mathfrak{D}\,z^{m-4}\,b^4D \end{matrix}\right\}_{\left(z,\ \frac{dz}{1},\ \frac{d^2z}{1.2},\ \frac{d^3z}{1.2.3},\ \frac{d^4z}{1.2.3.4}\ldots\right)}$$

und

$$d^4z^m = 24\left[\frac{{}^m\mathfrak{A}\,z^{m-1}\,d^4z}{1.2.3.4} + {}^m\mathfrak{B}\,z^{m-2}\left(\frac{2dzd^3z}{1.2.3} + \left[\frac{d^2z}{1.2}\right]^2\right) + {}^m\mathfrak{C}\,z^{m-3}\,\frac{3dz^2.d^2z}{1.2} + {}^m\mathfrak{D}\,z^{m-4}dz^4\right]$$

für

für alle Werthe von m, wie bey Euler (Inſt. Calc. diff. P. I. §. 244, III) aber von vorhergehenden Differenziationen unabhängig.

II. Für $n=4$ und $m=2$, fielen in I die beyden letzten Glieder weg, und ſo käme

$$d^4z^2=2z\,d^4z+8\,dz.\,d^3z+6\,dd\,z^2$$

Ueberhaupt, wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo kann man in dieſem Falle die verkürzte Formel

$$p^m\,\varkappa(n+1)=m^{n+m}\mathcal{M}$$
$$p\left(z,\ \frac{dz}{1},\ \frac{d^2z}{1.2},\ \frac{d^3z}{1.2.3},\ \frac{d^4z}{1.2.3.4}\ \ldots\right)$$

in dem Werthe von $d^n z^m$ gebrauchen. So wie hier, in I und II (durch Verbindung des Reihenbuchſtabens p, mit den über die einzelnen Glieder beygeſchriebenen Ordnungszahlen) laſſen ſich Scale und Zeiger bequem zuſammen angeben. Hindenb. Paralip. ad Ser. Reverſ. p. IV. Note b und VII, VIII, Note h.

Setzt man ein erſtes Differenzial einer oder mehrerer veränderlichen Größen (in 1—8) conſtant, ſo werden alle übrige höhere Differenziale derſelben $=0$.

9. Da $\dfrac{d^n[\ldots w^\gamma v^\beta u^\alpha]}{1.2.3\ldots n-1.n}=\ldots r^\varkappa q^\beta p^\alpha\varkappa(n+1)$ iſt (6) und der letzte Ausdruck ſich in Producte aus Coefficienten der einzelnen Potenzen $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma\ldots$ zerlegen läßt (S. 223, 9; 227, 7) ſo muß man die Formeln und Vorſchriften in 7 und 8 nur öfter anwenden. Nun iſt aber, wenn man u, $\alpha$ ſtatt z, m (in 7) ſetzt $p^\alpha\varkappa(n+1)=\dfrac{d^n u^\alpha}{1.2.3\ldots n}$; daraus folgt, für alle Werthe von $\alpha$,

$$p^{\alpha}\varkappa 1 = u^{\alpha}$$

$$p^{\alpha}\varkappa 2 = \frac{du^{\alpha}}{1} = {}^{\alpha}\mathfrak{A}u^{\alpha-1}\frac{du}{1}$$

$$p^{\alpha}\varkappa 3 = \frac{d^2u^{\alpha}}{1.2} = {}^{\alpha}\mathfrak{A}u^{\alpha-1}\frac{d^2u}{1.2} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}u^{\alpha-2}\left(\frac{du}{1}\right)^2$$

$$p^{\alpha}\varkappa 4 = \frac{d^3u^{\alpha}}{1.2.3} = {}^{\alpha}\mathfrak{A}u^{\alpha-1}\frac{d^3u}{1.2.3} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}u^{\alpha-2}2\left[\frac{du}{1}\frac{d^2u}{1.2}\right] + {}^{\alpha}\mathfrak{C}u^{\alpha-3}\left(\frac{du}{1}\right)^3$$

etc etc etc etc etc

Hat man diese Coefficienten ausgedrückt: so hat man zugleich die eben so vielten für $q^{\beta}$ und $r^{\gamma}$ u. s. w. (in 6) mitgefunden, weil man nur, in jenem Falle q, β, v.., in diesem r, γ, w... statt der obigen p, α, u setzen darf (5).

10. So können und müssen für solche höhere Differenziale (9) sehr zusammengesetzte Ausdrücke herauskommen. Sie werden aber nicht dadurch weitläuftig, weil etwa das Verfahren dafür verwickelt wäre, sondern weil sie aus vielen Theilen bestehen, und man also, zwar wenig oder nichts zu rechnen, aber viel zu schreiben hat.

Setzte man (in 9) $\alpha = \beta = 1$, alle übrige Exponenten aber $= 0$, so käme

$$\frac{d^n(vu)}{1.2.3..n} = \left\{\frac{q\varkappa 1 p\varkappa(n+1)+q\varkappa 2 p\varkappa n \ldots + q\varkappa(n+1)p\varkappa 1}{1.2..n}\right\} = \left\{\frac{v\,d^nu}{1.2..n} + \frac{dv}{1}\frac{d^{n-1}u}{1.2..(n-1)} \ldots + \frac{d^n.v.u}{1.2..n}\right\}$$

die vorlängst bekannte Formel:

$$d^n.yx = xd^ny + {}^n\mathfrak{A}\,dxd^{n-1}y + {}^n\mathfrak{B}d^2xd^{n-2}y \ldots + d^nx.y$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte).

IX.

# IX.

## Auszüge und Recensionen neuer Bücher.

---

1. Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen. Abgefaßt von A. G. Käſtner. Dritte ſtark vermehrte Auflage. Göttingen bey Vandenhoek und Ruprecht 1794; 579 Octaſ. mit 4 Kupfert.

Der Werth dieſes Lehrbuchs, das ſich durch zweckmäßige Auswahl der Materien und demonſtrative Schärfe ſo vorzüglich empfohlen hat, iſt vorlängſt entſchieden. Hier brauchen blos die Bereicherungen der neuen ſehr ſtark vermehrten Auflage (die vorige enthielt nur 443 Seiten) kurz nachgewieſen zu werden, die in Erläuterungen, Anwendungen, Bücheranzeigen, Umarbeitungen, auch neu mitgetheilten Unterſuchungen beſtehen, und im analytiſch-geometriſchen Theile vornehmlich zahlreich ſind. Der Abſchnitt 36 enthält eine für Anfänger wichtige ſehr nützliche Erläuterung bey Rechnungen mit unmöglichen Größen; zu den Verſetzungen gegebener Dinge (47) einige Zuſätze; wie man ſich zu verhalten habe, wenn man nach zwey Dingen forſcht, die beyde durch ein einziges gegeben ſind — und daß man nicht von der Benennung der gegebenen und geſuchten Größen; ſondern von der Betrachtung ihres gegenſeitigen Verhältens anfangen müſſe (77); daß man Zahlen, nicht blos wie gewöhnlich, aus gegebenen andern Zahlen, ſondern auch aus ihrem gegenſeitigen Verhalten finden könne (79, Anm.); durch Seiten der Vielecke, die durch Elementargeometrie gegeben ſind, als Sehnen im Kreiſe, wie man ſie auch immer gebrauchen, und die dadurch gefundenen Kreisbogen weiter fort halbiren mag, kann man doch nie auf einen einzigen Grad, wohl aber auf Gränzen deſſelben kommen (173); rationale Trigonometrie und Regel Coeci (189). Die Lehre von den Gleichungen iſt, außer ein Paar Zuſätzen (209 Anm. und 321, Anm.) unverändert geblieben; deſto mehr iſt die von den krummen Linien, durch Erläuterungen, Anwendungen, hiſtoriſche Nachweiſungen und viele ganz neue Zuſätze, bereichert worden. Dahin gehört die analytiſche Entwickelung der Eigenſchaften der Parabel, Ellip-

lipſe, Hyperbel, aus gegebenen Gleichungen; worin ſie ſich von einander unterſcheiden und mit einander übereinkommen (349–418). Was aber die allgemeinere Betrachtung derſelben, als Linien der zweyten Ordnung (419–466) anbetrift, ſo iſt die Abhandlung davon ganz umgearbeitet, mehrere Abſchnitte derſelben ſind ausführlicher auseinandergeſetzt und erläutert, auch mit vielen neuen Zuſätzen vermehrt worden. Dieſe ſo beträchtliche Erweiterung, die man in der Inhaltsanzeige mit einem Blicke überſehen kann, weil das, was die neue Ausgabe eigenes hat, in dem Verzeichniſſe der Rubriken mit einem Sternchen bemerkt worden, iſt um ſo angenehmer, da ſie die Linien betrift, die in der Anwendung am häufigſten vorkommen. Das, was davon hier (S. 226–320) iſt beygebracht worden, kann zugleich als die beſte Vorbereitung zu analytiſcher Behandlung anderer krummen Linien, höherer Ordnungen dienen, von denen auch hier Exempel und allgemeine Lehren vorkommen, da die ausführlichere Auseinanderſetzung der Eigenſchaften der krummen Linien überhaupt, der algebraiſchen (S. 321–341) ſo wie der tranſcendentiſchen (S. 386–405), der Analyſis des Unendlichen mit Recht vorbehalten bleibt. Von Sphäroiden und Konoiden, als runden Körpern (S. 366–368). Bey der Unterſuchung über die Schnitte einer Fläche mit jeder gegebenen Ebene, wovon ſchon vorher die Parabel, Ellipſe, Hyperbel als Schnitte eines ſenkrechten Kegels betrachtet worden, werden hier noch (S. 380–385) verſchiedene Bemerkungen den gleichſeitigen und ungleichſeitigen Kegel, des Apollonii Conica und deren Ausgaben betreffend, angeführt; da Apollonius, wie bekannt, die Kegelſchnitte ſchon allgemeiner behandelt, und dabey nicht blos den gleichſeitigen Kegel zum Grunde gelegt hat. Anwendung der Combinationen auf Wahrſcheinlichkeitsrechnungen, politiſche Arithmetik u. ſ. w. (S. 528–532); ihr Gebrauch in der Analyſis, vornehmlich zu Beſtimmung ſehr zuſammengeſetzter Coefficienten und ihrer Geſetze, auch Schriften darüber (S. 535, 536).

Die vorige Ausgabe endigte ſich mit dem 751ſten Abſchnitte; in der neuen ſind noch folgende neue Unterſuchungen hinzugekommen, und die Abſchnitte bis mit 757 fortgezählt worden: Logarithmen von Summen, Differenzen und großen Zahlen zu finden (Abſchn. 752); Gebrauch der trigonometriſchen Tafeln, zu Auffindung von Quadratwurzeln (753) und

Auf-

Auflöſung quadratiſcher Gleichungen (754); Summe der Würfel einer gegebenen Menge von 1 nach einander folgenden ganzen Zahlen (755); Gang der Rechnung, die Summe der Potenzen einerley unbeſtimmten Exponentens, einer unbeſtimmten Menge, von 1 nach einander folgenden ganzen Zahlen zu finden (756); Eine allgemeine Formel kann in einem beſtimmten Falle etwas Unrichtiges geben (daſ. XXVII); Zuſammenſetzung der Würfel aus ungeraden Zahlen (757); Eine Gleichung kann Wurzeln haben, die als Zahlen ihr genug thun, aber nicht zur Frage gehören (daſ. V). Gelegentlich werden nützliche allgemeine und beſondere Bemerkungen, auch Anwendungen auf Beyſpiele, zur Erläuterung, mitgetheilt.

S. 548 wird, nach dem Beweiſe des Newtoniſchen Lehrſatzes von dem Verhalten der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln, eine Stelle aus einem noch ungedruckten Briefe Heinrich Oldenburgs, Secretärs der königl. engl. Soc. an Leibnitzen, vom 30 März 1675 angeführt, worin Albert Girard, einer der größten Mathematiker im Anfange des vorigen Jahrhunderts, als Erfinder (ſo verſtehe ich O. Worte im Zuſammenhange) dieſes Satzes angegeben wird. (Eigentlich iſt dieſes Theorem nur ein ſpecieller Satz, der unter einem viel allgemeinern begriffen iſt, nur ein einzelner Fall unter unzählig viel andern. Denn, ſo wie man hier Summen von Potenzen der Wurzeln durch die Coefficienten der zugehörigen Gleichung auszudrücken ſucht, ſo kann man auch den Ausdruck für Summen von Producten der Wurzeln (überhaupt Functionen derſelben) nach allen oder blos vorgeſchriebenen Verbindungen, mit oder ohne Wiederholung, nach Umſtänden, fordern. Nav. Syſt. Comb. p. XXVIII. Freilich ſind nicht alle einzelne Fälle von gleichem Umfange und Nutzen in der Anwendung. Einer der einfachſten, der im Gebrauche am häufigſten vorkommt, und die Grundlage der Theorie der Gleichungen ausmacht, iſt der Lehrſatz vom Inhalte der Coefficienten einer gegebenen Gleichung, in Beziehung auf ihre Wurzeln; wo, wie bekannt, Summen, dieſer Wurzeln und der Producte, nach allen Verbindungen derſelben, aber ohne Wiederholungen, vorkommen).

2. Vollſtändige und gründliche Anweiſung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelscharten, und der Netze zu Coniglobien und Kugeln, von Joh. Tob. Mayer. Erlangen, bey Palm 1794, 624 S. 8. mit 7 K.

Eine gründliche und vollſtändige Abhandlung von der Verfertigung der Land- und Himmelscharten hat uns noch immer gefehlt. Nicht leicht konnte jemand dieſem Bedürfniß beſſer abhelfen, als Herr Mayer, der in ſeinem Unterricht zur praktiſchen Geometrie gezeigt hat, wie vortrefflich er ſeine Theorie mit praktiſchen Einſichten verbindet. Die gegenwärtige Abhandlung iſt zugleich beſtimmt, als vierter Theil des Werks über die praktiſche Geometrie zu dienen. Man findet in derſelben alle bisher angewandte Methoden erklärt, und nach ihrer Anwendbarkeit beurtheilt, nebſt den nöthigen hiſtoriſchen Nachrichten. Der Vortrag iſt ſehr deutlich. Man muß freilich einige mathematiſche Kenntniſſe dazu mitbringen; allein auch für Ungeübte iſt dadurch geſorgt, daß die Vorſchriften der Zeichnung abgeſondert von der Theorie vorgetragen ſind. Exempel der Rechnungen ſind allenthalben beygefügt. In der Vorbereitung iſt ein ſehr ausführliches Verzeichniß der Längen und Breiten von vielen Oertern mitgetheilt. Die Abweichung des Erd-Sphäroids von der Kugel wird unterſucht, und das Reſultat iſt, daß man bey Verzeichnung der Landcharten gar nicht nöthig habe, darauf Rückſicht zu nehmen. S. 91 findet man eine Tabelle der Breitengrade von 5 zu 5, nach der von Hrn. Klügel im aſtron. Jahrb. 1788 gegebenen Formel. Bey der Formel zur Vergleichung des Krümmungshalbmeſſers an einer Ellipſe und der Normallinie S. 96 iſt eine Verwechſelung vorgegangen. Die letztere wird bis an die kleine Axe genommen; der ihr beygelegte Werth aber gilt für das Stück bis an die große Axe. Daher iſt das folgende, insbeſonders die Tafel zu Vergleichung der Grade der Parallelkreiſe auf einer Kugel und einem Sphäroid, unrichtig. Die Berechnung des Abſtandes zweyer Oerter auf der Kugelfläche, oder des Bogens eines größten Kreiſes zwiſchen ihnen, aus ihrer Breite und dem Längen-Unterſchiede, wird auf eine gedoppelte Art gelehrt. Durch Auflöſung eines Kugeldreyecks; und durch eine Verwandlung

dieſes

dieſes ſphäriſchen in ein ebenes, welche Lambert erfunden, und in den mathem. Beyträgen, 3. Th. S. 115 ff. bekannt gemacht hat. Herr Mayer hat einen leichten und feinen Beweis durch eine ſehr einfache ſtereographiſche Conſtruction gegeben. Es wird lehrreich ſeyn, dieſen geometriſchen Beweis mit dem heuriſtiſchen Verfahren Lamberts durch bloße Rechnung, oder dem gleichfalls bloß analytiſchen Beweiſe in Herrn Klügels Abhandlung von der ſtereographiſchen Projection zu vergleichen.

Unſer Verfaſſer conſtruirt ein Dreyeck, das demjenigen, welches die ſtereographiſche Projection giebt, ähnlich iſt. Ferner beſchreibt er die Werkzeuge, die zur Zeichnung der Landcharten nöthig ſind, insbeſondere die zur Zeichnung der Kreisbogen von großen Halbmeſſern dienlichen. Dasjenige, was aus zwey ungleichen parallelen Scheiben in einer veränderlichen Entfernung beſteht, hält er mehr für ſinnreich als brauchbar. Den Transporteur ſoll man auf einer Kupferplatte zeichnen, ungefähr 15 Zoll im Durchmeſſer, und darauf die Chorden der gemeſſenen Winkel tragen. (Bey dieſem Verfahren wird es nicht nöthig ſeyn, den ganzen Halbkreis in Grade und kleinere Theile zu theilen, ſondern nur in größere Theile, etwa von 10 Graden, und einen derſelben in kleine, wie an den gewöhnlichen Maaßſtäben). Zum Beyſpiele von der Berechnung des Flächeninhalts eines Landes durch Zonenſtücke iſt Deutſchland genommen, nach Mayers kritiſcher Karte, mit Einſchluß von Böhmen, Schleſien und Preußen, aber ohne die Länder jenſeits des Rheins. Der Inhalt wird 10884 geogr. Qu. M. groß gefunden. (In manchen Fällen möchte man auch ein Land, oder den größten Theil deſſelben, in ſphäriſche Dreyecke zerlegen können, deren Inhalt ſich aus ihren Winkeln berechnen läßt).

In dem dritten Abſchnitte wird von den verſchiedenen Entwerfungsarten gehandelt, die nicht perſpectiviſch ſind. Zuerſt die Charten, auf welchen die Meridiane und Parallelkreiſe durch gerade, auf einander ſenkrechte und gleich weit abſtehende Linien abgebildet werden. Weil die Grade auf den Parallelkreiſen, denen auf den Meridianen hier gleich genommen werden, ſo werden die Länder deſto mehr verunſtaltet, je weiter ſie nach den Polen hin liegen; doch iſt die Bequemlichkeit dabey, daß ſich die Längen und Breiten der Oerter leicht

ein-

eintragen laſſen. (Bey einzelnen Ländern könnte man ja auch die Grade der Parallelkreiſe ſo groß nehmen, wie ſie auf einem mittlern ſind, ſo erhielte man eine Entwerfung, die zwiſchen jener und der folgenden ſich einſchaltet). — Die zweyte Entwerfungsart iſt mit geraden Meridianen und geraden Parallelen, von welchen zwey in ihren Gradtheilen das richtige Verhältniß zu den Graden der Meridiane haben. Wenn dieſe beiden z. B. die von 55 und 60 Grad Breite ſind, ſo weicht ein Grad des Parallelkreiſes in der Breite von 50 und 65 Grad in der Zeichnung von dem auf der Kugel, jener nur um 0,065, dieſer um 0,057 Meilen ab, beide zu groß. — In der dritten Entwerfungsart werden die Parallelen durch concentriſche Kreisbogen dargeſtellt, die Meridiane durch gerade, in dem Mittelpuncte jener Bogen zuſammen laufende Linien. Der Mittelpunkt wird beſtimmt durch die Bogen zweyer Parallelkreiſe von gleicher Anzahl Grade, die das gehörige Verhältniß zu den Graden des Meridians haben. De l'Isle hat dieſe Entwerfungsart vorzüglich empfohlen und angewandt. Eine Generalcharte des ruſſiſchen Reichs iſt nach derſelben gezeichnet. Es iſt nicht nöthig, bey der Beſtimmung des Mittelpunkts, die Bogen als gerade Linien zu betrachten, wie der Verf. thut, da die Halbmeſſer zweyer concentriſchen Bogen zu gleichen Winkeln ſich wie die Bogen verhalten. Es iſt hier genau $\omega = \frac{RQ}{PQ}$, wenn der Bogen $\omega$ durch den Halbmeſſer Eins ausgedruckt wird; bey der zweyten Entwerfungsart iſt $\text{tang } \omega = \frac{RQ}{PQ}$. In der Anwendung kommt es freylich auf eins hinaus. — Die vierte Entwerfungsart iſt eine Abwickelung eines Stücks einer ſchmalen Kugelzone als eine Kegelfläche betrachtet; der mittlere Polarkreis hat in der Zeichnung die Cotangente der Breite zum Halbmeſſer. Die Meridiane ſind entweder gerade, nach dem Mittelpunkte jenes Parallelkreiſes hin laufende Linien, oder ſie ſind krumme Linien, die durch einzelne Puncte beſtimmt werden, wenn die Grade der gezeichneten Parallelen alle ihre verhältnißmäßige Größe bekommen. Mit geradlinichten Meridianen werden jetzt viele Charten nach dieſer Art gezeichnet. Die krummlinichten hat ein franzöſiſcher Geograph, Bonne, angewandt. (Die Parallelkreiſe müßten nur nicht concentriſch ſeyn, wenn man ſie auch bey geradlinichten Meridianen ſolche ſeyn läßt. Es wird

nicht

nicht ſowohl eine Zone als ein Parallelkreis abgewickelt. Die Winkel zu gleich großen Bogen der Parallelkreiſe auf der Kugel und der Zeichnung verhalten ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer, alſo wie die Cotangente der Breite zum Coſinus, oder wie Eins zum Sinus der Breite, welches die Rechnung S. 281 unnöthig macht). — Fünftens, Murdochs ſinnreiches Verfahren, eine Kugelzone in eine gleich große Kegelfläche zwiſchen zwey parallelen Kreiſen zu verwandeln, und dieſe abzuwickeln. Die Seite des Kegelſtücks iſt dem Bogen des Meridians auf der Zone gleich. Alle drey Entwerfungsarten weichen wenig von einander ab. Denn wenn $\alpha$ und $\beta$ die Breiten ſind, in welchen nach der Methode des de l'Isle die Grade der Parallelkreiſe ihre gehörige Größe haben, ſo iſt in der Breite $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ der Halbmeſſer $= \frac{(\alpha-\beta)\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ den Halbmeſſer der Kugel zur Einheit genommen (dieſe Formel fehlt bey unſerm Verfaſſer). Iſt $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ die Breite des mittlern Parallels der abgewickelten Zone, ſo iſt der Halbmeſſer deſſelben in der Zeichnung $= \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Nach der Murdochſchen Verwandlung iſt der mittlere Halbmeſſer $= \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$, wo $\alpha$ und $\beta$ die Breiten der begränzenden Parallelen ſind. Uebrigens iſt es leicht zu bemerken, daß man nöthigen Falls bey allen drey Arten die Charte aus Stücken zu verſchiedenen Mittelpuncten zuſammenſetzen kann. — Sechstens, Flamſteed nahm in ſeinem Himmelsatlas für die Parallelkreiſe gerade, parallele Linien, und gab den Graden derſelben die gehörige Größe, wodurch die Meridiane krummlinicht werden. — Siebentens, die Seecharten, insbeſondere die nach Mercator genannten, deren Conſtruction durch die Rechnung des Unendlichen gewieſen wird. Nur wegen der Berechnung des Compaßſtriches für die loxodromiſche Linie von einem Orte zu einem andern iſt zu bemerken, daß es eine bequemere und richtigere Methode giebt, als die §. 46. angeführte. Man braucht nur den Unterſchied der Länge in Minuten ausgedrückt durch den Unterſchied der den Breiten zugehörigen Meridionaltheile (oder ausgeſtreckten Breiten) zu dividiren, ſo erhält man die Tangente des Curſes; in dem Exempel 63° 32′ ſtatt 64° 23′. — Achtens, zwey Arten, nach welchen jedes Stück der Erdfläche in ſeiner wahren Flächengröße dargeſtellt wird. Die eine iſt, die Zonen in gleich-

große

große Rechtecke von einer gegebenen Grundlinie zu verwandeln, wobey aber die Geſtalt der Länder ſehr verzerrt wird, die von dem Aequator oder einem andern ſtatt des Aequators angenommenen größten Kreiſe beträchtlich entfernt liegen. Zur Entwerfung von Amerika würde dieſe Entwerfungsart dienlich ſeyn, wenn man die Parallelkreiſe auf einen gewiſſen mittlern Meridian von Amerika ſich beziehen ließe. Die zweyte Art iſt, die Kreisflächen um den Mittelpunct der Charte ſo groß zu machen, als die zuſtimmenden Segmente der Kugelfläche. Dieſes erhält man, wenn man die geradlinichten Abſtände von jenem Mittelpuncte den Sinus der halben Circularabſtände auf der Kugel gleich macht, und die Winkel der Abſtandslinien ſo groß nimmt, als die Winkel der durch ſie vorgeſtellten Kreisbogen. Man nimmt hier nämlich den Horizont des Orts, welcher in dem Mittelpunct der Zeichnung liegt, zur Tafel, und den Durchſchnitt deſſelben mit jedem durch den Ort gezogenen Kreis, zum Bilde des Kreiſes. Dieſe Entwerfungsart iſt der ſtereographiſchen ähnlich, als in welcher die Kreiſe durch den zum Mittelpunct der Zeichnung genommenen Ort auch durch gerade Linien mit denſelben Winkeln wie auf der Kugel abgebildet werden, aber der Abſtand jedes Ortes von jenem der Tangente des halben Circularabſtandes proportional iſt. Ein Beyſpiel dieſer von Lambert erfundenen Entwerfungsart trifft man in den beyden Planiſphären bey Herrn Bode's Anleitung zur Kenntniß der Erdkugel an. Sie hat darin den Vorzug vor den perſpectiviſchen ſowohl, als der ſtereographiſchen, daß die Grade nach dem Rande des Planiſphärs zu, gegen die in die Mitte, weniger ungleich werden als bey dieſen. — Neuntens, Anwendung auf Coniglobien. Die Netze zu dieſen laſſen ſich ſo verfertigen, daß die Zonen den zugehörigen auf der Kugel gleich werden, und daß zugleich die Grade eines beliebigen Parallels ihre verhältnißmäßige Größe bekommen. Oder, man kann das Netz auch ſo zeichnen, daß jedes kleine Viereck zwiſchen zwey Meridianen und zwey Parallelen dem zugehörigen Viereck auf der Kugel ähnlich werde, und daß die Grade zweyer gegebenen Parallelkreiſe auf dem Netze das Verhältniß wie auf der Kugel haben. Zehntens, von Segners Vorſchlage zu einer beſondern Art von Landcharten und Erdkörpern.

Das vierte, fünfte und ſechſte Kapitel handeln von den perſpectiviſchen Vorſtellungen der Erd- und Himmelsfläche.

Der

Der Herr Verf. urtheilt von denſelben nicht günſtig. Freylich kann es keiner Projection zur Empfehlung dienen, daß ſie perſpectiviſch iſt, ſondern es kommt darauf an, was für Bequemlichkeiten ſie gewährt, und hier verdiente doch die ſtereographiſche Projection, beſonders bey Planiſphären, nicht zurückgeſetzt zu werden. Ihre vorzügliche Brauchbarkeit erhellt aus der Anweiſung, die Herr Bode zu ſeinen Planiſphären gegeben hat. Bey einzelnen Ländern mag eine der vorher beſchriebenen Arten den Vorzug verdienen; allein auch hier wird die ſtereographiſche Projection ihre eigene Brauchbarkeit haben: nur muß man das Land nicht aus dem Planiſphärio nach dem Rande hin ausſchneiden, wo keine andere als krummlinichte Meridiane durchgehen, ſondern einen ſchicklichern Ort des Landes zum Mittelpuncte der Projection machen. — Zur Einleitung in die Lehre von der ſtereographiſchen Projection hat der Herr Verf. eine feine Unterſuchung über die Figur der Schnitte eines Kegels in irgend einer Lage vorangeſchickt, um zu zeigen, in welcher Lage der Schnitt ein Kreis ſeyn könne. Die Eigenſchaften dieſer Projection, werden theils aus der geometriſchen Betrachtung, theils aus allgemeinen trigonometriſchen Sätzen auf eine faßliche Weiſe hergeleitet. Der Satz von dem geometriſchen Orte des Mittelpunctes der projicirten Meridiane (es iſt dieſer eine gerade Linie) wird auf zweyfache Art erwieſen, analytiſch (durch Trigonometrie) und ſynthetiſch durch zeichnende Geometrie, beidemahl etwas umſtändlich. Kurz läßt ſich die Sache ſo faſſen. Es iſt (Fig. 51.) $Cc^2 + Cq^2 + 2Cq \times CK = cq^2 = cD^2 = Cc^2 + CD^2$, alſo $2Cq \times GK = CD^2 - Cq^2$, und CK eine gegebene Größe, und der Ort des Mittelpunctes c in dem Perpendikel durch K. Die Fig. 54. könnte einen Ungeübten erſchrecken. Es braucht in in der That zur Beſtimmung der Projection eines Punktes keiner Coordinaten. Wenn man aus der Länge und Breite eines Punctes die Lage deſſelben in Abſicht auf den Mittelpunct der Zeichnung herleitet, ſo hat man die beiden zur Zeichnung des Punctes nöthigen Beſtimmungen, nämlich den linearischen Abſtand und den erforderlichen Winkel. Das wird alles ſeyn, was der Recenſent über die Abhandlung von der ſtereographiſchen Projection, erinnern könnte. Die Anmerkungen für die Anwendung auf die Ausübung ſind brauchbar. — Den Beſchluß des Werks machen die orthographiſche und Centralprojectionen und eine Anweiſung die Netze für Kugeln zu machen. Der Verf. iſt bey den letztern Hrn. Käſtner (in Comm.

Götting. 1778) gefolgt, und hat auf eine gute Art für ungeübte Leſer die Integralrechnung in eine Rechnung mit endlichen Unterſchieden verwandelt.

## 3. Hiſtoriſch-kritiſches Verzeichniß aller die combinatoriſche Analytik nahe oder entfernt angehenden Schriften.

(Man ſehe die Vorerinnerung im erſten Hefte. S. 111/119)

Ich werde hier die Schriften nach den Ordnungszahlen ihrer Folge hinter einander aufführen, um ſelbige, erforderlichen Falls, nach Numern bequem citiren zu können.

Als Vorläufer *) der combinatoriſchen Analytik gehört zuerſt hieher:

(1) Carl Friedrich Hindenburgs Beſchreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Geſetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmeſſen bequem und ſicher zu finden; nebſt Anwendung der Methode auf verſchiedene Zahlen, beſonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel, mit eingeſtreueten, die

*) Dafür wird auch dieſe Schrift in den hiſtoriſchen Nachrichten der Berliner Acad. des Sc. et belles lettres; année 1781. S. 34 erkannt, und dabey bemerkt, die in den Infin. Dignit. beſonders aber dem Nov. Syſt. Perm. etc aufgeſtellte, und durch die Unterſuchungen dieſer Schrift (1) veranlaßte neue combinatoriſch-analytiſche Theorie ſey ungleich wichtiger und weitausſehender, als jene Methode, aus der ſie entſprungen ſey. Die ausführliche Stelle darüber, hat Herr Toepfer (Comb. Analyt. S. 28. Note 5) beygebracht. Von den Schwierigkeiten, die ſich anfangs zeigten, da ich die in dieſer Schrift bey den Zahlen gefundenen Vortheile, auch auf allgemein ausgedrückte Größen, in der Analyſis überzutragen ſuchte, und von den eben ſo einfachen als wirkſamen Mitteln, die endlich zu dem vorgeſetzten Ziele führten, ſehe man Leipz. Magaz. für rein. und angew. Mathem. 1786. 3tes St. S. 322, 324 und Lamb. deutſch. gel. Briefw. V B. 1 Th. S. 157. Note o.

die Zahlenberechnung überhaupt betreffenden Anmerkungen. Nebſt drey Kupfertafeln und fünf Beylagen *). Leipzig, bey S. L. Cruſius, 1776; 120 Octavſ.

Der Gedanke, auf den ich verfallen war, die Zahlen in ihrer natürlichen Folge hinter einander (Beyl. A) oder auch in jeder andern, nach Abſicht gewählten Ordnung (Beyl. B, C) oder ſprungweiſe (Beyl. Cc), in von einander abgeſonderten und in rectangulärer Form angeordneten Fächern, nach einer dem Decimal- oder jedem andern Syſtem angemeſſenen Einrichtung, mit größter Leichtigkeit auf einmal *in Extenſo* darzuſtellen, und ſtatt der geforderten Zahlen, die man daraus finden ſoll, ihre



*) Dieſe Beylagen ſind Bogen in Royalformat, die erſten vier mit Zahlen nach dekadiſcher Fortſchreitung, in Fächer geordnet, beſetzt, die zuſammen mehrere rechtwinklichte, nach der ganzen Länge des Bogens geſtreckte, Parallelogrammen neben einander darſtellen; der fünfte aber zeigt blos leere Fächer, und ſchmale, in Rechtecke verſchiedentlich geordnete, Streifen. Die Beylage A enthält zweyzifrige dekadiſche Zahlengeſetze (wie das hier Heft I. S. 20) für gerade und ungerade Zahlen durch einander; B dergleichen blos für gerade, und C blos für ungerade Zahlen; Cc ſtellt dieſelben ungeraden Zahlen, aber mit Bemerkung aller durch 3 und 5 theilbaren Zahlen, vermittelſt deutſcher und lateiniſcher, unter den zugehörigen Zahlen zugleich mit eingedruckten, großen Buchſtaben, dar. Des fünften Bogens D erſte Seite enthält mehrere große Rechtecke, in ſchmale horizontale und verticale Streifen, zum Theil mit Zahlenrubriken verſehen, abgetheilt; die Kehrſeite Dd füllt ein einziges großes Rechteck, das in mehrere kleine Quadrate, in Form eines Netzes, zerſchnitten iſt; beyde Seiten, zu Ausführung ſehr verſchiedener und mannichfaltiger Abſichten, ſelbſt für combinatoriſche Operationen bequem, eingerichtet.

Ich habe die Beſchreibung dieſer Beylagen hier beygefügt, weil man daraus das Figürliche ihrer Anordnung ſogleich überſehen, auch begreifen kann, in wiefern Abzählung oder Abmeſſung von Fächern, und dadurch der Zahlen, nach beſtimmten Geſetzen möglich iſt. Auch habe ich gefunden, daß mehrere Beſitzer des Buchs die Tafeln gar nicht haben; wodurch die Schrift den größten Theil ihrer Brauchbarkeit verliert.

Stellen, durch Abzählen oder Abmeſſen, durch Patronen und Inſtrumente u. ſ. f. aufzuſuchen — Dieſer Gedanke, in Verbindung und Anwendung auf die durch ihn veranlaßten und durch den Druck ein für allemal vorbereiteten und bequem eingerichteten Zahlenbogen, zeigte mir zuerſt die Wichtigkeit figürlicher Anordnungen auf die auffallendſte Art. Schon die bloßen Beylagen A, B, C, ohne alle weitere Bearbeitung, dafür ſie eigentlich beſtimmt ſind, geben das mit einem Blicke zu erkennen; beſonders aber der, zu mechaniſcher Aufſuchung der Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen eigentlich vorgerichtete Zahlenbogen Cc. Auf dieſem nämlich gehen die Fächer aller durch 5 theilbaren Zahlen, in zwey parallelen ſenkrechten Colonnen, untereinander, die Fächer der durch 3 theilbaren Zahlen, nach gleichfalls parallelen, aber diagonalen Richtungen, neben einander fort, und eben ſo auch die weiter einzuſchreibenden Primzahlenfactoren 7, 11, 13 ꝛc. wobey zugleich ein, von Dreyhundert zu Dreyhundert durch den ganzen Bogen Cc umlaufender Period, ſichtbar vor Augen liegt. Die Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen, wie ſie die Bearbeitung dieſes Bogens an einander reihet, ſtellen gut geordnete Complexionen aus Primzahlen dar; und der Umſtand, daß man hier, ſtatt der Zahlen ſelbſt, nur die Stellen ſucht, auf welche die nach ihrer Ordnung abgezählten Localzahlen fallen, zeigt ſchon den nützlichen Gebrauch ſolcher Zahlen, als ſtellvertretender Zeichen, die ſich in der Folge ſo nützlich bewieſen haben. Bey der Factorenaufſuchung wird der Werth der Stelle, oder ihre Zahl, durch die ſchon vorher in den Fächern eingedruckten und zur Seite beygeſchriebenen Ziffern, ſogleich unmittelbar nachgewieſen; in der combinatoriſchen Analytik, geſchieht es gewöhnlich durch eine vorgängige figürliche, combinatoriſche, größtentheils involutoriſche Anordnung von Ziffern, deren einzelne Werthe durch den Index weiter beſtimmt werden.

Von dem Inhalte dieſer Schrift gehört weiter hierher: Erſtreckung der Abmeſſungsmethode auf allerley andere Arten von Zahlen; Aufſuchung der Zahlen von gegebenen Formen; der Potenzzahlen Entſtehung und Anordnung nach Figur; geometriſcher und arithmetiſcher Gnomon; Geſetze für Quadrate, nach der Ordnung und ſprungweiſe; der Quadrat-, Pronic-, Triangular- ꝛc. Zahlen Abmeſſung; ingleichen der Reſte; Endziffernformen und Perioden; Darſtellung der Quadratzahlen,

nach

nach und außer der Ordnung, aus freyer Hand; Abmeſſung und Geſetze für Cubiczahlen; ihre Gnomons und deren Abmeſſung; Verſetzungen und Verbindungen nach Fächern; verſchiedene Zahlengebäude in und um einander; Fortſchreitungsgeſetze für Zahlen aller Art; Abmeſſung für gebrochene Zahlen, gemeine, decimal-, ſexageſimal- und andere Brüche; ebendergleichen für den Canon Sexagenarum; mechaniſche Diviſion aus Tariffen der möglichen Dividenden, Quotienten und Reſte *)

Unter den hier angeführten größtentheils mechaniſchen Vortheilen, die, jeder in ſeiner Art, ſehr wirkſam ſind, haben ſich vor andern, die bereits in der Vorrede (S. 3) bemerkten, erheblichen Ausſichten (wie ſie dort genennt werden) in der Folge wichtig gezeigt:

1) Das aufgefundene Geſetz der mechaniſchen Fortſchreitung der Quadrate und anderer Zahlen (S. 69-79); nach welchem man ſolche Zahlen, ohne alle Berechnung, ohne Abzählung oder Abmeſſung, aus freyer Hand, ganz mechaniſch fortſchreiben kann. Die dortige Unterſuchung fängt von Aufſuchung der Stellen der Quadratzahlen durch Abzählung der ungeraden, als Localzahlen an (S. 56-58), führt aber gar bald, mit beträchtlicher Abkürzung der Arbeit, auf Endziferformen und Endziferperioden (S. 59, 66, 70-79), durch deren Beyhülfe das Auffinden der Quadratzahlen in ein bloßes Addiren der einzelnen 0, 1, 2...9 in die zugehörigen Stellen, verwandelt wird. Dieſe Endzifer-Formen und Perioden, gehören mit den cykliſchen Perioden (hier S. 28, E) in eine Claſſe: der Fortſchreitung nämlich gegebener Elemente, Ziffern oder Buchſtaben, in vertikalen Reihen neben einander (das Schreiben der Elemente in die Tiefe; hier S. 15)**).



*) Andere im Buche angeführte Vortheile und Einrichtungen: Gebrauch und Vorrichtung der ſchmalen Segmente (auf dem Bogen D) für rhabdologiſche Rechnungen; Additions- und Subtractionsſcalen; Segmente von durchſcheinendem Papiere u. d. gl. erwähne ich hier nicht, weil ſie in keiner Beziehung mit combinatoriſchen Verfahren ſtehen, wie die im Texte genannten, und alſo auch dafür nichts nachweiſen konnten.

**) Leibnitz iſt vielleicht der erſte, der Betrachtungen über den Fortgang einer Reihe gegebener Zahlen nach ihren einzelnen Ziffern in die Tiefe angeſtellt hat. Er zeigt dergleichen Ziferperioden,

Götting. 1778) gefolgt, und hat auf eine gute Art für ungeübte Leſer die Integralrechnung in eine Rechnung mit endlichen Unterſchieden verwandelt.

## 3. Hiſtoriſch-kritiſches Verzeichniß aller die combinatoriſche Analytik nahe oder entfernt angehenden Schriften.

(Man ſehe die Vorerinnerung im erſten Hefte. S. 111/119)

Ich werde hier die Schriften nach den Ordnungszahlen ihrer Folge hinter einander aufführen, um ſelbige, erforderlichen Falls, nach Numern bequem citiren zu können.

Als Vorläufer *) der combinatoriſchen Analytik gehört zuerſt hieher:

(1) Carl Friedrich Hindenburgs Beſchreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Geſetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmeſſen bequem und ſicher zu finden; nebſt Anwendung der Methode auf verſchiedene Zahlen, beſonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel, mit eingeſtreueten, die

*) Dafür wird auch dieſe Schrift in den hiſtoriſchen Nachrichten der Berliner Acad. des Sc. et belles lettres; année 1781. S. 34 erkannt, und dabey bemerkt, die in den Infin. Dignit. beſonders aber dem Nov. Syſt. Perm. etc aufgeſtellte, und durch die Unterſuchungen dieſer Schrift (1) veranlaßte neue combinatoriſch-analytiſche Theorie ſey ungleich wichtiger und weitausſehender, als jene Methode, aus der ſie entſprungen ſey. Die ausführliche Stelle darüber, hat Herr Toepfer (Comb. Analyt. S. 28. Note 5) beygebracht. Von den Schwierigkeiten, die ſich anfangs zeigten, da ich die in dieſer Schrift bey den Zahlen gefundenen Vortheile, auch auf allgemein ausgedrückte Größen, in der Analyſis überzutragen ſuchte, und von den eben ſo einfachen als wirkſamen Mitteln, die endlich zu dem vorgeſetzten Ziele führten, ſehe man Leipz. Magaz. für rein. und angew. Mathem. 1786. 3tes St. S. 322, 324 und Lamb. deutſch. gel. Briefw. V B. 1 Th. S. 157. Note o.

die Zahlenberechnung überhaupt betreffenden Anmerkungen. Nebſt drey Kupfertafeln und fünf Beylagen *). Leipzig, bey S. L. Cruſius, 1776; 120 Octavſ.

Der Gedanke, auf den ich verfallen war, die Zahlen in ihrer natürlichen Folge hinter einander (Beyl. A) oder auch in jeder andern, nach Abſicht gewählten Ordnung (Beyl. B, C) oder ſprungweiſe (Beyl. Cc), in von einander abgeſonderten und in rectangulärer Form angeordneten Fächern, nach einer dem Decimal- oder jedem andern Syſtem angemeſſenen Einrichtung, mit größter Leichtigkeit auf einmal *in Extenſo* darzuſtellen, und ſtatt der geforderten Zahlen, die man daraus finden ſoll, ihre



*) Dieſe Beylagen ſind Bogen in Royalformat, die erſten vier mit Zahlen nach dekadiſcher Fortſchreitung, in Fächer geordnet, beſetzt, die zuſammen mehrere rechtwinklichte, nach der ganzen Länge des Bogens geſtreckte, Parallelogrammen neben einander darſtellen; der fünfte aber zeigt blos leere Fächer, und ſchmale, in Rechtecke verſchiedentlich geordnete, Streifen. Die Beylage A enthält zweyzifrige dekadiſche Zahlengeſetze (wie das hier Heft I. S. 20) für gerade und ungerade Zahlen durch einander; B dergleichen blos für gerade, und C blos für ungerade Zahlen; Cc ſtellt dieſelben ungeraden Zahlen, aber mit Bemerkung aller durch 3 und 5 theilbaren Zahlen, vermittelſt deutſcher und lateiniſcher, unter den zugehörigen Zahlen zugleich mit eingedruckten, großen Buchſtaben dar. Des fünften Bogens D erſte Seite enthält mehrere große Rechtecke, in ſchmale horizontale und verticale Streifen, zum Theil mit Zahlenrubriken verſehen, abgetheilt; die Kehrſeite Dd füllt ein einziges großes Rechteck, das in mehrere kleine Quadrate, in Form eines Netzes, zerſchnitten iſt; beyde Seiten, zu Ausführung ſehr verſchiedener und mannichfaltiger Abſichten, ſelbſt für combinatoriſche Operationen bequem, eingerichtet.

Ich habe die Beſchreibung dieſer Beylagen hier beygefügt, weil man daraus das Figürliche ihrer Anordnung ſogleich überſehen, auch begreifen kann, in wiefern Abzählung oder Abmeſſung von Fächern, und dadurch der Zahlen, nach beſtimmten Geſetzen möglich iſt. Auch habe ich gefunden, daß mehrere Beſitzer des Buchs die Tafeln gar nicht haben; wodurch die Schrift den größten Theil ihrer Brauchbarkeit verliert.

Stellen, durch Abzählen oder Abmeſſen, durch Patronen und Inſtrumente u. ſ. f. aufzuſuchen — Dieſer Gedanke, in Verbindung und Anwendung auf die durch ihn veranlaßten und durch den Druck ein für allemal vorbereiteten und bequem eingerichteten Zahlenbogen, zeigte mir zuerſt die Wichtigkeit figürlicher Anordnungen auf die auffallendſte Art. Schon die bloßen Beylagen A, B, C, ohne alle weitere Bearbeitung, dafür ſie eigentlich beſtimmt ſind, geben das mit einem Blicke zu erkennen; beſonders aber der, zu mechaniſcher Aufſuchung der Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen eigentlich vorgerichtete Zahlenbogen Cc. Auf dieſem nämlich gehen die Fächer aller durch 5 theilbaren Zahlen, in zwey parallelen ſenkrechten Colonnen, untereinander, die Fächer der durch 3 theilbaren Zahlen, nach gleichfalls parallelen, aber diagonalen Richtungen, neben einander fort, und eben ſo auch die weiter einzuſchreibenden Primzahlenfactoren 7, 11, 13 ꝛc. wobey zugleich ein, von Dreyhundert zu Dreyhundert durch den ganzen Bogen Cc umlaufender Period, ſichtbar vor Augen liegt. Die Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen, wie ſie die Bearbeitung dieſes Bogens an einander reihet, ſtellen gut geordnete Complexionen aus Primzahlen dar; und der Umſtand, daß man hier, ſtatt der Zahlen ſelbſt, nur die Stellen ſucht, auf welche die nach ihrer Ordnung abgezählten Localzahlen fallen, zeigt ſchon den nützlichen Gebrauch ſolcher Zahlen, als ſtellvertretender Zeichen, die ſich in der Folge ſo nützlich bewieſen haben. Bey der Factorenaufſuchung wird der Werth der Stelle, oder ihre Zahl, durch die ſchon vorher in den Fächern eingedruckten und zur Seite beygeſchriebenen Ziffern, ſogleich unmittelbar nachgewieſen; in der combinatoriſchen Analytik, geſchieht es gewöhnlich durch eine vorgängige figürliche, combinatoriſche, größtentheils involutoriſche Anordnung von Ziffern, deren einzelne Werthe durch den Index weiter beſtimmt werden.

Von dem Inhalte dieſer Schrift gehört weiter hierher: Erſtreckung der Abmeſſungsmethode auf allerley andere Arten von Zahlen; Aufſuchung der Zahlen von gegebenen Formen; der Potenzzahlen Entſtehung und Anordnung nach Figur; geometriſcher und arithmetiſcher Gnomon; Geſetze für Quadrate, nach der Ordnung und ſprungweiſe; der Quadrat-, Pronic-, Triangular- ꝛc. Zahlen Abmeſſung; ingleichen der Reſte; Endziffernformen und Perioden; Darſtellung der Quadratzahlen,

nach

nach und außer der Ordnung, aus freyer Hand; Abmeſſung und Geſetze für Cubiczahlen; ihre Gnomons und deren Abmeſſung; Verſetzungen und Verbindungen nach Fächern; verſchiedene Zahlengebäude in und um einander; Fortſchreitungsgeſetze für Zahlen aller Art; Abmeſſung für gebrochene Zahlen, gemeine, decimal-, ſexageſimal- und andere Brüche; ebendergleichen für den Canon Sexagenarum; mechaniſche Diviſion aus Tariffen der möglichen Dividenden, Quotienten und Reſte *)

Unter den hier angeführten größtentheils mechaniſchen Vortheilen, die, jeder in ſeiner Art, ſehr wirkſam ſind, haben ſich vor andern, die bereits in der Vorrede (S. 3) bemerkten, erheblichen Ausſichten (wie ſie dort genennt werden) in der Folge wichtig gezeigt:

1) Das aufgefundene Geſetz der mechaniſchen Fortſchreitung der Quadrate und anderer Zahlen (S. 69-79); nach welchem man ſolche Zahlen, ohne alle Berechnung, ohne Abzählung oder Abmeſſung, aus freyer Hand, ganz mechaniſch fortſchreiben kann. Die dortige Unterſuchung fängt von Aufſuchung der Stellen der Quadratzahlen durch Abzählung der ungeraden, als Localzahlen an (S. 56-58), führt aber gar bald, mit beträchtlicher Abkürzung der Arbeit, auf Endziferformen und Endziferperioden (S. 59, 66, 70-79), durch deren Beyhülfe das Auffinden der Quadratzahlen in ein bloßes Addiren der einzelnen 0, 1, 2...9 in die zugehörigen Stellen, verwandelt wird. Dieſe Endzifer-Formen und Perioden, gehören mit den cykliſchen Perioden (hier S. 28, E) in eine Claſſe: der Fortſchreitung nämlich gegebener Elemente, Ziffern oder Buchſtaben, in vertikalen Reihen neben einander (das Schreiben der Elemente in die Tiefe; hier S. 15)**).



*) Andere im Buche angeführte Vortheile und Einrichtungen: Gebrauch und Vorrichtung der ſchmalen Segmente (auf dem Bogen D) für rhabdologiſche Rechnungen; Additions- und Subtractionsſcalen; Segmente von durchſcheinendem Papiere u. d. gl. erwähne ich hier nicht, weil ſie in keiner Beziehung mit combinatoriſchen Verfahren ſtehen, wie die im Texte genannten, und alſo auch dafür nichts nachweiſen konnten.

**) Leibnitz iſt vielleicht der erſte, der Betrachtungen über den Fortgang einer Reihe gegebener Zahlen nach ihren einzelnen Ziffern in die Tiefe angeſtellt hat. Er zeigt dergleichen Ziferperioden,

2) Die verſchiedenen Zahlengebäude, die zugleich mit dem Decimalſyſtem gegeben ſind, oder ſogleich daraus hergeſtellt werden können (S. 97 — 100). Das ſind die Zahlenſyſteme in und um einander, die ich im erſten Hefte (S. 19 — 22) ausführlich erklärt habe. Die allgemeine Darſtellung derſelben hat einen weit ausgedehntern Umfang, als die in der vorhergehenden Note erwähnte Leibnitziſche Anordnung der dyadiſch ausgedruckten Zahlenreihe. Dieſe zeigt blos, nach ſenkrechten Linien fortgehende Ziferperioden, für beſtimmte Zahlen nach einem beſtimmten Syſteme; da nach meiner Anordnung hingegen, die Syſteme einander ſelbſt involviren, kleinere aus größern durch bloße Abſonderung, größere aus kleinern durch Anfügung der zugehörigen Größen, beydes nach rechten Winkeln, ſich herleiten laſſen. Daher enthalten ſie auch

den, bey dyadiſch, nach der Ordnung und ſprungweiſe, geſchriebenen Zahlen, und verſpricht ſich nicht wenig von dergleichen weiter fortgeſetzten Beobachtungen: Has aliasque id genus obſeruationes proſequendo, via aperietur ad nouas et miras, atque etiam vtiles, numerorum proprietates. Et, vt verbo dicam, latet in his quaedam noui generis Arithmetica theoretica, quam Tecum poſſimus diuinam dicere, cuius tantum primos adhuc aditus videmus. Nec dubium eſt, etiam quadratos et cubos, et alios numeros figuratos, certas quasdam ſuae progreſſionis leges eſſe habituros. Ep. II. ad Schulenb. Opp. T. II. p. 352. Ebendaſelbſt (S. 391) ſtellt Leibnitz die dyadiſch geſchriebene Zahlenreihe von 1 bis 32 dar, und weiſet die ſich wiederholenden Ziferperioden in den einzelnen Verticalreihen, durch Beyfügung gerader Linien, auf ähnliche Art nach, wie ich aus den Involutionen die Evolutionen durch Winkel beſtimme und ausſchneide. Seite 392 ſagt Leibnitz: On a mené auſſi des lignes dans la Table, qui marquent, que ce que ces lignes renferment, revient toujours ſous elles. Et il ſe trouve encore, que les Nombres Quarrés, Cubiques, et d'autres puiſſances; item, les Nombres Triangulaires, Pyramidaux et autres nombres figurés, ont auſſi des ſemblables périodes, de ſorte qu'on en peut écrire les Tables tout de ſuite, ſans calculer. Et une prolixité dans le commencement, qui donne enſuite le moyen d'épargner le calcul, et d'aller à l'infini par regle, eſt infiniment avantageuſe. Leibnitz hat blos die Möglichkeit durchgeſehen, ſolche und andere Zahlen durch Perioden ihrer Ziffern in die Tiefe darzuſtellen, das Verfahren ſelbſt aber nirgends nachgewieſen. Auch reicht man, wie ich gezeigt habe, mit den Zifferperioden allein nicht aus. *Dangicourt*, de Periodis columnarum in ſerie numerorum progreſſionis arithmeticae dyadice expreſſorum. Miſc. Berol. 1710. p. 336 ſeq. hat wenig oder nichts hierin geleiſtet,

auch den Grund und die nächſte Veranlaſſung zu andern ſo wichtigen combinatoriſchen Involutionen und Evolutionen, für Zahlen und Buchſtabengrößen, von denen ich im zweyten Aufſatze des erſten Heftes umſtändlich gehandelt habe.

3) Entwickelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, durch beſondere dafür eingerichtete Tariffe (S. 106–116): eine combinatoriſche Zuſammenſtellung aller einzelnen zuſammengehörigen Dividenden, Quotienten und Reſte. Die Art, wie ich anfangs die Tariffe ſuchte (S. 107–110) iſt weitläuftig; itzt ſchaffe ich ſie weit leichter (Ebend. S. 114) auf die Art, die ich (Lamb. gel. Briefw. B. 5. S. 207 ꝛc.) beſchrieben habe. Dieſe Tariffe zeigen übrigens ſehr einleuchtend, was man durch die Zerlegung der Beſtandtheile einer Aufgabe in ihre vollſtändigen Elemente, und dieſer Elemente combinatoriſche Anordnung und Zuſammenſetzung (hier S. 16, 5) zu leiſten vermag; auch überſieht man ſogleich, was nur ſelten der Fall iſt, daß eine ſolche Anordnung die einzige mögliche iſt, die alle (Lamb. Briefw. 5. B. S. 215) angegebene Bedingungen, und noch mehrere, zuſammen erfüllt.

So viel war nöthig, aus dieſer Schrift hier anzuführen, um zu zeigen, wie weit die Erfindung der combinatoriſchen Analytik, durch ſelbige ſchon iſt vorbereitet geweſen. Es bedurfte blos einer beſondern Veranlaſſung, die rege gemachten, und zum Theil ſchon ziemlich ausgebildeten, aber ganz iſolirten, combinatoriſchen Ideen zu ſammeln, bequem zu bezeichnen, und in einen für die Anwendung brauchbaren Zuſammenhang zu bringen. Dieſe Veranlaſſung gab der Gedanke, die bekannten Schwierigkeiten bey den Potenzen des Infinitinomiums aufzuheben, und die Potenzirung der unendlichen Reihen verhältnißmäßig eben ſo leicht, als die, der binomiſchen Größen, zu machen. Die Wichtigkeit eines ſolchen Unternehmens wird jedem Analyſten von ſelbſt einleuchten. Dahin gehören folgende drey Schriften.

(2) *Infinitinomii Dignitatum indeterminatarum Leges ac Formulae.* Gottingae, MDCCLXXVIII. (dem Herrn v. Schönberg am 5 März dedicirt) 44 Quartſeiten.

(3) *Methodus noua et facilis Serierum infinitarum exhibendi Dignitates Exponentis indeterminati.* — Diſſertatio academica, d. X. Jun. MDCCLXXVIII Lipſiae habita. 27 Quartſeiten.

(4) *Infinitinomii Dignitatum Exponentis indeterminati Hiſtoria, Leges ac Formulae.* Editio pluribus locis aucta et paſſim emendata. Acceſſit *Methodus potentiarum — et Serierum ab Euolutione factorum quotcunqae oriundarum Geneſis.* Auct. C. F. Hindenburg. Gottingae 1779, mit 10 combinat. Tafeln. 180 Quartſ. und XXII S. Vorrede.

Ich nehme dieſe drey Schriften, in der Ordnung, wie ſie auf einander gefolgt ſind, hier zuſammen. Die letzte enthält die beyden erſten, mit noch vielen andern verwandten combinatoriſch-analytiſchen Unterſuchungen und Tafeln.

Die Abhandlung (2) iſt ohne die geringſte Abänderung, Seite für Seite, in (4) wiederholt, und macht die dortigen erſten XV Paragraphen von Seite 1 bis 44 aus. Zuerſt der allerallgemeinſte Ausdruck eines Inſinitinomiums $a+b+c+d+\ldots$, wo die Glieder nicht nach Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet ſind, ſondern jedes von den andern unabhängig angenommen wird. Setzt man hier $a=A$; $a+b=B$; $a+b+c=C$; $a+b+c+d=D$; u. ſ. w. $a+b\ldots+\chi+\psi=\Psi$; $a+b\ldots+\psi+\omega=\Omega$, ſo findet ſich, wenn man alle Glieder des Inſinitinomiums $a+b\ldots+\psi+\omega$, das letzte ausgenommen, für den erſten Theil, das letzte für den zweyten Theil annimmt, des Inſinitinomiums unbeſtimmte Potenz (§. IV, 2, S. 5) d. i. $([a+b\ldots+\psi]+\omega)^m$ oder $\Omega^m$

$$=A^m+{}^m\mathfrak{A}\,A^{m-1}b+{}^m\mathfrak{B}\,A^{m-2}b^2+\ldots+{}^m\mathfrak{N}A^{m-n}b^n+\ldots$$
$$+{}^m\mathfrak{A}\,B^{m-1}\quad+{}^m\mathfrak{B}\,B^{m-2}c^2+\ldots+{}^m\mathfrak{N}B^{m-n}c^n+\ldots$$
$$+{}^m\mathfrak{A}\,C^{m-1}d+{}^m\mathfrak{B}\,C^{m-2}d^2+\ldots+{}^m\mathfrak{N}C^{m-n}d^n+\ldots$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$+{}^m\mathfrak{A}\,X^{m-1}\psi+{}^m\mathfrak{B}\,X^{m-2}\psi^2+\ldots+{}^m\mathfrak{N}X^{m-n}\psi^n+\ldots$$
$$+{}^m\mathfrak{A}\,\Psi^{m-1}\omega+{}^m\mathfrak{B}\,\Psi^{m-2}\omega^2+\ldots+{}^m\mathfrak{N}\Psi^{m-n}\omega^n+\ldots$$

Ich

Ich habe die Formel für die Potenz $\Omega^m$ hier mit beygebracht, weil ich ſie ſonſt nirgends, in der Ausdehnung, wie ich ſie hier gegeben, gefunden habe; weil ſie da, wo ihre Anwendung ſtatt findet, wichtig iſt, und weil ſie, nach der oben angenommenen Vorausſetzung, die vollkommenſte ihrer Art iſt. Anders verhält es ſich mit der Potenz des Infinitinomiums $a+b\ldots+\psi+\omega$, wenn man umgekehrt, das erſte Glied a allein für den erſten, und alle folgende Glieder $b+c\ldots+\psi+\omega$, für den zweyten Theil annimmt. Dieſer Fall wird von §. V-XV, S. 11-41, nebſt verſchiedenen dahin einſchlagenden Unterſuchungen, in Betrachtung gezogen, wo ſich verſchiedene Wege und Formeln dafür anbieten und ergeben. Hier zeigt ſich zuerſt (§. X) der Nutzen von Combinationen und Permutionen, ſo, daß man, für den Fall, daß der Exponent m eine ganze poſitive Zahl iſt, durch Hülfe der allgemeinen Formel für die Anzahl von Verſetzungen einer gegebenen Menge von Dingen (§. XIII.) jedes Glied einer ſolchen Potenz außer der Ordnung angeben, auch die figurirten Zahlen dafür (Ebend. S. 35, 36) gebrauchen kann. Zuletzt eine allgemeine Formel für die Potenz m eines Infinitinomiums, wo m jede Zahl bedeuten kann (§. XV, S. 40, 41). Dieſe Formel war zu der Zeit, da ich ſie bekannt machte (im Anfange von 1778) die bequemſte, indem ſie das Geſuchte ohne alle Vergleichung leichter gab, als jede andere bis dahin bekannte; ſie ward aber gar bald, in Abſicht auf Kürze und Bequemlichkeit, beydes der Darſtellung und Entwickelung, von einer andern, in der folgenden Abhandlung (3) gegebenen, weit übertroffen.

Die Schrift (3) iſt eben ſo, wie die vorige, aber noch mit einigen erläuternden Zuſätzen, in (4) abgedruckt, und macht mit ihren fünf Paragraphen, den Inhalt der dortigen §§. XX, XXI, XXII, XXIII, XXV aus; der §. XXIV enthält nämlich den von mir ſogenannten, aber ſpäter bemerkten, Methodum Potentiarum, und iſt dort (in 4) wo die bequemſte Stelle für ihn war, eingeſchoben worden. Die Abſicht dieſer Diſſertation geht auf die Potenzen der zweyten Gattung von Infinitinomien, wo nämlich, wie in $ax+bx^2+cx^3+dx^4+$ etc. die Glieder nach Potenzen einer veränderlichen Größe (x) fortgehen, wovon zwar bereits Seite 42-44 der vorigen Abhandlung (2) etwas erinnert, aber nichts iſt ausgeführt worden. Da die Diſſertation (3) nur wenige Kenner beſitzen, de-

nen ſie damals iſt mitgetheilt worden: ſo will ich das, was ich daraus anführen werde, nach den Paragraphen und Seitenzahlen der ungleich mehr bekannten, und auch noch itzt leicht zu habenden, Schrift (4) citiren.

Nach einigen Vorerinnerungen (§. XX), die vornehmlich dahin gehen, den Nutzen und die Nothwendigkeit eines allgemeinen, von vorhergehenden Gliedern nicht abhängenden, Gliedes der Potenz, wenn ſolches ohne große Verwickelung ſich geben ließ, darzuſtellen, wird (§. XXI) zu Aufſuchung einer Formel für die Potenz

$$(1+\alpha z^1+\beta z^2+\gamma z^3+\text{etc})^m=(1+y)^m$$

fortgeſchritten, und nach wenigen Subſtitutionen und angeſtellten Betrachtungen, was für Binomialcoefficienten und Potenzen von y, in den einzelnen Gliedern zuſammengehören, die Fundamental-Localformel für das $(n+1)$te Glied (1 als erſtes Glied gerechnet) der geſuchten Potenz $(1+y)^m$, d. i.

$$(1+y)^m\eta(n+1)={}^m\mathfrak{A}y^1\eta n+{}^m\mathfrak{B}y^2\eta(n-1)+{}^m\mathfrak{C}y^3\eta(n-2)$$
$$\ldots+{}^{m\ \ 1}\mathfrak{N}y^{n-1}\eta 2+{}^m\mathfrak{N}y^n\eta 1$$

ſogleich (S. 71) angegeben, und dadurch ein Lehrſatz aufgeſtellt, der den ganzen Inhalt des $(n+1)$ten Gliedes jener Potenz, und was darin von den Potenzen $y^1$, $y^2$, $y^3\ldots y^n$ vorkommt, ſehr deutlich und genau angiebt *). Dieſe Localformel zeigte weiter (S. 72, 73) daß hierbey alles auf die Potenzen 1, 2, 3...n von $y=\alpha z^1+\beta z^2+\gamma z^3+\text{etc}$, nach der Ordnung, ankomme, und daß in dem $(n+1)$ten Gliede von $(1+y)^m$ nur ſolche Glieder der Potenzen von y zuſammen kommen, die $z^n$ enthalten, dergleichen in der erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. Potenz von y, nothwendig, und für jede um 1 höhere Potenz, um eine Stelle früher, vorkommen müſſen. Da nun die Glieder der einzelnen Potenzen der Reihe y nach der Ordnung, aus allen Unionen, Binionen, Quaternionen u. ſ. w. ſolcher einzelnen Glieder von y zuſammengeſetzt werden,

*) Ich habe hier den großen Buchſtaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{N}$, den Exponenten m, und den Zahlen 1, 2, 3...n, den Buchſtaben y beygefügt, auch ε mit 7 verwechſelt: nach der im Novo Syſt. Comb. nachher von mir eingeführten verbeſſerten Zeichnung der Glieder ſolcher Localformeln; alles, wie dort p. LI. Ex. 1. nur y für p geſetzt.

werden, deren einzelne Exponenten von z eine beſtimmte Summe geben, wie ſie dem Gliede zukommt: ſo führt das auf die Zuſammenſetzung verlangter Summen aus gegebenen Zahlen, oder auf das combinatoriſche Discerptionsproblem: Die Zahl n aus jeden zwey, drey, vier u. ſ. w. Zahlen, der natürlichen Zahlenreihe zuſammenzuſetzen, oder jene Zahl n in ſolche Zahlen zu zerfällen; welches auch §. XXII (S. 73-91) ſeiner Wichtigkeit wegen ausführlich iſt abgehandelt worden.

Dieſes Discerptionsproblem und ſeine allgemeine Auflöſung erſtreckt ſich, ſowohl auf alle Claſſen im Zuſammenhange (S. 73-80) als auch auf jede einzelne Claſſe außer der Ordnung (S. 80-82 und Toepf. Comb. An. S. 81-83). Auch hat die Anwendung dieſes Problems auf die Potenz

$$(\alpha z^1 + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc})^m$$

es mag nun m eine ganze poſitive Zahl (§. XXIII) oder überhaupt, was man will für eine Zahl (§. XXV) ſeyn, die geſchmeidigſten Formeln und allgemeinen Glieder (S. 93, 98, 113, 119 die auch Nov. Syſt. Comb. p. LIV, 7, 8 wiederholt ſind) die man ſich nur denken kann, für dieſe Potenzen verſchaft. Aber nicht blos deswegen iſt dieſe Discerptionsaufgabe wichtig, ſondern auch, und vorzüglich, darum, weil ſie mich, durch das Verfahren, auf das ich bey ihrer Auflöſung verfiel, und durch die ausgedehnte Anwendung, die ſich davon machen ließ, zuerſt die Möglichkeit einer combinatoriſchen Analytik, und was dazu erfordert werde, durchſehen ließ. Mein Verfahren, die Complexionen aus einander herzuleiten, führte mich auf bequeme Abtheilungen nach Claſſen, die einzelnen Complexionen darinn, ſo wie die Claſſen ſelbſt, waren gleich gut geordnet, und zeigten ſo eine combinatoriſche Involution; die erſte, die ſich mir nach jener der Zahlenſyſteme in und um einander (Heft I. S. 19-22) wieder vor Augen ſtellte. Dieſes Problem veranlaßte bald ein zweytes eben ſo ausgedehntes und allgemeines: der Variation gegebener Zahlen zu beſtimmten Summen (Infin. Dign. §. XXVII, S. 129-135) nebſt andern, wo nur Complexiones und Permutationes ſimpliciter, mit und ohne Wiederholungen, vorkommen. Für ſolche Darſtellungen, wie ich hier brauchte, fand ich in der Combinationslehre entweder gar keine, oder, zu meiner Abſicht nicht paſſende, Vorſchriften; und ſo mußte erſt dieſe Wiſſenſchaft von dieſer Seite theils ſimplificirt, theils erweitert, oder vielmehr

mehr auf einen ganz andern Fuß geſtellt werden. Alles das konnte ohne Einführung neuer und bequemer Ton- und Schriftzeichen nicht geſchehen, und was insbeſondere die letzten anbetrift, ſo mußten ſie ſo geformt werden, daß ſie einestheils die combinatoriſchen Operationen leicht nachwieſen, anderntheils zu combinatoriſch-analytiſchen und Lokalformeln ſich bequem gebrauchen und verarbeiten ließen. Das veranlaßte eine Menge von Erklärungen neuer Wörter und Zeichen (die ganze Zeichenſprache) die ich, als Grundlage der combinatoriſchen Analytik, ſpäterhin (Nov. Syſt. Comb. p. IV - XV und XXXII - XLIX) ausführlich aufgeſtellt, und durch mannichfaltige Anwendungen auf, zum Theil ſehr verwickelte, Aufgaben erläutert habe.

Unter den mancherley Verbindungsgeſetzen, deren Kenntniß, wie jene Anwendungen gezeigt haben, den Analyſten wichtig geworden, iſt das für die combinatoriſchen Discerptionen zu beſtimmten Summen, unſtreitig eins der vorzüglichſten und wiſſenswürdigſten. Auch Herrn Profeſſor Fiſchers Auflöſungen der Aufgaben in ſeiner Theorie der Dimenſionszeichen gründen ſich darauf. Es mußte alſo Herrn Mag. Toepfer (Comb. Anal. S. 18-22 u. a. O.) nothwendig befremden, da er in jener Theorie dieſes ſo wichtige Grundproblem, und eben ſo auch jenes andere, der Variationen zu beſtimmten Summen (Comb. Anal. S. 65-68) nirgends aufgelöſet fand; ſo wie es mir in der That unbegreiflich iſt, wie Herr Pr. Fiſcher (S. 5 ſeiner Vertheidigungsſchrift) im Ernſte behaupten kann: man könne ſchon, für die in der Ausübung vorkommenden Fälle (für kleine Zahlen) die Zerfällung derſelben dem geſunden Menſchenverſtande jedes blos praktiſchen Rechners überlaſſen. Ich will hier nicht wiederholen was ich (S. 194, 195) von der Nothwendigkeit beſtimmter Vorſchriften in wiſſenſchaftlichem Vortrage bereits geſagt habe; ich will blos bemerken, daß dieſe Forderung bey dieſen Aufgaben, welche der Theorie der Dimenſionszeichen durchgängig zur Grundlage dienen, durch welche allein dieſe Zeichen Inhalt und Bedeutung haben, um ſo dringender und ganz unerläßlich ſey. Daß Euler bey ſeiner Aufgabe de Partitione numerorum an einigen Orten dergleichen Zahlenzerfällungen aufſtellt, ohne die Regel dafür mit anzugeben, kann Herrn Pr. F. nicht rechtfertigen (Vertheſchr. S. 5, 52) da Euler nicht, wie Herr F., ſeine Unterſuchung auf dergleichen

chen Zerfällungen gegründet hat, ſondern ſie blos hier und da als Erläuterungen für die Zahlencoefficienten ſeiner entwickelten Reihen, hinterher beybringt; wobey ſich zugleich zeigt, daß dieſe Zerfällungen nicht alle nach einer Regel (Intr. in An. Inf. §. 301, 305, 324 mit Nov Comm. Ac. Petr. Vol. III. p. 125 ſeq. verglichen) gemacht ſind. Herr Prof. Fiſcher ſagt ferner (Ebend. S. 52) Herr Töpfer drücke ſich oft ſo aus, als ob vor mir kein Analyſt irgend eine combinatoriſche Arbeit regelmäßig hätte verrichten können. Sollte Herr T. wirklich ſo etwas geſagt oder gemeynet haben? und wer würde ihm das glauben? Die Rede kann doch nur davon ſeyn, ob dieſe Analyſten, bey ſo vielen und mannichfaltig verſchiedenen Auflöſungen, als es hier oft giebt (Abh. v. cont. Dr) ſogleich die kürzeſte, oder ſonſt, und für andere damit verbundene Abſichten, zweckmäßige Regel treffen würden? Einer unſerer vorzüglichſten Analyſten, der auch in der Theorie der Dimenſionszeichen mit verdienter Achtung genennt wird, ſchreibt mir: „Ich bin nun mit der combinatoriſchen Analytik, was „die Hauptſache betrift, ganz im Klaren, ob ich mir gleich „bis itzt noch keine beſondere Fertigkeit in Verrichtung „combinatoriſcher Operationen erwerben konnte.“ Unter dieſen Operationen giebt es viele, ja die meiſten, die noch leichter ſind, als die Discerptionsaufgaben zu beſtimmten Summen, nach den von mir gegebenen Vorſchriften ſind. Wollte man nun, nach Herrn Profeſſor Fiſchers Beyſpiele, mit jenen combinatoriſchen Aufgaben, ihrer Leichtigkeit wegen, eben ſo verfahren, und ihre Auflöſung der Willkühr der Analyſten überlaſſen, weil man im voraus überzeugt ſeyn kann, ſie werden gewiß damit zu Stande kommen — was würde da aus der combinatoriſchen Analytik werden?

(Die Fortſetzung folgt im nächſten Hefte).

---

X.

## X.

# Auszüge aus Briefen, verschiedene Nachrichten und Anzeigen.

---

### 1. Aus einem Briefe des Herrn Obriſtwachtmeiſters von Zach.

Gotha, den 27 Nov. 1794

Sie werden wohl begierig ſeyn, einige Nachrichten aus Frankreich über den itzigen Zuſtand der Wiſſenſchaften und Gelehrten zu erhalten. Ich theile Ihnen demnach folgendes aus einem Briefe von Herrn de la Lande mit: „Herr Caſ„ſini war verhaftet, hat aber itzt wieder ſeine Freyheit er„halten, Herr de la place arbeitet immerfort ſehr fleißig, „allein ſein großes Werk *ſur les attractions céleſtes* erſcheinet „dieſes Jahr noch nicht. Meſſier befindet ſich wohl, ſein „hohes Alter erlaubt ihm aber nicht mehr viel zu arbeiten. „Die vier Aſtronomen der Sternwarte, Nouet, Perny, „Ruelle und Bouvard beobachten ungeſtört und wie „gewöhnlich, allein ſie ſind nicht mit ſehr guten Inſtrumenten „verſehen; ſie drucken itzo ihre Beobachtungen. Das College „de France hat keine Veränderungen erlitten, und die Vorle„ſungen haben daſelbſt, wie ehedem, ihren Fortgang. Ich „habe meine Sternwarte immer à l'Ecole militaire, und „mein Neſe Michel le Français beobachtet daſelbſt ſehr fleißig. „Ich ſchicke Ihnen nächſtens zu Ihren neuen Aberrations„tafeln und Sternkatalog 2000 Abweichungen. Ich „habe bereits 22000 Sterne an meinem Mauerquadranten „beobachtet, und werde das nächſte Jahr 30000 haben. In „der Conn. des temps für 1795, die erſchienen iſt, ſtehen „1000 Abweichungen von mir, allein ich habe ſie nach der „Zeit verbeſſert, und überſende ſie Ihnen verbeſſert. Man „hat noch keine details über die Arbeiten, die Gewichte und „Maaße betreffend, bekannt gemacht, ſondern blos nur einen prak„tiſchen Unterricht. — Mechain mußte Spanien verlaſſen, „und kehrt itzt wieder nach Frankreich zurück. De Lambre, „nachdem er eine Triangelreihe von Dunkerque bis nach Or„leans gemeſſen hatte, mußte ſeine Arbeit einſtellen; ich hoffe,

„daß

„daß künftiges Frühjahr dieſe Arbeit fortgeſetzt wird“ — Von ſich ſchreibt Herr de la Lande noch: „mon patriotiſme „étoit aſſez connû, pour que je n'aie éprouvé aucun désagre„ment depuis la révolution. La Suppreſſion de l'Académie „m'a fait perdre une penſion, mais j'ai éſperance d'en être „dedomagé“ —

Ich drucke itzt auf Koſten des Herzogs von Marlborough ſehr groſſe und weitläuftige Aberrations- nnd Nutations-Tafeln für 1000 Sterne. Dieſen hänge ich ein ſehr vollſtändiges neues Sternverzeichniß an. Ich habe mit meinem groſſen 8füßigen Ramsdenſchen Tranſit-Inſtrument den groſſen Flamſteedſchen Brittiſchen Sternkatalog bereits 3mal am Himmel durchgemuſtert, und bin gegenwärtig mit der 4ten Revue beſchäftiget. Ich gedenke ein Verzeichniß von einigen tauſend Sternen zu liefern, bey denen der Irrthum in gerader Aufſteigung nicht auf $\frac{1}{4}$ einer Sekunde in Zeit gehen ſoll. Herr de la Lande ſchickt mir hierzu obenangeführte 2000 Abweichungen, an ſeinem Birdiſchen 8ſchuhigen Murals quadranten beobachtet, und Herr Abbe' Barry aus Mannheim hat mir ebenfalls über 2000 Abweichungen geſchickt, die 1792, 1793 und 1794 an dem 8ſchuhigen Birdiſchen Mauerquadranten daſelbſt beobachtet worden. Es wird dadurch der vollſtändigſte und genaueſte Katalog erzielt werden, der alle übrigen entbehrlich machen wird. Der Druck iſt bereits ſchon weit vorgerückt. Ein Alphabet iſt ganz fertig, doch dürfte das ganze Werk nicht eher als bis auf die Michaelismeſſe künftiges Jahr zu Stande kommen.

Folgende Mitglieder der ci-devant Académie des Sciences ſind an die Spitze der National-Normalſchulen als Profeſſoren angeſtellt worden: Herr de la Grange, Hauy, Daubenton, Monge und Bertholet. — Der geſchickte Londoner Künſtler Emery iſt mit Tode abgegangen. Der von ihm gefertigte Chronometer des Präſidenten Saron (der bekanntlich guillotinirt worden iſt) iſt in die Hände eines geſchickten Pariſer Uhrmachers, Namens Janvier, gekommen.

## 2. Aus einem Briefe des Herrn Joſeph Slope, erſten Aſtronoms zu Piſa *) an Herrn B. vom 18 Auguſt 1794.

(Aus dem Italieniſchen).

— — Schon im verwichenen Jahre iſt ein neues Quadriennium meiner aſtronomiſchen Beobachtungen erſchienen **), welches ich nun in der Vorausſetzung, daß Sie wieder in B. zurück ſind, an Sie habe abgehen laſſen.

Im vorigen Monate habe ich das Vergnügen gehabt, den berühmten Aſtronom Herrn Mechain bey mir zu ſehen. Ohne ſich in die politiſchen Geſchäfte zu miſchen, hat er immer fortgefahren der Sternkunde obzuliegen. Schon im Junius 1792 wurde er nach Spanien geſandt, daſelbſt die trigonometriſchen und aſtronomiſchen Operationen zur Ausmeſſung des Bogens des Mittagskreiſes zwiſchen Dünkirchen und Barzellona auszuführen. In dieſem Auftrage wurde er von dem National-Convente beſtätiget, und mit Bewilligung der Spaniſchen Regierung konnte er nach dem Ausbruche des Krieges ſeine Arbeit fortſetzen und zu Ende bringen. Auf ſeiner Rückreiſe wurde er in einem venezianiſchen Schiffe, auf welches er ſich eingeſchifft hatte, von einer Engliſchen Fregatte, in der Gegend von Genua, weggenommen, und nach Livorno gebracht; ſo, daß er nur zufälliger Weiſe in Toscana ſich befunden hat. Er iſt nun mit ſeinen Inſtrumenten und Gefährten zu Lande, durch das Genueſiſche nach Frankreich abgereiſet, um die Verrichtungen ſeines Auftrages fortzuſetzen, und dem Ausſchuſſe für die Maaße und Gewichte, von welchem er ein Mitglied iſt, von denen die er in Spanien vollführet hat, Rechenſchaft abzulegen. Seine Geſellſchaft iſt ſehr anziehend, nicht allein von der wiſſenſchaftlichen Seite, ſondern auch wegen ſeines offenen, ſanftmüthigen und rechtſchaffenen Characters. — —

*) Der zweyte Aſtronom oder Prof. Aſtronomiae iſt deſſen Sohn, Herr Franz Slope, ein ſehr geſchickter junger Mann.

**) Obſervationes ſiderum habitae Piſis in Specula academica etc. Die drey erſten Quadriennia ſind von den Jahren 1770-1781; das 4te neueſte, welches ich noch nicht erhalten habe, wird demnach die Jahre 1782-1785 enthalten. B.

Leipzig,

gedruckt bey Chriſtian Friedrich Solbrig.

# Archiv
## der
## reinen und angewandten
## Mathematik.

Drittes Heft. 1795.

### I.

### Ueber die Unterſuchung aſtronomiſcher Kreiſe; vom Herrn Grafen von Brühl, Churſächſiſchen Geſandten zu London *). Aus dem Engliſchen überſetzt, und mit einem Anhange und Anmerkungen begleitet, vom Herrn Obriſtwachtmeiſter von Zach.

Nachdem die ganzen aſtronomiſchen Kreiſe in der praktiſchen Aſtronomie neuerlich ſind eingeführt worden, und dieſe vortrefflichen Werkzeuge durch den faſt unerſchöpflichen Erfindungsgeiſt des berühmten Künſtlers, Herrn Ramsden, einen ſehr hohen Grad der Vollkommenheit erlangt haben, ſo werden Methoden, nach welchen man ihre

*) Die Originalſchrift: *on the Inveſtigation of aſtronomical Circles* (*London* 1794) iſt dem großen, durch mehrere wichtige Erfindungen berühmten, Künſtler Ramsden zugeeignet — ein ſeltner und eigenthümlicher Zug in dem Charakter des verehrungswürdigen Verfaſſers, Genie und Verdienſte überall zu ſchätzen und zu ehren, wo Er ſie findet. Die wichtigen Vorzüge ganzer aſtronomiſcher Kreiſe, die ſowohl ihrer Einrichtung als ihrem Gebrauche nach, bey weitem noch nicht ſo bekannt ſind, als ſie es zu ſeyn verdienen, erregten in mir den Wunſch, auch von meiner Seite durch das Archiv, zu ſchnellerer Verbreitung der Kennt-

ihre Fehler, denen ſie noch unterworfen ſeyn können, unterſuchen und verbeſſern kann, den Aſtronomen wahrſcheinlich nicht unwillkommen ſeyn. Man hat anfänglich geglaubt, daß man ſeinen Endzweck vollkommen damit erreiche, wenn man die entgegengeſetzten Eintheilungen eines Kreiſes ablieſt, und ihren halben Unterſchied mit verkehrten Zeichen in jedem abgeleſenen Bogen anbringt; allein man braucht die Quellen, aus den die Fehler bey einem ſolchen Inſtrument entſpringen können, nur ungefähr zu kennen, um die Unzulänglichkeit dieſer Methode einzuſehen. Man wurde ſehr bald gewahr, daß außer den Fehlern, die aus einer Excentricität entſtehen, jene, die aus einer unrichtigen Theilung herrühren, nur in dieſem einzigen Falle dadurch verbeſſert werden, wenn es ſich gerade fügt, daß die an dem entgegengeſetzten Quadranten beobachtete Bögen genau um dieſelbe Größe, der eine zu viel, der andere zu wenig, von einander unterſchieden ſind. Dieſe Betrachtungen veranlaßten mich, über dieſen Gegen-

niß ſo vortrefflicher Werkzeuge mitzuwirken. Das iſt nun hier auf eine ſolche Art geſchehen, welche die Leſer eben ſo ſehr überraſchen, als befriedigen wird. Es hat nämlich der um die praktiſche Sternkunde in Deutſchland ſo auszeichnend verdiente Aſtronom, Herr Obriſtwachtmeiſter von Zach zu Gotha, auf meine Bitte, nicht nur die Ueberſetzung der obigen Schrift gefertiget, ſondern auch ſelbiger einen Anhang mit Anmerkungen beygefügt, und dadurch den Werth des Originals noch erhöht. Es würde für Kenner überflüßig ſeyn, das Vorzügliche jener Bemerkungen (Herr von Zach bedient ſich ſelbſt eines ähnlichen zweyfüßigen aſtronomiſchen Kreiſes) hier beſonders auszuheben; doch ſey es mir erlaubt, nur mit Wenigem noch anzumerken: Die Art, wie hier der Excentricitäts-Fehler unterſucht worden, iſt neu und ſehr einfach, und der Gedanke, wie dieſer Fehler von jenen, der Theilung und des Zeigers, abgeſondert worden, meines Wiſſens noch nicht bekannt; auch glaube ich, daß er ſehr ausführbar, folglich nicht nur theoretiſch richtig, ſondern auch praktiſch möglich ſey. Was den Kollimazions-Fehler anbetrifft, ſo läßt ſich freylich, bey einer ſo einfachen allgemein bekannten Sache, nichts Neues ſagen; doch hat auch hier Herr von Zach auf einen Fall aufmerkſam gemacht, davon man in aſtronomiſchen Lehrbüchern, ſelbſt im de la Lande, nichts angemerkt findet, wo nämlich der Scheitelabſtand kleiner als der Kollimazions-Fehler beobachtet wird. Hindenburg.

Gegenstand, seit dem Monat July 1793 weiter nachzudenken, um welche Zeit Herr Edward Troughton einen Kreis von zwey Fuß Durchmesser auf meiner Sternwarte in Harefield aufgestellt hatte. Sollten Kenner finden, daß mein Verfahren, welches ich (aus Gründen) besser unten anzeigen werde, von einer leichten und allgemeinen Anwendung ist, und allen vorkommen könnenden Fällen ein Genüge leistet, so werde ich ihr Urtheil für die reichlichste Belohnung meiner Bemühung halten. Meine Ursachen, warum ich nicht sogleich zur Erklärung meines Verfahrens schreite, wird man bald aus der nachfolgenden Tabelle ersehen. Es war mir nämlich vorerst darum zu thun, die verschiedenen Fälle von Fehlern, die vorkommen können, genau zu entwickeln. Ich habe sie daher in zwey Klassen abgetheilt. Die erste Klasse enthält bloß die Fehler, die von aller Excentricität ganz unabhängig sind, folglich nur die unrichtige Eintheilung betreffen; in die zweyte Klasse habe ich diejenigen Fehler gesetzt, welche aus einer Verbindung der unrichtigen Theilung, und einer excentrischen Bewegung der Alhidade herrühren. In jeder der zehn Figuren der Kupfertafel stellt o, o′, den Horizont vor, die punktirte Linie ZN in den fünf ersten Figuren, die Richtung nach dem Zenith, in den fünf letzten Figuren, ist sie durch eine punktirte Linie parallel mit ZN vorgestellt; ein d neben Z zeigt allemal einen Fehler von + 4 Minuten an, nämlich 4′ zu groß für den Quadranten oZ, und ein d neben N denselben Fehler, für den Quadranten o′N, ebenfalls zu groß. Z. B. in der Fig. 2. steht der Zeiger auf 90° in Zd und auch in dN, weil beyde Quadranten oZ und o′N nach der Voraussetzung um 4 Min. zu groß sind; ½ d bedeutet einen Fehler von 2 Min. zu groß, d′ mit einem Strich, einen Fehler von 4′ zu klein, und ½ d′ mit dem Strich, die Hälfte, oder einen Fehler von 2′ zu klein. J bezeichnet die Alhidade mit ihrem Zeiger, die sich um den Mittelpunkt C bewegt, und J′ mit einem Strich die Alhidade, die sich excentrisch um einen

Zeichen angebracht werden, hingegen bey Beobachtungen von derſelben Benennung, muß der Kollimazionsfehler mit entgegengeſetzten Zeichen angewandt werden; denn in ſolchem Falle wird ja (wenn der Fehler = e) die Summe von + e und — e = o. Dieſer herrliche Vortheil hängt jedoch von der oben vorgetragenen Regel ab, wozu noch immer der Beweis fehlet, und dem ohngeachtet finden die Aſtronomen kein Bedenken, ſich ihrer mit aller Sicherheit beym Gebrauche des Zenith-Sektors zu bedienen, welches Inſtrument, obgleich nur auf einen ſehr eingeſchränkten Raum von wenigen Graden, und, bis auf die entgegengeſetzte Ableſung der Eintheilung, die beym Sektor wegfällt, im übrigen denſelben Endzweck, wie ein ganzer Kreis, erfüllt. Es ergiebt ſich von ſelbſt, daß dieſe Methode ſowohl als die vorhergehende, gleichen Urſprungs ſind, und auf gleichen Grundſätzen beruhen, die am Ende dieſelben Schlüſſe geben, und nur in einigen Zwiſchenſätzen, die dahin führen, verſchieden ſind. Wenn es möglich wäre, den Kollimazionsfehler mit der äußerſten Genauigkeit, und ganz frey von allen den kleinen Schwankungen und Anomalien, denen ſolche Beſtimmungen immer unterworfen bleiben, zu erhalten, ſo könnte man alsdann eine Unterſuchung des Kreiſes nach der zweyten Methode anſtellen, und die gefundenen Verbeſſerungsgleichungen in eine Tafel bringen, aus welcher man ſie nachher, für jede einzelne Beobachtung nur herausnehmen und anwenden dürfte. Man könnte ſich hiernach auf das durch dieſen Weg erlangte Reſultat ſo ſicher verlaſſen, als hätte man es nach der dritten Methode erhalten, welche, wenn ſie uns gleich nicht zur Kenntniß eines jeden einzelnen Fehlers führt, ſo hebt ſie ſolche dennoch, alle zuſammen genommen, auf einmahl und insgeſamt auf.

Da ich nun das Vorhaben, welches ich mir vorgeſetzt hatte, erfüllt habe, nämlich die Unterſuchungsmetho-

den

den zu erklären, welche auf aſtronomiſche Kreiſe anwendbar ſind, und mich zugleich befliſſen habe, ihren Gebrauch durch Beyſpiele, die ich in der Tabelle No. 1. 2. 3. angeführt habe, zu erläutern, ſo bleibt mir nichts mehr übrig, als nur noch kürzlich einiger beſondern Einrichtungen, die meinem Kreisinſtrumente eigen ſind, zu erwähnen. Die Grade und Minuten werden durch einen Vernier in N (Fig A) angezeigt, zwey mikroſkopiſche Mikrometer in der horizontalen Linie hl angebracht, geben Minuten und Sekunden; jeder Grad enthält 12 Punkte, (4320 der ganze Umkreis), bewegliche Fäden in den Mikroſkopen biſſeciren entgegengeſetzte Punkte, welche ungeachtet ihrer Zartheit (die Entfernung zwiſchen ihnen iſt geringer als 0,018 eines Zolls) durch die Mikroſkope, die beynahe 12mal vergrößern, ſehr ſichtbar werden. Aus der Lage der Mikroſkope ergiebt ſich, daß bey Meridianbeobachtungen immer eines davon in Norden, während das andere in Süden ſteht; ich habe ſie dahero in der Tabelle, in welcher die Beobachtungen eingetragen ſind, durch die Benennung nördliches und ſüdliches Mikroſkop zu unterſcheiden geſucht. Iſt die getheilte Fläche des Kreiſes, wie ich bey der Fig. A annehmen will, nach Oſten gekehrt, ſo giebt das nördliche Mikroſkop die Höhen auf dem Quadranten ab, und das ſüdliche Mikroſkop dieſelben auf dem Quadranten cd. Man ſtelle ſich nun den Kreis umgewandt vor, nämlich, als hätte man ihn um den Punkt N einen halben Kreis, oder 180° im Azimuth herumgedreht, ſo wird alsdann jene getheilte Fläche gegen Weſten gekehrt ſeyn, und das Fernrohr wird nördlich vom Scheitelpunkt Z in C′ zu ſtehen kommen, durch welchen Punkt es 30° nach Süden gedreht werden muß, um in ſeine vorige Lage zu kommen; alsdenn giebt das nördliche Mikroſkop die Zenithdiſtanz auf dem Quadranten dā, der dem Quadranten ab anliegt, und das ſüdliche Mikroſkop giebt dieſen Scheitelabſtand auf dem

Quadranten b e, der dem Quadranten c d anliegt. Bey Verfertigung der mikroſkopiſchen Mikrometer, iſt Herr Edward Troughton der Beſchreibung gefolgt, welche der verſtorbene General Roy von dieſer herrlichen Erfindung im 80ſten Bande der philoſophiſchen Tranſactionen gegeben hat; in allem übrigen hat der ſinnreiche Verfertiger dieſes Werkzeuges nichts von andern Künſtlern geborgt. Das Inſtrument trägt daher in ſeiner ganzen Anordnung ſowohl, als in ſeiner Ausführung, das unverkennbare Gepräge der erfindriſchen Eigenthümlichkeit, als auch der ſchönſten und vollendeten Arbeit an ſich.

Da die Uebereinſtimmung zwiſchen Reſultaten, die aus verſchiedenen Quellen hergehohlt worden, die allerſicherſten Beweiſe für die Vortrefflichkeit eines Inſtruments abgeben, ſo habe ich zum Schluß noch diejenigen, aus welchen ich die Breite meiner Sternwarte, unabhängig von der Abweichung, abgeleitet habe, der Länge nach in der Tabelle No. 4. 5. beygefügt. Was diejenigen Beobachtungen betrifft, aus welchen ich ebenfalls dies wichtige Element einer Sternwarte abgeleitet habe, und zu welchen die Abweichungen der Sterne gebraucht worden ſind, ſo habe ich mich dabey bloß auf allgemeine Reſultate eingeſchränkt. Ich erbitte mir am Ende noch die Erlaubniß, mit dem aufrichtigen Wunſche ſchließen zu dürfen, daß der Gebrauch der Kreis-Inſtrumente allgemeiner, als er noch bis jetzt iſt, ſeyn, und ihre Behandlung beſſer verſtanden werden möge, welche, ob ſie gleich äußerſt einfach, leicht und natürlich iſt, dennoch zu falſchen Vorſtellungen Anlaß gegeben hat, welche doch ſorgfältigſt zu vermeiden ſind.

## I. Ueber ganze Jahre. S. 267-270

No. 1. Anwendung der erhaltenen Formeln zu Hareſield angeſtellt.

| 1793 Auguſt Monat | Namen der Sterne. | Scheitel-Abſtände. Die Fläche nach Weſten. Mittel | Barometer | Thermomet. |
|---|---|---|---|---|
| | | Gr. Min. | | |
| 6ten | α in der Leyer | 76. 59. 5 / 76. 59. 5 | 12°. 58'. 53",0 | 29, 65 | 68° |
| 6ten | α im Adler | 46. 44. 2 / 46. 44. 2 | 43. 14. 14, 7 | 29, 65 | 68 |
| 18ten | α im Adler | 46. 44. 4 / 46. 44. 4 | 43. 14. 24, 5 | 29, 9 | 66 |
| 18ten | α im Schwan | 82. 56. 4 / 82. 56. 4 | 7. 2. 23, 0 | 29, 9 | 62 |

No. 2. Aus dieſen folgende Reſultate.

| Wahre Scheitel-Abſtände. | Wahre Höhen | Strahlenbrechung für | Log. der Strahlenbr. |
|---|---|---|---|
| | | | |

(a) Das Thermometer iſt nach Fahrenheit XXIII. der Grade getheilt habe.

(b) Ich habe arithmetiſche Regiment für Refractionstage

(c) Dieſe Beobachtung iſt der Abgleichen, wegen der Verrückung

Den 19. und 20. Juli Capel
Den 29. Juli Supplement
Pol

Die Höhe. Polhöhe von

Durch

| | |
|---|---|
| 53°. 44'. 3",08 | 103. 12. 19,.08 |
| 49. 48. 16. 02 | 51. 36. 9. 54 |

II.

ſelben, bloß durch die Strahlenbrechung verbeſſerten, achtungen.

| | |
|---|---|
| 59′. 38″, 89 | 12° 59′ 5″, 13. Beobachtete Zen. Diſt. |
| 0. 54, 87 | 13. 0. 21, 11. Compl. der jenſeitigen Höhe |
| 0. 33, 76 | 25. 59. 26, 24. . . . . Summe |
| 0. 16, 88 | 12. 59. 43, 12. Hälfte; wahre Zen. Diſt. |
| 43. 53, 33 | 43. 15. 15, 57. Beobachtete Zen. Diſt. |
| 44. 44, 43 | 43. 16. 6, 67. Compl. der jenſeitigen Höhe |
| 28. 37, 76 | 86. 31. 22, 24. . . . . Summe |
| 44. 18, 88 | 43. 15. 41, 12. Hälfte; wahre Zen. Diſt. |
| 43. 38, ∞ | 43. 15. 5, 14. Beobachtete Zen. Diſt. |
| 44. 54, 86 | 43. 16. 22, ∞. Compl. der jenſeitigen Höhe |
| 28. 37, 86 | 86. 31. 27. 14. . . . . Summe |
| 44. 16, 43 | 43. 15. 43, 57. Hälfte; wahre Zen. Diſt. |
| 56. 39, 11 | 7. 2. 29, 87. Beobachtete Zen. Diſt. |
| 57. 30, 13 | 7. 3. 20, 89. Compl. der jenſeitigen Höhe. |
| 54. 9, 24 | 14. 5. 50, 76. . . . . Summe |
| 57. 4, 62 | 7. 2. 55, 38. Hälfte; wahre Zen. Diſt. |

3 die Breite dieſer Sternwarte, unabhängig von aller Abgeleitet worden.

| | Barometer | Thermometer a) | Strahlenbrechung | Kollimationsfehler. | Verbeſſerungsgleichung | Verbeſſerte und wahre Höhen. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ″, 75 | 29, 55 | 65° | 6′. 37″, 3 | 0″, 0 | 6′. 37″, 3 | 7°. 22′. 15″, 45 |
| ″, 80 | 29, 85 | 63 | 6. 43, 2 | 0, 0 | 6. 43, 2 | 7. 22. 15, 60 |
| ″, 50 | 29, 75 | 62, 3 | 0. 5, 71 | + 58, 30 | 0. 52, 59 | 84. 9. 56, 09 |
| ″, 20 | 30, 30 | 52 | 0. 42, 80 | + 37, 68 | 0. 5, 12 | 53. 24. 3, 08 |
| | 29, 87 | 58 | 0. 47, 38 | + 37, 68 | 0. 9, 70 | 49. 48. 16, 00 |

## Durch correſpondirende Beobachtungen in Blenheim und Palermo angeſtellt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zenith Diſtanz von γ im Drachen beobachtet vom Herzog von Marlborough d. 1. Jan. 1793 | 0°. | 19′. | 15″,52 |
| Daſſelbe in Hareſield | 0. | 4. | 59. 48 |
| Bogen zwiſchen beyden Zeniths | 0. | 14. | 16, 04 |
| Polhöhe von Blenheim | 51. | 50. | 25, 60 |
| Bleibt Polhöhe von Hareſield (γ) | 51. | 36. | 9, 56 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zenith Diſt. von α im Schwan, den 18ten und 19ten Auguſt, von Hrn. Piazzi in Palermo beobachtet | 6°. | 26′. | 30″,21 |
| Daſſelbe um dieſelbe Zeit in Hareſield | 7. | 2. | 55,38 |
| Bogen zwiſchen beyden Zeniths | 13. | 29. | 25,59 |
| detto beobachtet durch α in der Leyer | 13. | 29. | 25,64 |
| detto beobachtet durch den Polarſtern | 13. | 29. | 25,27 |
| Das Mittel | 13. | 29. | 25,50 |
| Polhöhe von Palermo | 38. | 6. | 44,00 |
| Bleibt Polhöhe von Hareſield (ε) | 51. | 36. | 9,50 |

N.5. Beobachtete Breiten v. Hareſield, wobey d. Abweichungen der Sterne als genau beſtimmt vorausgeſetzt worden.

| Monat und Tage. 1793 | | Namen der beobachteten Sterne | Breite |
|---|---|---|---|
| July | 13 | α in der Leyer | 51°. 36′. 10″,00 |
| | 29 | | 10, 40 |
| | 30 | | 10, 38 |
| | 19 | Capella | 9, 97 |
| | 20 | | 8, 55 |
| | 29 | | 9, 27 |
| Auguſt | 6 | α im Adler | 9, 70 |
| | 7 | | 9, 89 |
| Sept. | 3 | | 9, 54 |
| Auguſt | 6 | | 9, 53 |
| Sept. | 4 | Antares | 10, 13 |
| Auguſt | 16 | Sirius | 8, 12 |
| Sept. | 4 | Arcturus | 8, 80 |
| | 15 | | 9, 02 |
| | 28 | | 8, 66 |
| Auguſt | 7 | Sonne | 9, 90 |
| | 20 | | 9, 37 |
| | 22 | | 9, 40 |
| Sept. | 4 | | 9, 52 |
| | 4 | γ im Drachen | 9, 48 |

## II.

## Anhang und Anmerkungen zu der vorhergehenden überſetzten Abhandlung des Herrn Grafen von Brühl, on the Inveſtigation of aſtronomical Circles; von Herrn Obriſtwachtmeiſter von Zach.

Die Ueberſetzung der vorhergehenden Schrift, welche ich auf die Aufforderung des mir verehrungswürdigen Herrn Herausgebers dieſes Archivs, mit ſehr vielem Vergnügen, und blos in der Abſicht unternommen habe, um dadurch, wie ſie es verdient, zu ihrer ſchnelleren Verbreitung in Deutſchland beyzutragen, zeugt nicht allein von den ſcharfſinnigen, Einſichten ihres, vortrefflichen Verfaſſers, ſondern ſie giebt uns zugleich einen ſeltnen, aber jedem warmen Freunde der Wiſſenſchaften höchſt erfreulichen Anblick, in welchem ſchönen, obgleich ungewöhnlichem Verhältniſſe, die Liebe des Herrn Verfaſſers zu den Wiſſenſchaften, mit ihrer Verehrung ſtehet. Der Herr Graf hat dieſe ſeine Abhandlung in einer aus edler Seele gefloſſenen Zueignungsſchrift dem geſchickteſten Verfertiger aſtronomiſcher Kreiſe, dem berühmten Herrn Ramsden, ſelbſt gewidmet. Herr Hofrath Käſtner fordert daher, bey Gelegenheit der Anzeige dieſer Schrift, in den Göttingiſchen gelehrten Anzeigen *) die Literatoren auf, Beyſpiele ähnlicher liberalen und aufgeklärten Humanität zu ſuchen. Gewiß ſelten dürften ſie Eigenſchaften, von allen Seiten wie hier, in ſo vollkommener Harmonie vereiniget finden!

Vor Erſcheinung gegenwärtiger Abhandlung hat der Herr Graf ſchon einige Bemerkungen über denſelben Gegenſtand

*) Im 172ſten Stück vom 27ſten October 1794. S. 1721.

genſtand beygebracht *), und dabey mit Recht geäuſſert, daß Vorzüge ganzer Kreiſe über Quadranten zwar hinlänglich ausgemacht, aber keinesweges völlig entwickelt ſeyen. Aus der vor uns liegenden Abhandlung ſieht man, daß die vorkommenden Schwierigkeiten bey dieſen in der praktiſchen Aſtronomie mit ſo großem Nutzen eingeführten neuen Werkzeugen zwar gröſtentheils glücklich gehoben, aber dennoch nicht ganz aufs reine gebracht ſind. Da ich mich gleichfalls eines zweyfüßigen Kreiſes von Cary verfertiget auf unſerer Sternwarte bediene, den wir eben durch die Güte und Vermittlung des Herrn Grafen aus London erhielten, (in Erwartung des größern achtſchuhigen längſt beſtellten von Ramsden), ſo hat deſſen Aufſtellung, Berichtigung, und Gebrauch auch längſt bey mir über verſchiedene Punkte eigenes Nachdenken veranlaſt, und ich habe dabey zu meinem nicht geringen Vergnügen und Bewunderung zu bemerken die Gelegenheit gehabt, daß dem Herrn Grafen nicht allein kein Umſtand bey Aufſuchung der Quellen, woraus Fehler und Folgen derſelben entſpringen, entgangen iſt, ſondern daß er ſie auch ſämtlich nach den ſtrengſten Regeln der Kritik unterſucht, und geprüft hat, wie es bey dem heutigen verfeinerten Zuſtande der praktiſchen Aſtronomie unumgänglich nothwendig wird. Ich glaube daher, daß meine geſammleten Bemerkungen als Anhang zu des Herrn Grafen vortrefflichen Abhandlung hier nicht am unrechten Orte ſtehen werden.

Bey einem aſtronomiſchen Kreiſe kommen vier Hauptberichtigungen am Inſtrumente ſelbſt in Betracht: 1) die concentriſche Bewegung der Alhidade; 2) die richtige Theilung des Gradbogens; 3) die Lage und Stellung der beyden gegenüberſtehenden Verniere oder Mikrometer; 4) der

*) Erſter Supplementband zu den Berliner aſtronomiſchen Jahrbüchern. S. 136.

4) der Fehler der Kollimazionslinie. Die Rede iſt hier nicht von andern kleinern leicht zu machenden Berichtigungen, die wir als bekannt vorausſetzen, dahin die richtige Stellung des Vertikal- und Horizontalfadens im Brennpunkte des Fernrohrs, die optiſche Parallaxe, die genaue Lage des Werkzeuges in der Mittagsfläche u. ſ. f. gehören. Sind obige vier Elemente bey einem Kreiſe ganz genau bekannt, ſo iſt das Inſtrument in dem möglichſt fähigen Beobachtungszuſtande und es kommt alsdann kein anderer Fehler mehr in Betrachtung, als den der Beobachter im Beobachten ſelbſt, in der Stellung des Loths, oder beym Ableſen der Theilung begehen kann; welches mehr oder weniger von dem Zuſtande der Luft, von ſeiner Geſchicklichkeit, Dispoſition, Schärfe des Geſichts, und der ſorgfältigen Beleuchtung der Eintheilungen herrühren kann. Dieſer letzte Umſtand verdient beſonders, ſowohl bey Tage als bey Nacht, und mehr als man es auf den erſten Anblick glauben ſollte, alle Aufmerkſamkeit des Beobachters. Hiezu können noch die Fehler kommen, die aus einer ungleichen Ausdehnung der Metalltheile des Inſtruments entſtehen können, wie ich ſolches mehrmalen an meinem Kreiſe beobachtet habe, wo ſich inſonderheit bisweilen der Gradbogen anders, als die unabhängigen aus Stahl und Meßing zuſammengeſetzten mikroſkopiſchen Mikrometer, ausdehnet.

I. Wenn ſich die Alhidade eines Inſtruments nicht um den Mittelpunkt ſeines Theilkreiſes bewegt, ſo hat ſie, wie bekannt, eine fehlerhafte Bewegung. Den von einer ſolchen excentriſchen Bewegung herrührenden Irrthum zu berechnen, lehren zwar mehrere Schriften, beſonders Herr Hofrath Mayer in ſeinem gründlichen und ausführlichen Unterrichte zur praktiſchen Geometrie (Erſter Theil S. 342. §. 96. der zweyten Auflage) allein, alle dieſe Anweiſungen ſetzen die Größe der Excentricität in Theilen

des

des Halbmessers, und noch einen andern Winkel als bekannt voraus, und lehren daraus den Einfluß hievon auf die, mit solchen fehlerhaften Werkzeugen gemessenen Winkel berechnen. Aber die Hauptschwierigkeit dabey ist: wie gelangt man zur genauen Kenntniß dieser erforderlichen und gegebenen Stücke? — Herr Hofrath Mayer hat diesen Umstand nicht verhehlt, er sagt daher auf der 350ten Seite l. c. „Es hält in der That schwer, „bey einem gegebenen Winkelmesser die Untersu„chung anzustellen, ob er etwas excentrisch sey, „und wie groß c (die Excentricität) und α (der Win„kel, den der Abstand vom wahren Mittelpunkte mit dem „durch den ersten Theilungspunkt gehenden Halbmesser „macht) sind. Es ist deswegen nothwendig, daß „der Verfertiger eines Winkelmessers gleich an„fangs alle mögliche Sorgfalt anwende, die Be„wegung der Alhidadenregel um den wahren „Mittelpunkt zu veranstalten.“

Die Sache, wie mich dünkt, läßt sich auf eine leichtere, einfache und allgemeine Art also darstellen. Es sey in C (Fig. II.) der wahre Mittelpunkt des eingetheilten Kreises ABGH, in e der excentrische Mittelpunkt der Bewegung, um welchen sich die Alhidade dreht, in A der erste Theilungs- oder 0° Punkt, in G aber 180°. Nun bringe man bey einem also beschaffnen Werkzeuge die Alhidade in irgend eine beliebige Lage, z. B. IM, so wird der untere Vernier in I einen Bogen AI, der obere in M einen Bogen GM zum Maaß angeben. Wäre die Bewegung der Alhidade im wahren Mittelpunkte C geschehen, so müßten beyde Bögen einander gleich seyn, aber sie sind es nicht, und dies ist Folge der excentrischen Bewegung. Ihr Unterschied wird also der Bogen MN seyn, der zugleich das Maaß des Winkels MCN und seine Hälfte jenes des Winkels MIN seyn wird. Was im-

mer für eine Lage der excentrische Punkt e in Ansehung des wahren Mittelpunkts C haben mag, so ist offenbar, daß es nothwendig eine Lage der Alhidade geben muß, in welcher die beyden gegenüberstehenden Verniere gleiche Bögen angeben werden. Man sieht sogleich, daß dieses alsdann statt findet, wenn die Nullpunkte beyder Verniere mit den beyden Mittelpunkten C und e in einer geraden Linie zu liegen kommen, wie zum Beyspiel in der Richtung GA. Wir wollen auf einen Augenblick setzen I und N wären die entgegengesetzten Anfangspunkte der Theilung des Kreises, so wären die von der Alhidade AG in dieser Lage abgeschnittenen gegenüberstehenden Bogen IA und GN einander vollkommen gleich. Um aber die fernere Darstellung zu vereinfachen, wollen wir den o Punkt in A und den Mittelpunkt der Bewegung e auf die Linie AG, die durch den Mittelpunkt der Theilung C geht, setzen, in welchem Falle der obere Vernier genau 180° angeben wird. Gesetzt nun, die Alhidade sey in der Lage CA nach einen gewissen Gegenstand hingerichtet, und werde hierauf herumgeführt, und nach einem anderen Object in die Richtung eI gestellt, so ist zwar der Winkel AeI derjenige, den beyden Gegenstände mit einander machen, aber der auf dem Theilkreise angezeigte Bogen AI wird nicht sein Maaß seyn, weil e nicht der Mittelpunkt der Theilung ist. Dieser Bogen ist eigentlich das Maaß des Winkels ACI, welcher der äussere Winkel des Dreyecks ICe ist, foglich ist der beobachtete Winkel AeI gleich dem angezeigten Winkel ACI, weniger dem Winkel CIe, und da des ersteren wahres Maaß der Bogen AI, des letzteren der Bogen $\frac{1}{2}$(MN), ferner der Bogen MN gleich den Bögen (AI — GM) ist, so wird der wahre beobachtete Winkel AeI gleich seyn den Winkeln ACI — CIe = dem Bögen AI — $\frac{1}{2}$(MN) = den Bögen AI — ($\frac{1}{2}$(AI — GM)) = den Bögen $\frac{1}{2}$AI + $\frac{1}{2}$GM = den Bögen $\frac{AI+GM}{2}$,

welches

welches eben so viele gleichbedeutende Ausdrücke dieses Winkels sind, und wovon der letzte die allbekannte Regel angiebt: die halbe Summe der beyden entgegengesetzten Angaben der Verniere ist der wahre Winkel. Der Winkel CIe ist übrigens der Einfluß oder der Fehler des Bogens AI, der von der Excentricität Ce herrühret. Eben so ist der Bogen AB nicht das Maaß des beobachteten Winkels AeB, sondern die Winkel ACB — CBe = den Bögen AB — ½(HK) = AB — (½(AB — GK)) = AB — ½AB + ½GK = ½AB + ½GK = $\frac{AB + GK}{2}$, sind es. Ziehe ich den Winkel AeI von dem Winkel AeB ab, so bleibt der Winkel IeB übrig, dessen Maaß abermals nicht der Bogen IB ist, sondern die Differenz der Winkel (ACB — CBe) und (ACI — CIe) das ist ACB — CBe — ACI + CIe; da aber ACB — ACI = ICB, so ist das wahre Maaß des Winkels IeB = ICB — CBe + CIe. Gesetzt nun, der Null- oder Anfangspunkt der Theilung wäre nicht mehr in A, sondern in I, das heißt, nicht mehr auf der Verlängerung der Linie, welche die beyden Mittelpunkte C und e verbindet; so folgt daraus, daß in solchem Falle der Einfluß oder Fehler der Excentricität auf dem angezeigten Bogen IB so viel beträgt, als der Unterschied der beyden Winkel CBe und CIe ausmacht, und hiemit wäre die Sache schon allgemeiner betrachtet, und nicht mehr auf die Bedingniß beschränkt, daß der Anfangspunkt in der Verlängerungslinie, die die zwey Mittelpunkte verbindet, liegen muß, sondern er kann nun nach dieser Betrachtung was immer für eine andere Lage haben. Gebraucht man bey der gesuchten Differenz der zwey Bögen AB und AI auch noch die anderen oben gefundenen Werthe dieser Bögen, so erhält man für den Winkel IeB annoch folgende Ausdrücke: AB — ½(HK) — AI + ½(MN), und da AB — AI = IB

so wird er $= IB - \frac{1}{2}(HK) + \frac{1}{2}(MN)$ oder $= \frac{AB+GK-AI-GM}{2}$, und weil $GK - GM = MK$ so ist er auch $= \frac{IB+MK}{2}$, folglich kommt auch in diesem Falle wieder die vorige Regel: die halbe Summe der entgegengesetzten Ablesungen giebt den wahren Winkel frei von allen Einfluß und Folgen der Excentricität. Nun folgt ferner, daß der Fehler der Excentricität, der in $A = o$ ist, von da nach dem Punkt B zu, oder in dem 1sten Quadranten durch alle Punkte immer mehr und mehr zunimmt, je näher die Alhidade dem Punkte B rückt, bis er in B selbst 90° von A entfernt, sein Größtes erreichet, von da er wieder im 2ten Quadranten von B nach G, nach und nach abnimmt, bis er endlich in 180° oder im Punkte G, 90° von B entfernt, verschwindet, und zum zweytenmahle o wird. (Wäre aber der erste Nullpunkt, aus derselben Ursache, die wir oben schon vorausgesetzt haben, in I, und der Bogen IA wäre z. B. 10°, so fiele alsdann begreiflich das Maximum nicht auf den 90sten, sondern auf den 80sten Grad, und der zweyte Verschwindungspunkt nicht in 180° sondern in 170°). Vom Punkte G an fängt der Fehler im 3ten Quadranten wieder an zu wachsen, erreicht in H zum zweytenmal sein Größtes, nimmt von da im 4ten Quadranten ab, bis er abermals in A ins o zurückkehrt. Allein die Verbesserungen der im 3ten und 4ten Quadranten abgelesenen Winkel folgen einem von dem vorhergehenden ganz verschiedenem Gesetze. In den ersten zwey Quadranten AB und BG waren alle auf dem Theilkreise angegebenen Winkel zu groß, sie wurden daher vermindert; nun aber werden im 3ten und 4ten Quadranten GH und HA diese Winkel alle zu klein seyn, und müssen demnach vermehrt werden, um das wahre

Maß

Maaß der wirklich beobachteten Winkel zu erhalten. Denn GeO sey ein beobachteter Winkel, so ist GCO nur der angezeigte, allein GeO ist der äußere Winkel des Dreyecks eCO, also = GCO + eOC; hieraus folgt also: im Halbkreise ABG werden von den auf dem Instrument angegebenen Winkeln, die Verbesserungswinkel abgezogen, im Halbkreise GHA aber, dazu addirt. Hiernach wäre der von der Alhidade, oder dessen Vernier, angegebne 90ste Grad = 90° — eBC, und der 270ste Grad = 270° + eBC, da eBC = eHC. Jedoch ist dabey der Umstand in Acht zu nehmen, wie und auf was Art eigentlich der Kreis eingetheilt ist. Das oben gesetzte hat nur alsdann seine Richtigkeit, wenn die Theilung von 0°, 90°, 180°, 270°, 360° in einem fortgehet. Es giebt aber astronomische Kreise (der meinige ist von der Art) bey welchen die Theilung zu beyden Seiten von 0° bis 90° gehet, z. B. in dem Cassinischen Kreise ist in der Richtung nach dem Zenith unten und oben 0°, von da aus gehen die Eintheilungen zu beiden Seiten des oberen sowohl als des unteren Nullpunkts bis auf 90°, welche folglich in die horizontale Richtung kommen, und in diesem Falle sind in den untersten zwey Quadranten, oder im Halbkreise HAB, die angegebenen Winkel zu groß, und in dem oberen Halbkreise BGH, in welchem der excentrische Punkt befindlich ist, zu klein. In einem Kreise, dessen Alhidade eine excentrische Bewegung hat, wird man die beyden Punkte A und G, das ist, die Lage der Alhidade, in welcher der Mittelpunkt der Bewegung e und der Theilung C in eine gerade Linie zu liegen kommen, bald aufgefunden haben; denn nirgends, als gerade in diesen beyden Punkten, werden die gegenüberstehenden Verniere auf denselben Theilpunkt des Kreises treffen. Eine solche Linie wie AG wollen wir der Kürze wegen künftig die Apsidenlinie des Kreises, und die Punkte A und G den ersten und zweyten Apsidenpunkt nennen. Den ersten dieser Punkte

kann man immerhin, ſo lange man mit der Unterſuchung der Excentricität eines Kreiſes beſchäftiget iſt, 0° heißen, und darauf die vier Quadranten des Kreiſes beziehen, er mag übrigens auf die Theilung hintreffen wo er will. Wenn ich z. B. bey Unterſuchung eines Kreiſes finde, daß der untere Vernier in I im 27° 13′ 45″,83 mit dem obern in N in 207° 13′ 45″,83 genau zuſammentrift, ſo ſey der untere Punkt I = 0°, folglich der obere N = 180°, und die zwey erſten Quadranten liegen alsdann nicht mehr in dem Halbkreiſe A B G, ſondern in dem Halbkreiſe I B N, der gröſßte Fehler der Excentricität C B e, den wir künftig die **gröſßte Mittelpunktsgleichung** nennen werden, wird nicht in 90° des Theilkreiſes, ſondern in 117° 13′ 45″,83 zum erſtenmahl, und in 297° 13′ 45″,83 zum zweytenmahl eintreffen, und der aus der Excentricität berechnete Fehler, wird in den zwey erſten auf unſere **Apſidenlinie** I N bezognen Quadranten von den vom Kreiſe angegebenen Winkeln ſubtractiv, und in den 3ten und 4ten Quadranten additiv ſeyn. Der gefundene Bogen A I vom Nullpunkte des Werkzeuges bis an den erſten **Apſidenpunkt** ſoll das **erſte Argument der Gleichung** heißen, und kann bald + bald — ſeyn, nachdem der Apſidenpunkt rechts oder links vom Nullpunkte des Theilkreiſes fällt, jedoch kommt es dabey auch darauf an, wie ich oben ſchon erinnert habe, auf welche Art der Kreis eingetheilt iſt, und es kann, wenn man hierauf Acht hat, keine Irrung entſtehen. So iſt in unſerm Falle das **erſte Argument der Gleichung** + 27° 13′ 45″,83 den Winkel oder Fehler C I e, der dem Bogen A I zukommt, wollen wir die **Gleichung des erſten Arguments** nennen, und nach dieſen Unterſcheidungen und Benennungen werden unſere nachfolgenden Unterſuchungen ſehr einfach und allgemein werden.

Hat man nun durch Verſuche die Apſidenpunkte eines Kreiſes gefunden, ſo weis man auch zugleich die

Punkte

Punkte in welchen die gröſste Würkung der Excentricität ſtatt finden wird: denn 90° davon werden die beyden Halbmeſſer, der Theilung und der Bewegung, den gröſsten Winkel bilden, und dieſen kann man ſehr leicht meſſen. B und H ſollen dieſe gefundenen Punkte ſeyn. Setze ich nun den einen Vernier der Mikrometer in B ein, ſo kann der entgegengeſetzte nicht auf H, ſondern wird irgend auf einen Punkt K treffen. Die Hälfte des abgeleſenen Bogens KH wird alſo das wahre Maaſs der **gröſsten Mittelpunktsgleichung** CBe ſeyn, und zugleich anzeigen, in welchem Halbkreiſe, (in Beziehung des, auf der Apſidenlinie ſenkrecht ſtehenden Durchmeſſers) der excentriſche Punkte liegt; natürlich allemal in jenem, auf welchem dieſer Bogen KH gemeſſen worden. Begreiflich muſs auch, wäre der Vernier in H eingeſtellt worden, der Bogen $\frac{1}{2}$(LB) dieſelbe **gröſste Gleichung des Mittelpunkts** geben, weil die beyden Winkel BCe und CHe einander gleich ſind, aber freilich nur in der Vorausſetzung, daſs die beyden Verniere genau berichtiget, und die Eintheilungen ſehr gleich und ohne alle Fehler ſind. Aber dieſe beyden Unterſuchungen werden beſſer unten nachgeholt, und in Rechnung gebracht werden, und ſind hier gefliſſentlich in der Abſicht nicht mit in Betrachtung gezogen worden, um die Unterſuchungen der Wirkungen und Folgen der Excentricität nicht vor der Hand zu complicirten. Ueberhaupt, die meiſten Berichtigungen aſtronomiſcher Werkzeuge geſchehen durch *Regles de fauſſe poſition*; die Berichtigung eines Fehlers verändert einen andern vorhin ſchon etwas verbeſſerten Fehler, dieſer berichtiget den vorhergehenden wieder, und dies wechſelſeitig ſo lange, bis ſie endlich beyde verſchwinden. So berichtigen z. B. bey einem Mittagsfernrohre, Zeit und Gang der Uhr, Lage des Fernrohrs, und die gerade Aufſteigung der Sterne ſo lange eines das andere, bis der Irrthum überall o wird.

In dem rechtwinklichten Dreyecke CBe haben wir den Winkel in B und den Halbmeſſer BC des Inſtruments, folglich wird die Excentricität Ce in Theilen dieſes Halbmeſſers ſogleich bekannt werden, denn ſie iſt BC. Tang CBe. Geſetzt man habe in B den Bogen KH=2′ gefunden, ſo wird, für den Halbmeſſer des Kreiſes = 1, Ce = 0,00029088 befunden werden. Hieraus kann man ſich einen Begriff von der großen Genauigkeit, und ihrer nicht übertriebenen Nothwendigkeit, bey aſtronomiſchen Werkzeugen machen, und zugleich die Kunſt und die Geſchicklichkeit ſchätzen und würdigen lernen, die ein Künſtler nur bey Verfertigung der Zentralzapfen anzuwenden hat. Ein Fehler von $\frac{1}{3500}$ Theilen des Halbmeſſers im Centro, giebt ſchon den beträchtlichen Fehler von einer Minute auf dem Theilbogen. Bey einem Kreiſe von zwey Fuß im Durchmeſſer, wie der des Herrn Grafen von Brühl, und der meinige, würde dieſer Fehler nicht mehr als einen Raum von 0,04188 einer Linie einnehmen, und doch verfertiget Ramsden Kreiſe, in welchen nach den ſchärfſten Unterſuchungen nicht die allergeringſte Spur einer Excentricität zu bemerken iſt! Die Theilmethoden ſind heut zu Tage in England auf einen ſehr hohen Grad der Vollkommenheit und Genauigkeit gebracht worden. An des Herzogs von Marlborough ſechsfüßigen Mauerquadranten in Blenheim, von Ramsden verfertiget, iſt der Bogen von 90° auch nicht um eine einzige Sekunde fehlerhaft, dagegen z. B. der Birdiſche achtfüßige nördliche in Ratcliff's Sternwarte zu Oxford um 13″ zu klein iſt.

Da nun die Excentricität Ce bekannt iſt, ſo läßt ſich daraus ihr Einfluß für jeden gegebenen Bogen des Theilkreiſes unmittelbar berechnen. Ich ſetze AI ſey der beobachtete Bogen, oder vielmehr AeI der beobachtete Winkel, ſo wird der Winkel CIe ſeine geſuchte Verbeſſe-

rung

rung seyn, die wir auf folgende Art erforschen wollen. Man fälle aus e auf den verlängerten Halbmesser IC eine senkrechte em, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke Cem, diese em = eC. Sin. eCm = eC. Sin ACI, desgleichen Cm = eC. Cosin ACI und Tang mIe $= \frac{em}{Im} = \frac{em}{IC+Cm}$. Setze ich die Werthe an ihre Stelle, so erhalten wir Tang CIe $= \frac{eC.\ Sin\ ACI}{IC+eC.\ Cosin\ ACI}$. Da aber der gesuchte Winkel CIe auf keinen Fall sehr groß, auch die Excentricität immer nur sehr geringe seyn wird, (es sey dann, das Werkzeug wäre über alle Maaßen und ganz ungewöhnlich fehlerhaft) so kann man erstlich die Tangente, und dann das zweyte Glied im Nenner eC. Cosin ACI ohne merklichen Irrthum ganz weglassen und bloß setzen CIe $= \frac{eC.\ Sin\ ACI}{IC}$. Allein, da wir oben auch gefunden haben eC = IC, tang. CBe, so können wir diesen Werth von eC substituiren, und erhalten CBe. Sin ACI für den Werth des gesuchten Winkels CIe. Hieraus folgt nun diese sehr einfache Regel: Die Verbesserung eines Winkels eines excentrischen Kreises vom Apsidenpunkte gerechnet, wird allemal in Sekunden gefunden, wenn man die größte Mittelpunktsgleichung, in Sekunden ausgedrückt, mit dem Sinus des vom Instrument angegebenen Winkels multiplicirt. Es sey zum Beyspiel in unserem Falle, wo A der Apsiden- und zugleich Nullpunkt des Instruments ist, der Bogen AI = 40°, man verlangt den wahren Winkel AeI zu wissen: so ist

Log. CBe = Log 60″ = 1,7781513
Log. Sin. 40° = 9,8080675
Log. 1,5862188 = 38″,567

und

und da der Bogen AI im ersten Quadranten liegt, so ist auch diese Korrektion negatif, folglich der wahre Winkel 39° 59′ 21″,433. Wer nun einen solchen Kreis wie der aufgegebene zu berichtigen hätte, der brauchte die Rechnung nur für einen Apsidenquadranten zu machen, damit kann er den ganzen Kreis rectificiren. Ich würde die Berechnung und folgende Anordnung einer Tafel vorschlagen. die man, so genau als man will, von Grad zu Grad berechnen mag.

## Tafel

zur Verbesserung der Winkel, die mit einem ganzen Kreise beobachtet werden, dessen Alhidade sich excentrisch bewegt, und in welchem die größte Mittelpunktsgleichung 1 Minute ist. Die Apsidenlinie trift mit dem Nullpunkte des Werkzeugs zusammen; folglich ist das erste Argument und dessen Gleichung = o.

| — z | | o | + z | Verbesserung | + z | | o | — z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | | o | VI | o″,oo | O | | o | VI |
| | | 10 | | 10, 42 | | | 20 | |
| | | 20 | | 20, 52 | | | 10 | |
| I | | o | VII | 30, oo | XI | | o | V |
| | | 10 | | 38, 57 | | | 20 | |
| | | 20 | | 45, 96 | | | 10 | |
| II | | o | VIII | 51, 96 | X | | o | IV |
| | | 10 | | 56, 38 | | | 20 | |
| | | 20 | | 59, 09 | | | 10 | |
| III | | o | IX | 60, 90 | IX | | o | III |

Den Gebrauch dieser Tafel wird man aus folgenden Beyspielen ersehen: Auf dem Theilkreise ist ein Winkel

von

von 170° abgeleſen worden, welches iſt der wahre Winkel? 170° = V Zeichen 20° geben in der Tafel die Verbeſſerung — 10″,42, daher der wahre Winkel 169° 59′ 49″,58 — Was iſt der wahre Werth des Winkels 260°? 260° = 8ᵈ 20° giebt in der Tafel + 59″,09 Verbeſſerung, folglich iſt der wahre Winkel 260° 0′ 59″,09.

Um noch ein Beyſpiel einer Anwendung zu geben, und dabey zugleich die Leichtigkeit unſerer Methode in jedem andern Falle zu zeigen, ſo wollen wir hiernach daſſelbe Kreisinſtrument unterſuchen, das Herr Hofrath Mayer auf der 346ſten Seite ſeiner praktiſchen Geometrie als Beyſpiel anführet. Er ſetzt dabey willkührliche Data als bekannt voraus, die wir aber unter einer andern Geſtalt auf dem oben angezeigten Wege erforſchen wollen. Ich ſetze zu dem Ende, wir hätten dieſen Kreis in natura vor uns. Nachdem ich die Alhidade dieſes Werkzeuges in allen Gradpunkten geprüft, ſo finde ich, daß ſonſt nirgends als im 350ſten Grade beyde Verniere genau grade entgegengeſetzte Theilpunkte angeben, und daß, wenn der untere Vernier auf 350° ſtehet, der obere ſehr ſcharf auf 170° trift; hieraus ſchließe ich erſtlich, daß bey dieſem Werkzeuge die Apſidenlinie durch 350° und 170° geht, daß in 80° und 260° die gröſßte Mittelpunktsgleichung ſtatt finden wird, und daß das erſte Argument = + 10° iſt, auch lerne ich daraus die vier Quadranten des Kreiſes erkennen. Setze ich nun den einen Vernier der Alhidade in 80° ein, ſo giebt der entgegengeſetzte 260° 6′ 52″,52 an; und hieraus folgere ich zweytens, daß die gröſßte Mittelpunktsgleichung 3′ 26″,26 iſt, daß der excentriſche Mittelpunkt der Bewegung im 1ſten und 4ten Quadranten befindlich iſt, und daß die Gleichung des erſten Arguments = — 35″,82 iſt. Hiernach entſtehet für dieſes Kreisinſtrument folgende Tafel:

lungen in Bezug auf die Apsidenlinie vornehmen will, bey welcher der Einfluß der Excentricität auf gleich große Bögen zu beyden Seiten auch gleich groß wird, der wird noch andere Vortheile entdecken, die wir, nach gemachter Anzeige der Hauptsache, dem eigenen Nachdenken eines jeden überlassen, da sie nunmehr leicht aufzufinden sind, so wie die Modification der vorgeschlagenen Methoden, im Fall die astronomischen Kreise andere Anordnungen in ihren verschiedenen Theilen haben sollten, deren wir nicht erwähnt haben, noch erwähnen konnten, da sie sehr mannichfaltig seyn können, und im Grunde immer auf dasselbe hinauslaufen; worein sich also Jedermann sehr leicht finden wird.

III. Wenn zwey gegenüberstehende Verniere an einem Kreise nicht in gerader Linie mit dem Centro stehen, so beträgt dieses bey der beyderseitigen Ablesung des Bogens einen Errorem Indicis, der bekanntlich sehr leicht zu berichtigen ist, wenn keine Excentricität mit im Spiele ist. Ich setze, der Augenvernier wäre auf 0° eingestellt, und es gebe der Objectivvernier 1′ 20″ weniger als 180° an, und noch weis ich nicht ob die 1′ 20″ der Fehler des Zeigers allein, oder ob eine Einwirkung der Excentricität dabey ist? Kehre ich nun, nach einen halben Umlaufe der Alhidade, die daran befestigten Verniere um, und finde zwischen 180° und 0° ganz denselben Unterschied, so bin ich alsdenn gewiß, daß die Hälfte davon oder ±40″ der Fehler der Zeiger ist. Hat aber die Alhidade eine excentrische Bewegung, so wird der Fehler der Zeiger mit jenem der Excentricität verwebt seyn; die Hälfte der doppelten Angaben bey Messung eines Winkels verbessert sie zwar beyde, und giebt den wahren Winkel, allein die Fehler werden dadurch collective aufgehoben, und wir gelangen nicht zur Kenntniß eines jeden insbesondere. Was aber auch immer der Fehler der Zeiger seyn mag, so bleibt er für alle Punkte des Kreises beständig derselbe, und

Was beträgt der Irrthum in 260°, und wie groß ist der wahre Winkel?

260° = VIII$^{s}$ 20°

Erstes Argum. + 10° .... dessen Gleichung — 35″,82

IX$^{s}$ 0°, damit kommt aus der Tafel die Verbesserung — 3′ 26,26

Irrthum — 4 2,08

Folglich der verbesserte und wahre Winkel 259° 55′ 57″,91 wie ihn Herr Hofrath Mayer S. 349 findet.

Hiernach wird es nicht mehr schwer, die Einwirkungen der Excentricität in einem jeden Kreise, in dem sie statt findet, sogleich zu berechnen. Mit einer Tafel wie gegenwärtige, dessen Berechnung auch äusserst einfach ist, und nur die Addirung zweyer Logarithmen erfordert, kann man ohne alle fernere Rechnung, die Verbesserung, und den wahren Werth eines jeden gegebnen Winkels gleich finden, auch hat man dabey nicht nöthig den Halbmesser, noch die Excentricität in Theilen des Halbmessers zu kennen, sondern diejenigen Data, die man bey dieser Methode braucht, kann man mit leichter Mühe, und sehr genau auf jeden Kreise selbst finden.

Allein wozu, kann man fragen, diese Berechnung bey einem ganzen Kreise? Sie wird ja ganz unnöthig, da wir oben erwiesen haben, daß die halbe Summe der gegenüberstehenden Bögen allemal den wahren Winkel, frey von allen Einwirkungen der Excentricität, gebe. Mit dieser Regel hat es freylich seine Richtigkeit, aber nur alsdann, wenn es mit den Eintheilungen der beyden Bögen auch seine Richtigkeit hat; ist dieses nicht, so verbessert diese Vorschrift den Excentricitätsfehler nicht ganz, ausser in dem einzigen Falle, wie auch Herr Graf von Brühl schon erwähnt hat, wenn der eine Bogen gerade so viel zu groß, als der andere zu klein ist. Sollten wir,

auch

auch würklich in der Folge, und zu Erreichung eines andern nothwendigen Zweckes, der vorgenommenen Entwicklung der Einwirkung der Excentricität bey einem astronomischen Instrumente nicht bedürfen, so glaube ich doch, daß, wenn selbst dies der Fall wäre, es dennoch nicht nöthig seyn würde, irgend eine Apologie oder Entschuldigung herzusetzen, daß ich die Theorie eines Fehlers untersucht habe. Um so weniger tritt mehes hier ein, da ich sogleich zeigen werde, zu was uns diese Theorie weiter dienen soll. Ich schreite demnach zur Untersuchung der Eintheilungen fort.

II. Man hat verschiedene Verfahrungsarten, die Eintheilungen des Gradbogens eines astronomischen Werkzeuges zu untersuchen. Unter mehrern Vorschlägen, ist der natürlichste der mit mikrometrischen Stangenzirkeln. Mit einem dergleichen Werkzeuge, wenn es so beschaffen ist, wie dasjenige, welches ich auf der 191ten Seite des ersten Supplementbandes zu den Berliner astronomischen Jahrbüchern beschrieben habe, kann man bey einem Kreise von zwey Fuß im Durchmesser die Untersuchung bis auf 1 Sekunde treiben. Ich habe am angezeigten Orte angeführt, daß eine Theilung der Mikrometerscheibe dieses Stangenzirkels, die beynahe eine Pariser Linie beträgt, gleich kommt einer Verrückung der Zirkelspitzen von 0,002685765 einer Linie. Da man aber eine Viertellinie auf der Theilscheibe noch sehr gut nehmen kann, so betrüge dieses auf dem Stangenzirkel 0,000671441 einer Linie. Oben haben wir gesehen, daß eine Minute auf einem zweyfüßigen Kreise einen Raum von 0,04188 einer Linie einnimmt; demnach kommt auf eine Sekunde 0,000698, welches auch der Stangenzirkel mißt. Eine größere Genauigkeit und Schärfe erhielt man mit diesem Werkzeuge, wenn man statt stählerner Zirkelspitzen und Loupen gleich mikroskopische Mikrometer auf die Läufer dieses Stangenzirkels setzte. So nehmen

z. B.

z. B. bey den mikroskopischen Mikrometern auf meinem zweyfüßigen Kreise zwey Sekunden des Gradbogens einen Raum von einer Pariser Linie auf der Theilscheibe der Mikrometerschraube ein. Eine Sekunde kann man also, ich will nicht behaupten, ganz gewiß messen, aber doch ganz gut schätzen.

Ob man gleich mit einem solchen Stangenzirkel einen hohen Grad von Genauigkeit erreichen kann, so bleibt dennoch bey dessen Anwendung eine Hauptschwierigkeit übrig. Herr de la Lande Art. 2561. III. Edit. seiner Astronomie sagt bey der Erklärung dieser Untersuchungsmethode „On prend d'abord avec ce Compas „la distance du Centre au premier point de la division....“ Allein, hic Rhodus, hic salta; eben diese Distanz, auf die alles ankommt, kann man nicht *d'abord*, meistens gar nicht nehmen! Ich übergehe die andern Methoden, die man in de la Lande's, Bouguer's, de la Condamine's, Boscovich's und Anderer Schriften angezeigt findet, und mehr oder weniger brauchbar, genau oder zuverlässig sind, und erkläre hier noch ein Verfahren, dessen sich Herr Ramsden bedient, bey Quadranten den Bogen von 90° zu verificiren. In einer Art von Kreutz oder Rahmen spannt er einen horizontalen Faden ein, den ein vertikaler in der Mitte schneidet. Dieses Fadenkreutz wird so gestellt, daß der Vertikalfaden unter den o Punkt der Theilung trifft, alsdann deckt der Horizontalfaden zwey an beyden Enden des Fernrohrs angezeichnete Punkte. Wenn beym Herumwenden dieses Kreutzes, der Verticalfaden wieder auf o gestellt, der Horizontalfaden die beyden Punkte des Fernrohrs abermals genau trifft, so ist man gewiß, daß der durch den o Punkt gehende Vertikalfaden genau einen rechten Winkel mit dem Horizontalfaden macht. Dieses Zusammentreffen, wenn es nicht auf das erstemal statt findet, kann man durch eine

geringe Bewegung des Fernrohrs, auf bekannte Art sehr leicht erhalten. In dieser Lage des Fernrohrs beobachte man die Entfernung des o Punkts des Verniers oder Mikrometers vom ersten Punkte der Theilung des Gradbogens, welches der Punkt 90° bey einem Quadranten ist, der Scheitelabstände angiebt. Nun bringe man das Fernrohr, mittelst eines Loths, das die obenerwähnten zwey Punkte auf dem Fernrohre deckt, in eine vertikale Lage; giebt hier der Vernier oder das Mikrometer dieselbe Entfernung vom o Punkt, wie oben vom 90sten Punkt, so ist man offenbar versichert, daß der ganze Bogen genau 90° hält; wo nicht, so wird der Unterschied den zu großen oder zu kleinen Fehler für denselben Bogen angeben.

Bey einem ganzen Kreise verbinden sich diese beyden Methoden auf eine leichte und einfache Art, und alle ihre Vortheile vereinigen sich allda, ohne etwas von ihren Nachtheilen zu haben. Bey meinem Kreise stehen z. B. zwey gegenüberstehende mikroskopische Mikrometer zu rechten Winkeln mit zwey entgegengesetzten Vernieren; alle zusammen stehen auf einer fest verbundenen Kreutzalhidade, worauf auch das Fernrohr befestiget ist, und womit sich alles zusammen in einer gemeinschaftlichen Bewegung um den Mittelpunkt des Instruments drehet. Hier stellen also die übers Kreutz gestellten Verniere und Mikrometer, das Fadenkreutz des Herrn Ramsden, und die Alhidade, worauf die mikroskopischen Mikrometer stehen, den oben vorgeschlagenen Stangenzirkel vor. Die genauen vier rechten Winkel des Kreises, die durch das Kreutz gebildet werden, sind nun auf mancherley Art durch Umwendung leicht zu erhalten, und wäre das Werkzeug ganz frey von Excentricität, so wären auch diese 4 rechten Winkel im wahren Mittelpunkt des Instruments, und die vier Quadranten gleich groß. Da wir aber, wenn auch eine Excentricität statt hat, nach der oben beschriebe-

nen

nen Methode, den wahren Werth eines jeden Theilpunkts zu erforschen wissen, und dies so viel ist, als hätte nun die Alhidade gar keine excentrische Bewegung mehr, so kann man bey einem jeden Theilpunkte des Gradbogens, wenn man nämlich von dem Einfluß der Excentricität auf ihn Rechnung trägt, die Fehler der Eintheilung mittelst des mikroskopischen Mikrometers, gleichsam wie mit dem besten Stangenzirkel erforschen und messen; man darf nur z. B. den richtigen Bogen von 90° oder 180° von Theil- zu Theilpunkt mittelst der beyden Mikrometer auf dem Kreise herumtragen, und die Abweichungen davon, wo sich welche finden, durch die Mikrometerschraube bestimmen, und nun vermittelst der Berechnung, oder der vorgeschlagenen Excentricitätstafeln, die daraus kommenden Fehler, von jenen der Theilungen, absondern, so kann man letztere zu einem jedesmaligen künftigen Gebrauch in eine besondere Tafel bringen, und hiermit hätten wir den zweyten Berichtigungspunkt aufs Reine gebracht. Man kann zwar noch einwenden, daß, da wir keine richtige Excentricität vorausgesetzt haben, noch voraussetzen konnten, wir auch keine wahre Untersuchung der Theilung vorgenommen haben, da diese sich auf jene gründet, und wir die erstere gemessen, ehe wir die Richtigkeit der letzteren gekannt hatten, und darüber Rechnung tragen konnten. Hierauf beziehe ich mich mit meiner Antwort ein für allemal auf das, was ich oben schon erwähnt habe, daß nämlich ein Fehler den andern so lange verbessern müsse, bis beyde als verschwindende Größen zu betrachten sind. Wer also sehr genau seyn will, oder bey einem sehr fehlerhaften Instrument es seyn muß, der nehme nach dieser ersten Berichtigung der Theilung, die Untersuchung der Excentricität nochmals vor, und leite daraus von neuem die Fehler der Theilung her, und wiederhohle dies so lange, bis er am Ende einerley Resultate erhält. Wer übrigens diese Untersuchung der Eintei-

lungen in Bezug auf die Apsidenlinie vornehmen will, bey welcher der Einfluß der Excentricität auf gleich große Bögen zu beyden Seiten auch gleich groß wird, der wird noch andere Vortheile entdecken, die wir, nach gemachter Anzeige der Hauptsache, dem eigenen Nachdenken eines jeden überlassen, da sie nunmehr leicht aufzufinden sind, so wie die Modification der vorgeschlagenen Methoden, im Fall die astronomischen Kreise andere Anordnungen in ihren verschiedenen Theilen haben sollten, deren wir nicht erwähnt haben, noch erwähnen konnten, da sie sehr mannichfaltig seyn können, und im Grunde immer auf dasselbe hinauslaufen; worein sich also Jedermann sehr leicht finden wird.

III. Wenn zwey gegenüberstehende Verniere an einem Kreise nicht in gerader Linie mit dem Centro stehen, so beträgt dieses bey der beyderseitigen Ablesung des Bogens einen Errorem Indicis, der bekanntlich sehr leicht zu berichtigen ist, wenn keine Excentricität mit im Spiele ist. Ich setze, der Augenvernier wäre auf 0° eingestellt, und es gebe der Objectivvernier 1′ 20″ weniger als 180° an, und noch weis ich nicht ob die 1′ 20″ der Fehler des Zeigers allein, oder ob eine Einwirkung der Excentricität dabey ist? Kehre ich nun, nach einen halben Umlaufe der Alhidade, die daran befestigten Verniere um, und finde zwischen 180° und 0° ganz denselben Unterschied, so bin ich alsdenn gewiß, daß die Hälfte davon oder ±40″ der Fehler der Zeiger ist. Hat aber die Alhidade eine excentrische Bewegung, so wird der Fehler der Zeiger mit jenem der Excentricität verwebt seyn; die Hälfte der doppelten Angaben bey Messung eines Winkels verbessert sie zwar beyde, und giebt den wahren Winkel, allein die Fehler werden dadurch collective aufgehoben, und wir gelangen nicht zur Kenntniß eines jeden insbesondere. Was aber auch immer der Fehler der Zeiger seyn mag, so bleibt er für alle Punkte des Kreises beständig derselbe, und

und wird, wenn er auf der einen Seite + ist, beym Umwenden auf der andern Seite — werden, dagegen jener, der aus einer Excentricität herrührt, veränderlich, das ist, für jeden Theilpunkt anders wird. Bey einem Kreise, dessen Alhidade in einem excentrischen Punkte läuft, wird in der Apsidenlinie, wo der Excentricitätsfehler 0 wird, und ganz verschwindet, nichts als jener der Zeiger allein (wenn einer vorhanden ist) übrig bleiben. Wenn also überhaupt bey Aufsuchung der Apsidenlinie auf einen Kreis, nirgends zwey entgegengesetzte Punkte genau 180° von einander abstehend gefunden werden, so ist es eine Anzeige, daß ein Fehler der Zeiger vorhanden sey; in dem Punkte aber, wo der obere Bogen beym Umkehren der Verniere um gerade so viel zu groß oder zu klein, als der untere befunden wird, da werden nicht nur die Apsidenpunkte, sondern auch die Fehler der Zeiger ganz allein sich ergeben. Wird aber dadurch die Aufsuchung der Apsidenpunkte, der größten Mittelpunktsgleichung, des ersten Arguments u. s. f. nicht sehr complicirt, und Schwierigkeiten unterworfen seyn? Befürchtet man dieses, so ist noch folgender Weg, der alles auf einmahl und kurz zusammen faßt, indem man aus einer einzigen, oder jeder beliebigen Stellung der Alhidade, ohne fernere Prüfung oder Erforschung, sogleich die Apsidenpunkte und alle andere oben erwähnte Data berechnen kann. Ich setze hier zum Beyspiel ein Kreisinstrument voraus, mit dessen Mangel wir ganz unbekannt sind. Ich stelle einen Vernier auf geradewohl in 80° ein, finde, daß der entgegengesetzte 260° 5′ 40″,88 angiebt, und ersehe hieraus sogleich, daß bey diesem Werkzeuge überhaupt Fehler statt finden, sie mögen nun die Excentricität, die Stellung der Zeiger, oder die Unrichtigkeit der Theilung zum Grunde haben. Nun kehre ich nach einem halben Umlaufe die Alhidade herum, stelle nunmehr den Vernier,

der vorhin auf 80° geſtanden hatte, 180° davon, alſo gerade auf 260°, und erhalte durch den entgegengeſetzten Vernier 79° 51′ 55″,84. Da ich nun bey der erſten Meſſung 5′ 40″,88 zu viel, und bey der zweyten 8′ 4″,16 zu wenig erhielt, ſo ſchließe ich weiter daraus, daß hier mehr als Fehler der Zeiger (wenn einer vorhanden iſt, ſonſt wären die Unterſchiede ganz gleich geweſen) ſondern auch Einwirkung der Excentricität obwalte. Um nun die wahren Winkel von 80° und 260° zu erforſchen, ſo wollen wir uns der oben erwieſenen Vorſchrift bedienen, und die halbe Summe der entgegengeſetzten Bögen nehmen, und die Bögen (wenn ſie es nicht ſind) gleichnamig machen, ſo erhalten wir die wahren Winkel, frey von allen Fehlern der Excentricität und der Zeiger. Demnach wäre

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mit dem Augenvernier | = | 80° | 0′ | 0″ |
| „ „ Objectivvernier | = | 80 | 5 | 40,88 |
| Summe | = | 160 | 5 | 40,88 |
| Hälfte, wahrer Winkel in 80° | = | 80 | 2 | 50,44 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mit verkehrter Alhidade { Augenvernier | 260° | 0′ | 0″ | |
| Objectivvernier | 259 | 51 | 55,84 | |
| Summe | 519 | 51 | 55,84 | |
| Hälfte, wahrer Winkel in 260° | = | 259 | 55 | 57,92 |

Der Fehler bey 80° beträgt alſo + 2′ 50″,44, und bey 260° iſt er — 4′ 2″,08. Aus dem, was wir oben bey der Entwicklung der Berechnung der Excentricität erklärt haben, folgt ferner, daß die halbe Summe dieſer entgegengeſetzten Fehler, die Verbeſſerung derſelben, in Bezug auf die ſogenannte Apſidenlinie; und die halbe Differenz, die Gleichung des erſten Arguments geben wird. Erſtere wird alſo in unſerm Falle ſeyn = ± 3′ 26″,26 letztere = — 35″,82. Oben iſt erwieſen worden, daß die Verbeſſerung oder der Fehler der

Excen-

Excentricität eines Winkels ACI in Beziehung auf die Apsidenlinie allemal gleich ist Tang CBe. Sin ACI. Wir wollen nun hier den bekannt gewordenen Fehler 35″,82 des ersten Arguments = a setzen, die noch unbekannte gröſste Mittelpunktsgleichung CBe = y, den ebenfalls unbekannten Winkel, oder das sogenannte erste Argument = x, so ist a = Tang y. Sin x, daher $\frac{a}{\text{Sin } x}$ = Tang y. Nun sey auch die zweyte gefundene Verbesserung 3′ 26″,26 = b, so wird vermöge Beobachtung auf dem Kreisinstrument diese Verbesserung zu dem Bogen (80° + x) oder (260° + x) oder vielmehr allgemein zu (φ + x) passen, wo φ ein bekannter, und allemahl beym Versuch ein vom Instrument angegebener Bogen ist; daher wird auch, da $\frac{b}{\text{sin}(\varphi+x)}$ = Tang. y, folglich $\frac{a}{\text{sin } x} = \frac{b}{\text{sin}(\varphi+x)}$ hieraus entstehet, alsdann $\frac{a}{\text{sin } x} = \frac{b}{\text{sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,x + \text{sin}\,x\,\text{Cos}\,\varphi}$, woraus wird $a\left(\frac{\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin } x}\right) = b$, und ferner a (Sin φ Cotang x + Cos φ) = b, demnach

$$\text{Cot. } x = \frac{b - a\,\text{Cos}\,\varphi}{a\,\text{Sin}\,\varphi} \text{ oder } \text{Cot } x = \frac{b}{a\,\text{Sin}\,\varphi} - \text{Cot. } \varphi,$$

und damit läſst sich sogleich der Winkel berechnen, den der Halbmesser des Instruments nach dem o Punkt gezogen mit der Apsidenlinie macht, folglich der Apsidenpunkt selbst bestimmen, ohne daſs man nöthig hat, ihn durch Versuche auf dem Werkzeuge selbst ausfindig zu machen. Im vorliegenden Exempel wird die Rechnung also stehen.

| | |
|---|---|
| Log a = Log 35″,82 | = 1,5540953 |
| Log Sin φ = Log Sin 80° | = 9,9933515 |
| Log (a Sin φ) | = 1,5474468 |
| Log b = Log 206″,26 | = 2,3144150 |
| $\text{Log}\left(\frac{b}{a \sin \varphi}\right)$ | = 0,7669682 |
| Davon ist die natürliche Zahl | = 5,84747 |
| Cotang nat. φ (80°) | = 0,17623 |
| Cotang nat. x | = 5,67114 |
| also x | = 10°,0′ |

Da nun der Winkel x, oder das sogenannte erste Argument bekannt ist, so ist es auch die größte Mittelpunktsgleichung y; und nun erkennt man sogleich, daß der vorgegebene, der obige angenomme Mayerische Kreis ist, auch sieht man, wie leicht aus jeder willkührlichen Stellung der Alhidade eines Kreises, jene Elemente die zur Berechnung der Excentricität und ihrer Wirkung erforderlich sind, alsobald gefunden werden mögen. Entwirft man hiernach, wie oben geschehen ist, eine Verbesserungstafel, so kann man den Fehler eines jeden Winkels einzeln bestimmen, wenn man sich nicht die Mühe der doppelten Ablesung geben will, auch wird man bey der Anwendung dieser Tafel auf die Winkel 80° und 260° finden, daß, um den wahren Winkel zu erhalten, keine Fehler der Zeiger anzuwenden waren.

Nun wollen wir ein zweytes Beyspiel von einem Kreise aufstellen, bey dem Excentricität und Fehler der Zeiger zugleich statt hat, und letztern unmittelbar aus der gemachten Beobachtung, und nicht erst mittelst des Apsidenpunkts, bestimmen. Wenn ich bey diesem Kreise den Augenvernier auf 20° 0′ 0″ stelle, so giebt mir der Objectivvernier 200° 4′ 38″,62, stelle ich aber den Objectivvernier (wohl zu merken, ohne die Alhidade umzuke-

zukehren) auf 200° 0′ 0″ ſo giebt mir der Augenvernier, ſtatt der vorigen Angabe 20° 0′ 0″, nunmehr 19° 57′ 46″,10. Jetzt kehre ich die Alhidade einen halben Umlauf herum, und ſtelle den Objectivvernier auf 20° 0′ 0″ ſo giebt der Augenvernier 199° 59′ 50″,64, und richte ich abermals, ohne die Alhidade zu verkehren, den Augenvernier auf 200° 0′ 0″ ſo zeigt der Objectivvernier 19° 52′ 58″,10. Aus dieſer auf geradewohl angenommenen und auf obige Art abgeleſenen Stellung der Alhidade, ſoll man die Excentricität des Kreiſes, den Fehler der Zeiger, die Lage der Apſidenlinie, das erſte Argument, ihre Gleichung, wie auch die größte Mittelpunktsgleichung, beſtimmen, um hieraus die Verbeſſerungstafeln entwerfen zu können, vermittelſt welcher alsdenn die Richtigkeit und Gleichheit der Eintheilungen erforſcht werden mag. Dieſe Aufgabe iſt nunmehr im weitläuftigſten und allgemeinſten Sinne mit den möglichſt wenigſten Datis aufgegeben, die ferner noch dieſe weſentliche Eigenſchaft haben, daß ſie ſogleich auf jedem vorkommenden aſtronomiſchen Kreiſe ohne Schwierigkeit gefunden, und nicht erſt mühſam geſucht werden dürfen. Zu mehrerer Deutlichkeit und beſſerer Ueberſicht wollen wir die obigen Angaben in nachſtehende Form bringen. A. V. bedeutet Augenvernier, O. V. Objectivvernier, die Winkel werden wo es nöthig gleichnamig gemacht.

nicht allemal und bey jeder Beobachtung nöthig hat, den Kreis herumzudrehen. Denn beobachtet man z. B. in der Lage, AB des Instruments, so ist klar, daß jeder wahre Winkel, auf dem Halbkreis mB beobachtet, immer gleich seyn wird, dem falsch gelesenen Bogen, weniger dem Kollimazionsfehler om, und auf dem Halbkreis mA wird man zu jedem darauf beobachteten und abgelesenen Bogen denselben Kollimazionsfehler om hinzufügen müssen. Gerade das Entgegengesetzte muß statt finden, wenn die Beobachtungen mit dem umgekehrten Instrumente in der Lage B'A' gemacht werden, wie sich sogleich aus der Ansicht der Figur ergiebt.

Man hätte den wahren Winkel der Beobachtung auch noch auf folgende Art finden können:

Es ist $oCB = mCB + oCm$

und $o'CA' = mCB - o'Cm'$

daher auch $\frac{OCB + o'CA'}{2} = mCB$. Nämlich die halbe Summe der abgelesenen Bögen giebt den wahren Winkel der Beobachtung. Hierdurch haben wir zwar den wahren Winkel gefunden, aber ohne den Kollimazionsfehler selbst kennen zu lernen. Obige zwey Regeln sind jedoch nicht allgemein wahr, sondern sie leiden eine Ausnahme in dem einzigen Falle, wenn die beobachtete Zenithdistanz geringer als der Kollimazionsfehler selbst befunden werden sollte. Ich setze, man habe den Scheitelabstand eines Sterns $S' = mC$ beobachtet, kleiner als der Kollimazionsfehler $oCm$, so wird bey verwendeten Instrumente dieselbe Beobachtung $= m'Ca'$ werden, die abgelesenen Winkel werden aber seyn.

Bey

$= 1' 12'',00$ oder auch $\frac{A' - B'}{2} = \frac{-1' 6'',95 + 3' 30'',95}{2} = 1' 12'',00$. Hat man diesen Fehler, so hat man auch die wahren Verbesserungen der Winkel in den vier Stellungen, die von der Excentricität allein herrühren, und in welchen die Fehler der Zeiger nicht mehr verwebt sind; daher erhalten wir

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fehler A bey der I. Stellung | + 2′ 19″,32 | Fehler B bey der III. Stellung | — 0′ 4″,68 |
| Fehler des Zeigers | — 1 12, 00 | Fehler des Zeigers | + 1 12 |
| Wahre Excentricitätsverbesserung für den Bogen 20° des Instrum. | + 1 7, 32 | Wahre Verbess. für Excentr. und für den Bogen 20° des Instruments | + 1 7, 32 |
| Fehler A′ bey der II. Stellung | — 1′ 6″,95 | Fehler B′ bey der IV. Stellung | — 3′ 30″,95 |
| Fehler des Zeigers | — 1 12, 00 | Fehler des Zeigers | + 1 12, 00 |
| Wahre Verbesser. für Excentr. und den Bogen 200° des Instrum. | — 2 18, 95 | Wahre Verbess. für Excentr. und Bogen 200° des Instruments | — 2 18, 95 |

Hiernach wird es nunmehr leicht, das erste Argument, oder die Apsidenpunkte nach obiger Formel $\text{Cotang } x = \frac{b}{a \sin \varphi} - \text{Cotang } \varphi$ zu berechnen; denn in dem vorliegenden Falle wird

bey einem ganzen Kreiſe iſts nicht alſo. Man würde ſeinen Gebrauch ſehr verkennen, und alle die Vortheile, die dieſes ſchöne Inſtrument darbietet ſehr ſchlecht zu benutzen wiſſen, wenn man nicht einen einmal aufgefundenen Kollimazionsfehler auf jede Beobachtung anwenden wollte. Der durch den Stern S und durch die Bögen oß und o′A′ beſtimmte Kollimazionsfehler, kann vielleicht nur für die Theilpunkte B und A ſeine Richtigkeit haben, iſt es aber eben ſo mit jedem andern Punkte des Kreiſes? Ich antworte ja; denn hat man alle die Unterſuchungen, die wir durchgegangen ſind, nach der Reihe ſehr genau vorgenommen, ſo muß überall in allen Punkten des Kreiſes derſelbe Kollimazionsfehler herauskommen. Wo aber dieſe Unterſuchungen nicht angeſtellt worden, (und hätte man ſie angeſtellt, wer kann Rechnung tragen, von Ausdehnung des Metalls, Elaſticität und Beugung deſſelben, Zuſtand der Luft u. ſ. f.) da wird man ſicherer thun, den wahren Winkel jedesmal aus einer gedoppelten Beobachtung mit umgekehrtem Inſtrumente herzuleiten, und das iſts eben, worauf ſich des Herrn Grafen Vorſchrift gründet, wenn er anführt, dieſes Verfahren bey genauen Beobachtungen nie zu unterlaſſen. Nach allen Regeln der Wahrſcheinlichkeit vertheilen ſich alsdenn die Fehler der Theilung, und jede zwey correſpondirende Punkte des Kreiſes erhalten ihre eigenen gemeinſchaftlichen Kollimazionsfehler, oder vielmehr der beobachtete Winkel erhält die ſicherſte gemeinſchaftliche Verbeſſerung. Eben ſo empfiehlt der Herr Graf die jedesmalige doppelte Ableſung des untern und obern Vernier's, bey jeder Beobachtung, um daraus das Mittel zu nehmen. Aus meinen I. und III. §. erkennet man, daß ſich durch dies Verfahren die Fehler der Excentricität und der Zeiger ganz aufheben und wahrſcheinlich auch dadurch jene der Theilung verändert werden. Aus dem Ganzen erſieht man, daß

meine

## I. Stellung.

| | | |
|---|---|---|
| Beobachteter Winkel | | 20° 0′ 0″,00 |
| Verbesser. der Excent. in O 3 20 / Erst. Argum. + 10 | I 3 0° | + 1 43, 13 |
| | | 20 1 43, 13 |
| Beständige Gleichung des ersten Arg. | | — 35, 82 |
| | | 20 1 7, 31 |
| Fehler des Zeigers | | + 1 12, 00 |
| Verbesserter wahrer Winkel | | 20 2 19, 31 |

## II. Stellung.

| | | |
|---|---|---|
| Beobachteter Winkel | | 200° 0′ 0″,00 |
| Verb. d. Excent. bey VI 3 20° / Erstes Argum. + 10 | VII 3 0° | — 1 43, 13 |
| | | 199 58 16, 87 |
| Beständige Gleichung | | — 35, 82 |
| | | 199 57 41, 05 |
| Fehler des Zeigers | | + 1 12, 00 |
| Verbesserter wahrer Winkel | | 199 58 53, 05 |

## III. Stellung.

| | | |
|---|---|---|
| Beobachteter Winkel | | 20° 0′ 0″,00 |
| Arg. wie in der I. Stellung | I 3 0° | + 1 43, 13 |
| | | 20 1 43, 13 |
| Beständige Gleichung | | — 35, 82 |
| | | 20 1 7, 31 |
| Fehler des Zeigers | | — 1 12, 00 |
| Verbesserter wahrer Winkel | | 19 59 55, 31 |

## IV. Stellung.

| | | |
|---|---|---|
| Beobachteter Winkel | | 200° 0′ 0″,00 |
| Arg. wie in d. II. Stell. | VII 3 0° | — 1 43, 13 |
| | | 199 58 16, 87 |
| Beständige Gleichung | | — 35, 82 |
| | | 199 57 41, 05 |
| Fehler des Zeigers | | — 1 12, 00 |
| Verbesserter wahrer Winkel | | 199 56 29, 05 |

in der vorhergehenden Abhandlung. 301

nicht allemal und bey jeder Beobachtung nöthig hat, den Kreis herumzudrehen. Denn beobachtet man z. B. in der Lage AB des Instruments, so ist klar, daß jeder wahre Winkel, auf dem Halbkreis mB beobachtet, immer gleich seyn wird, dem falsch geleseuen Bogen, weniger dem Kollimazionsfehler om, und auf dem Halbkreis mA wird man zu jedem darauf beobachteten und abgeleseuen Bogen denselben Kollimazionsfehler om hinzufügen müssen. Gerade das Entgegengesetzte muß statt finden, wenn die Beobachtungen mit dem umgekehrten Instrumente in der Lage B′A′ gemacht werden, wie sich sogleich aus der Ansicht der Figur ergiebt.

Man hätte den wahren Winkel der Beobachtung auch noch auf folgende Art finden können:

Es ist $oCB = mCB + oCm$

und $o'CA' = mCB - o'Cm'$

daher auch $\frac{OCB + o'CA'}{2} = mCB$. Nämlich die halbe Summe der abgeleseuen Bögen giebt den wahren Winkel der Beobachtung. Hierdurch haben wir zwar den wahren Winkel gefunden, aber ohne den Kollimazionsfehler selbst kennen zu lernen. Obige zwey Regeln sind jedoch nicht allgemein wahr, sondern sie leiden eine Ausnahme in dem einzigen Falle, wenn die beobachtete Zenithdistanz geringer als der Kollimazionsfehler selbst befunden werden sollte. Ich setze, man habe den Scheitelabstand eines Sterns $S' = mCa$ beobachtet, kleiner als der Kollimazionsfehler $oCm$, so wird bey verwendeten Instrumente dieselbe Beobachtung $= m'Ca'$ werden, die abgeleseuen Winkel werden aber seyn.

Bey

Bey der ersten Beobachtung $o C \alpha = m C \alpha + o C m$
Bey der zweyten $o' C \alpha' = o' C m' - \alpha' C m'$

So wird durch Subtraction $\frac{o C \alpha - o' C \alpha'}{2} = m C \alpha.$

Hieraus folgt eine, obiger ganz entgegengesetzte Regel, nicht die halbe Summe, sondern die halbe Differenz giebt in diesem Fall, wo die Zenithdistanz geringer als der Kollimazionsfehler ist, den wahren Winkel. Suche ich aber durch Addition den Kollimazionsfehler selbst, so erhalte ich $\frac{o C \alpha + o' C \alpha'}{2} = o C m$, dies giebt uns die zweyte umgekehrte Regel zu erkennen; nicht die halbe Differenz, sondern die halbe Summe der gelesenen Bögen giebt uns im vorliegenden Fall den Kollimazionsfehler. Alsdenn wird auch seyn $m C \alpha = o C \alpha - o C m$ und $m' C \alpha' = o' C m' - o' C \alpha'$. Doch alles dieses, wie der Herr Graf schon erinnert hat, in der Voraussetzung, daß beyde Theilungen, sowohl auf dem Bogen Am als auf jenem m B richtig und gleich genau sind; und ich setze noch hinzu: das Fernrohr ohne alle excentrische Bewegung ist, welche beyde Punkte bereits oben am gehörigen Orte sind abgehandelt worden.

Wenn ich oben erinnert habe, daß, wenn man einmal den Kollimazionsfehler gefunden hat, man alsdann nicht mehr nöthig habe, den Kreis bey jedesmaliger Beobachtung umzuwenden, sondern nur den, ein für allemal ausfindig gemachten Kollimazionsfehler, anzuwenden brauche, so muß man dieses bey Quadranten freylich nothgedrungen thun, weil der andere excedirende Bogen Am gemeiniglich nur einige wenige Grade enthält. Allein,

bey einem ganzen Kreiſe iſts nicht alſo. Man würde ſeinen Gebrauch ſehr verkennen, und alle die Vortheile, die dieſes ſchöne Inſtrument darbietet ſehr ſchlecht zu benutzen wiſſen, wenn man nicht einen einmal aufgefundenen Kollimazionsfehler auf jede Beobachtung anwenden wollte. Der durch den Stern S und durch die Bögen oß und o' A' beſtimmte Kollimazionsfehler, kann vielleicht nur für die Theilpunkte B und A ſeine Richtigkeit haben, iſt es aber eben ſo mit jedem andern Punkte des Kreiſes? Ich antworte ja; denn hat man alle die Unterſuchungen, die wir durchgegangen ſind, nach der Reihe ſehr genau vorgenommen, ſo muß überall in allen Punkten des Kreiſes derſelbe Kollimazionsfehler herauskommen. Wo aber dieſe Unterſuchungen nicht angeſtellt worden, (und hätte man ſie angeſtellt, wer kann Rechnung tragen, von Ausdehnung des Metalls, Elaſticität und Beugung deſſelben, Zuſtand der Luft u. ſ. f.) da wird man ſicherer thun, den wahren Winkel jedesmal aus einer gedoppelten Beobachtung mit umgekehrtem Inſtrumente herzuleiten, und das iſts eben, worauf ſich des Herrn Grafen Vorſchrift gründet, wenn er anführt, dieſes Verfahren bey genauen Beobachtungen nie zu unterlaſſen. Nach allen Regeln der Wahrſcheinlichkeit vertheilen ſich alsdenn die Fehler der Theilung, und jede zwey correſpondirende Punkte des Kreiſes erhalten ihre eigenen gemeinſchaftlichen Kollimazionsfehler, oder vielmehr der beobachtete Winkel erhält die ſicherſte gemeinſchaftliche Verbeſſerung. Eben ſo empfiehlt der Herr Graf die jedesmalige doppelte Ableſung des untern und obern Vernier's, bey jeder Beobachtung, um daraus das Mittel zu nehmen. Aus meinen I. und III. §. erkennet man, daß ſich durch dies Verfahren die Fehler der Excentricität und der Zeiger ganz aufheben und wahrſcheinlich auch dadurch jene der Theilung verändert werden. Aus dem Ganzen erſieht man, daß

meine

meine vier angezeigten Berichtigungen in des Herrn Grafen Vorschrift nach Möglichkeit zusammengefaſt, und zum Theil auf geometrische Wahrheiten, zum Theil auf die besten Regeln der Probabilität gegründet sind. Die genaue mechanische Ausführung mit welcher man heut zu Tage solche Werkzeuge, besonders in England, verfertiget, rechtfertigen vollends diese Vorschriften, wie dieses die Genauigkeit der mitgetheilten Beobachtungen, die der Herr Graf mit einem solchen astronomischen Kreise angestellt hat, und die wir vor uns liegen haben, zum Theil selbst beweiset; denn die noch übrigbleibenden Fehler scheinen wohl ganz, (wenigstens mit einem Werkzeuge von dieser Größe) auſſer aller Beobachtungsfähigkeit zu liegen. Sollte es sich dennoch fügen, daß alle diese günstigen Umstände bey einem, von einem minder geübten, und geschickten Künstler verfertigten Kreise nicht einträfen, so überlasse ich es Kennern zu beurtheilen, in wie fern ich durch meinen gegenwärtigen Versuch dem Wunsche, den der Herr Graf in jener Abhandlung geäußert hat, Genüge geleistet habe.

Der Bau ganzer Kreise ist öfters so verschieden, so mannigfaltig, daß es bisweilen ein ganz anderes Instrument zu seyn scheint. So ist zum Beyspiel der ganze Kreis zu Palermo, oder der achtschuhige, den die hiesige Sternwarte erwartet, ein in allen Vortheilen wesentlich verschiedenes Werkzeug von dem Caryschen Kreise, von dem in dieser Abhandlung die Rede war, von dem Ramsdenschen Geotheodoliten, von den Lenoirschen *Cercles à deux lunettes*, von den Mayer-Bordaischen Spiegelkreisen. Ersteres ist so zu sagen eine verbesserte Rota meridiana Roemeri *), es ist Mittagsfernrohr, südlicher, nördlicher Quadrant und Zenithsector zugleich; letz-



*) Petr. Horrebowi Basis astronomiae Cap. XVII. p. 157. Tab. II. Operum math-phys. Tom. III. Hauniae 1741.

tere sind, verbesserte Quadranten, Theodoliten, Hadleyſche Sextanten. Es ließen sich daher noch manche Erklärungen, manche praktische Bemerkungen darüber beybringen; denn kein astronomisches Werkzeug vereiniget alle Vortheile so sehr, erfordert aber auch eine behutsamere und geschicktere Behandlung, als eben alle diese Kreise. Ich hoffe, daß sich einandermal Gelegenheit finden soll, hievon mehr in gegenwärtigem Archive zu sagen.

## III.

## Ueber die Lehre von den entgegengesetzten Grösen; von G. S. Klügel, der Mathematik und Physik Prof. zu Halle.

1. Die Lehre von den entgegengesetzten Grösen ist in der ganzen Mathematik von Wichtigkeit, um allgemeine und viel befassende Darstellungen der Verbindungen der Grösen zu erhalten; allein, sie macht auch Ungeübten nothwendig Schwierigkeit, theils, weil sie zu einer Zusammennehmung mehrerer verschiedenen und dabey verwandten Fälle leiten soll, theils aber auch, weil sie in den Lehrbüchern zu diesem Zwecke nicht gehörig aus einander gesetzt wird. Man pflegt sie nur aus einem eingeschränkten Gesichtspunkte zu betrachten, und läst sie in ihrer weitern Ausdehnung allmählich durch den Gebrauch erlernen. Man eilt zu sehr, den Anfänger mit dieser Lehre bekannt zu machen, und kann sie daher ihm noch nicht von der rechten Seite und in ihrem ganzen Umfange zeigen.

2. Entgegengesetzte Grösen sind solche, bey welchen ausser ihrer Quantität noch eine gewisse Beziehung betrachtet wird, zufolge der bey ihnen Addition und Subtraction mit einander zu vertauschen sind, wenn sie mit andern Grösen verbunden werden. Dergleichen Beziehungen entstehen, wenn der Unterschied zweyer Grösen, a, b, sowohl ein Ueberschuß von a über b, als von b über a in einem andern Falle seyn kann, oder, wenn eine Grösse a, sowohl additiv als subtractiv mit andern verbunden werden mag; bey geometrischen Untersuchungen, durch die Lage der Punkte, Linien und Winkel. So

kann der Punkt, wo das Perpendikel auf die Grundlinie eines Dreyecks diese trifft, diesseits oder jenseits des einen Winkelpunkts an der Grundlinie fallen; die Subtangente einer krummen Linie mag auf der einen oder der andern Seite der Ordinate liegen, und die Ordinate nach entgegengesetzten Richtungen auf die Abscissenlinie stehen. Eine nördliche und südliche Declination der Gestirne sind entgegengesetzt, so auch, Höhe über dem Horizont und Tiefe darunter.

3. Man pflegt in den Lehrbüchern der Algebra und Analysis als Beyspiele entgegengesetzter Größen solche aufzuführen, die sich vermöge ihrer Beziehung gegen einander vermindern, wie Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, Wege nach zwey gerade entgegengesetzten Richtungen, Steigen und Fallen. Wenn man dergleichen Größen zusammennimmt, so werden die der einen Gattung von denen der andern abgezogen, die kleinere Anzahl von der größern, und der Rest bekommt die Benennung der größern Anzahl. Segner fängt seine Elementa Analyseos Finitorum mit der Aufgabe an: Ein Schiff ist von einer Insel zuerst ostwärts, hernach abwechselnd westwärts und ostwärts gesegelt, man soll finden, wie weit und in welche Gegend es von der Insel gekommen sey. Hieraus nimmt er Gelegenheit zu erklären, was entgegengesetzte Größen, was positive und negative sind. Ein nachdenkender Anfänger könnte hierdurch verleitet werden zu glauben, daß man auch in der Mathematik eine gelehrt scheinende Terminologie liebe. Wirklich bedeuten Positiv und Negativ hier nichts anders als Rubriken für die zusammen zu zählenden Größen. Man kann davon nicht wohl Gebrauch machen, um mehrere Fälle einer Verbindung von Größen unter einer Rechnung zu begreifen, oder den negativen Werth einer gesuchten Größe zu erklären, der nach der Voraussetzung der Rech-

Rechnung positiv seyn sollte. Man sehe deshalb bey demselben Verf. §. 185 und 199.

4. Oft dehnt man den Begriff des Entgegengesetzten zu weit aus, und begreift additive und subtractive Größen überhaupt darunter. Maclaurin sagt in seiner Algebra: „eine zu addirende Größe heißt auch eine positive, und eine zu subtrahirende wird eine negative genannt; beydes sind gleich wahre Größen, aber einander entgegengesetzte, so, daß sie bey jeder Operation, wenn sie in Absicht auf die Quantität gleich sind, sich einander aufheben.“ Inzwischen denkt man nicht immer an entgegengesetzte Größen, wo man additive und subtractive verbindet. Wenn man einen bestimmten Fall einer Verbindung von Größen behandelt, ohne andere verwandte Fälle darunter zu ziehen, so hat man es lediglich mit additiven und subtractiven zu thun. In der Mathematik der Alten, und der nach ihrer Methode behandelten neuern, kennt man die entgegengesetzten Größen gar nicht. Es ist nöthig, die Verhältnißbegriffe, positiv und negativ, von den absoluten, additiv und subtractiv, zu unterscheiden.

5. Die Vermischung dieser Begriffe hat veranlaßt, daß man in den Unterricht von den arithmetischen Speciebus, wenn sie auf eine allgemeine Art dargestellt werden, die entgegengesetzten Größen hineingebracht hat. Daher bleibt über dieser Materie einige Dunkelheit liegen. Einem Anfänger macht es Schwierigkeit, sich nicht allein eine unbestimmte Quantität, sondern auch eine unbestimmte Beziehung zu gedenken, besonders wenn die negative, ohne Verbindung mit positiven gesetzt wird. Er kann auch zu der Vorstellung verleitet werden, daß bey der Multiplication entgegengesetzter Größen, beyden Factoren eine entgegengesetzte Beziehung beygelegt werde. In diesem Verstande kann man sie so wenig mit einander mul-

tipliciren, als Thaler und Pfunde. Das will man freylich auch nicht thun. Ein Multiplicator, — m, soll nur anzeigen, daß man den Multiplicandus m mahl in einer entgegengesetzten Beziehung zu nehmen habe, so, daß m nicht eine mit dem Multiplicandus gleichartige Größe, sondern eine bloße Zahl bedeutet. Maclaurin erinnert ausdrücklich, daß der Multiplicator allemahl als eine Zahl zu betrachten sey. Am leichtesten und natürlichsten ist es aber, die arithmetischen Operationen ganz unabhängig von dem Begriffe entgegengesetzter Größen zu machen, und das Verfahren, verschiedene Fälle einer Verbindung von Größen durch Vertauschung der Vorzeichen einer oder mehrerer Größen in einer Formel zu begreifen, darauf zu gründen.

Ich glaube daher Ungeübtern nützlich zu werden, wenn ich ihnen dieses Verfahren erkläre, und den Begriff von entgegengesetzten Größen, wie er zu dieser Absicht erfordert wird, durch Beyspiele weiter aus einander setze. In Karstens mathematischen Abhandlungen (Halle 1786) ist ein ausführlicher Aufsatz über die verneinten Größen enthalten, der aber nicht dahin führt, wohin ich den Leser zu leiten gedenke.

7. Die analytische Methode unterscheidet sich von der synthetischen vornehmlich darin, daß jene in einer einzigen Formel mehrere Fälle darstellt, da die synthetische jeden Fall besonders erörtert. Dieses rührt daher, daß die Analysis den Zusammenhang der Größen durch Gleichungen ausdrückt, und die allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen nebst den Regeln für die Verbindung derselben gebraucht, um den Werth jeder Größe durch die mit ihr zusammengehörigen anzugeben, oder ihre Verhältnisse zu entwickeln. Nach der synthetischen Methode muß man bey jeder Aufgabe einen besondern Weg aufsuchen, und hat außer den schon gefundenen Sätzen keine andere al-

ge-

gemeine Formeln zum Rechnen, als die Proportionen mit ihren Abänderungen. Man muß sich also immer um Entdeckung gleicher Verhältnisse bemühen. Die synthetische Methode bedient sich zwar solcher Sätze, die eine Gleichheit aussagen, aber keiner algebraischen Gleichungen.

8. Der erste Schritt der Analysis zu einer allgemeinen Darstellung des Zusammenhanges mehrerer Größen geschieht durch die Bezeichnung derselben mit Symbolen, nämlich den Buchstaben, und durch den Gebrauch anderer Zeichen, um die Art der Zusammensetzung anzugeben. Hiebey wird bloß die Verbindung der Größen betrachtet, ohne daß eine bestimmte Zahlgröße ihnen beygelegt wird. Dieses Verfahren macht die Rechnung viel leichter und allgemeiner als dasjenige, welches die Mathematiker bis auf Vieta gebrauchten, die nur die unbekannten Größen mit Buchstaben bezeichneten, und für die gegebenen oder willkührlich veränderlichen Größen Zahlen setzten. Man muß sich wundern, wie die ältern Mathematiker mit manchen arithmetischen Aufgaben haben fertig werden können, da ihre Bezeichnungskunst so unvollkommen war*). Für Lehrlinge ist es übrigens erleichternd, wenn anfangs bloß die unbekannten Größen durch Buchstaben bezeichnet werden, die gegebenen durch bestimmte Zahlen.

9. Weiter ist es aber nöthig, alle verwandte Fälle einer Verbindung von Größen in einer Rechnung darzustellen, sowohl um die Wiederholung der Rechnung sich



*) Diophantus, der viele, zum Theil schwere, arithmetische Aufgaben aufgelöset hat, bezeichnet nur eine der unbekannten Größen mit einem Buchstaben (ς'), und ihre Potenzen mit abgekürzten Wörtern (δ^υ; κ^υ; δδ^υ); die andern unbekannten drückt er durch gegebene oder willkührliche Zahlen aus. Die Zahlgrößen von den Wörtern zu unterscheiden, setzt er das Zeichen ι^ον vor. Für die Addition hat er kein Zeichen, sondern setzt die Zahlen hinter einander; für die Subtraction bedient er sich eines umgekehrten und beschnittenen ψ aus dem Worte λειψις.

zu ersparen, und eine überlästige Menge von Sätzen zu vermeiden, als auch insbesondere, um alle Verschiedenheiten in einer Formel mit einem Blicke zu überschauen. Es sind nämlich bey jeder Verbindung, einige ganz einfache ausgenommen, immer mehrere Fälle vorhanden, die sich nur in der gegenseitigen Beziehung der Größen in Absicht auf Addition und Subtraction derselben, ihrer Producte und Quotienten unterscheiden. Alle Abänderungen einer Verbindung, worinn eine oder mehrere Größen jene Beziehung durchaus ändern, sind nicht wesentlich verschiedene Verbindungen, sondern nur verwandte Fälle einer und derselben Art von Verbindung. Es genügt, die Rechnung für einen dieser Fälle zu machen, um die Resultate auch für die andern zu gebrauchen, wenn die Vertauschung der Vorzeichen + und — gehörig vorgenommen wird *).

10. Zum Beyspiel: Zwey Körper A, B, bewegen sich auf derselben geraden Linie mit gegebenen Geschwindigkeiten: es ist gegeben, der Abstand der Zeitpunkte, in welchen sie ihre Bewegung anfangen, und der Abstand der Körper in dem frühern Zeitpunkte; daraus soll der Punkt gefunden werden, wo sie zusammentreffen. Hier ist es wesentlich dieselbe Aufgabe, die Richtungen der Bewegung mögen einerley oder entgegengesetzt seyn, und es mag A oder B sich zuerst zu bewegen anfangen. Einen der vier Fälle wählt man, um die Rechnung auf denselben anzuwenden. Für die andern drey Fälle gilt eben

*) „Unter den Kunstgriffen der Buchstabenrechnung, die unsere „Untersuchungen so verkürzen, ist insbesondere der Gebrauch der „entgegengesetzten Größen merkwürdig. Er setzt uns in den „Stand, eine Menge von Fällen unter einem einzigen Ausdrucke zu begreifen; und selbst die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Aufgaben zu beurtheilen.“ — Kästner, in der Vorrede zu Hube's Abhandlung von den Kegelschnitten. — Mein Aufsatz ist ein Commentar über diese Stelle.

eben die Rechnung, wenn man nur die Vorzeichen der Größen, die entgegengesetzte Beziehung erhalten, ändert.

Es sey die Geschwindigkeit des A = a, des B = b, nach entgegengesetzten Richtungen; ihr Abstand in dem Zeitpunkte, da A seine Bewegung anfängt, = c, die Zeit, um welche B später anfängt, = m, der von A bis zum Zusammentreffen mit B beschriebene Weg = x; der von B beschriebene = y, so ist

$$x = \frac{a(c+mb)}{a+b}; \quad y = \frac{b(c-ma)}{a+b}.$$

Es muß hier c größer als ma seyn, weil sonst A schon in dem Orte von B anlangte, ehe dieser sich zu bewegen anfinge, und hernach B sich immer mehr von A entfernte, es müßte denn die Bewegung auf einem Kreise geschehen, in welchem Falle anstatt des Bogens c die ganze Peripherie mit c zu setzen wäre.

Geht A nach derselben Richtung wie B, so sind die Geschwindigkeit a und der Weg x denjenigen in dem ersten Falle entgegengesetzt (ungeachtet sie gleichnamig mit denen von B sind), und es ist, um die Werthe von x und y aus denen in dem ersten Falle herzuleiten, nichts anders erforderlich, als die Zeichen von a und x zu ändern. Dadurch wird

$$-x = \frac{-a(c+mb)}{-a+b}, \text{ oder, weil } \frac{-x}{-a} = \frac{x}{a} \text{ ist, indem}$$

bey Vergleichung zweyer Größen von einerley Beziehung, $-a, -x$, bloß die absolute Quantität in Betracht kommt, $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$ und $y = \frac{b(c+ma)}{b-a}$.

Fängt B in jedem dieser beyden Fälle früher als A seine Bewegung an, so wird nur das Zeichen von m, das ist von mb und ma, geändert.

11. In derjenigen Verbindung von Größen, die zum Grunde für alle übrigen verwandten Verbindungen gelegt wird, müssen alle Größen als positiv betrachtet werden, das heißt, ihre Symbole bezeichnen bloß die Quantität, und die Addition und Subtraction wird durch die Vorzeichen + und — angedeutet, so, daß + eine wirkliche Vergrößerung, und — eine wirkliche Verminderung anzeigt. Es kann hier keine negative Größe durch die Subtraction des Größern von dem Kleinern entstehen, weil der Fall in Absicht desjenigen, was addirt und subtrahirt wird, und was eine Summe oder Differenz ist, ganz bestimmt seyn soll. Man hat hier bloß additive und subtractive Größen, nicht positive und negative. Es verhält sich hier gerade so, wie in der Geometrie der Alten und der ihnen nachahmenden Engländer, nach welcher in keinem Satze negative Größen vorkommen, weil in jedem Falle bestimmt ist, was eine Summe oder was ein Unterschied ist, und bey einem Unterschiede nie das Ganze von dem Theile abzuziehen gefordert werden kann.

12. Diejenigen Größen, welche in einer mit dem zum Grunde der Rechnung gelegten Falle verwandten Verbindung ihre Beziehung ändern, sind negativ, nicht in Rücksicht auf die mit ihnen verbundenen Größen, sondern in Rücksicht auf die ihnen gleichnamigen in jenem ersten Falle, so wie auch diese bloß in Rücksicht auf die, welche in einem verwandten Falle ihre Beziehung ändern, positive heißen müssen.

13. Eine Aenderung der Beziehung zieht eine durchgängige Vertauschung der Vorzeichen + und — nach sich. Daher bekommen die ungeraden Potenzen einer negativen Größe das entgegengesetzte Vorzeichen desjenigen, welches dieselben Potenzen der positiven haben, die geraden Potenzen aber behalten dasselbe Vorzeichen mit den Potenzen der positiven. Eine ungerade Anzahl negativer

Facto-

Factoren verändert das Zeichen in Rücksicht auf die gleichnamigen positiven, eine gerade Anzahl aber nicht. Wenn ein Dividendus oder ein Divisor negativ wird, so wird es auch der Quotient; werden jene beyde negativ, so bleibt der Quotient positiv. Dieses alles muß aus den Regeln der arithmetischen Operationen hergeleitet werden, die ich als unabhängig von den entgegengesetzten Größen annehme.

14. Wenn der Werth einer Größe, die man in dem zum Grunde gelegten Falle aus den übrigen hergeleitet hat, negativ wird, so zeigt dieses an, daß sie in einer entgegengesetzten Beziehung in Rücksicht auf die ihr gleichnamige in jenem Falle zu nehmen ist. Weil es hier auf die Größen ankömmt, woraus die unbekannte gefunden wird, so kann man nicht immer vorher wissen, wie der Fall, den man unter Händen hat, beschaffen sey. Dieses ergiebt die Rechnung durch das Vorzeichen des gefundenen Werthes. Ist dieses —, es sey nun wegen eines Factors oder wegen eines negativen Unterschiedes, so ist die Größe in einer entgegengesetzten Beziehung zu nehmen, als sie in der ursprünglichen Rechnung genommen ist.

15. Sobald man wegen der Uebertragung der Rechnung von einem Falle auf einen andern die geringste Dunkelheit findet, so muß man sie für diesen besonders anstellen, um die Uebertragung zu rechtfertigen. Die Evidenz muß durch die Allgemeinheit der Rechnung durchaus nicht leiden. Man muß deutlich einsehen, wie durch eine entgegengesetzte Beziehung die Vorzeichen in den Bedingungen und anfänglichen Gleichungen geändert werden, woraus es dann sich leicht ergiebt, daß die Veränderungen der Vorzeichen durch die ganze Rechnung bis zu den Resultaten fortgehen müssen. Ungeübte thun sehr wohl, die Rechnung für einen und den andern verwandten Fall zu machen, um den Parallelismus der Rechnung mit derjenigen,

jenigen, die man für den zum Grunde gelegten Fall gemacht hat, recht deutlich einzusehen.

16. Die analytische Dioptrik bietet die meisten und lehrreichsten Beyspiele der Uebertragung der Rechnung von einem Falle auf andere verwandte dar, da hier eine große Menge von Verbindungen gleichnamiger Größen Statt hat, und die zweckmäßigste meistens gesucht werden muß. Schon bey einem einzelnen Linsenglase sind manche Abänderungen möglich, nach der Beschaffenheit der brechenden Flächen, der Lage des Punktes, von welchem die Strahlen auf das Glas fallen, oder nach welchen sie vor der Brechung hinzielen, und der Lage des Vereinigungspunktes der gebrochenen Strahlen. Man lege für alle Fälle denjenigen zum Grunde, in welchem die brechenden Flächen convex sind, der leuchtende Punkt vor dem Glase und der Vereinigungspunkt hinter demselben liegt, so sind die Halbmesser und die Abstände der beyden Punkte, des leuchtenden und des Vereinigungspunktes, als positiv zu betrachten, in Rücksicht auf jeden andern Fall, obgleich die Halbmesser sowohl als die Abstände unter sich eine entgegengesetzte Lage haben. Bey einem Meniskus ist der ein Halbmesser negativ, bey einem Biconcavglase sind es beyde. Wenn die Strahlen divergent ausfahren, so ist die Vereinigungsweite negativ.

Sind mehrere Gläser vorhanden, so ist es für die Rechnung am bequemsten anzunehmen, daß der Vereinigungspunkt der Strahlen durch jedes Glas hinter demselben und vor dem nächsten liege, weil auf diese Art die Formel für die Vereinigungsweiten vor und hinter jedem Glase eben die ist, die für ein einzelnes Glas zum Grunde gelegt ward. Aus der Rechnung für diesen Fall kann man durch die Bestimmung, was in jedem andern Falle entgegengesetzt seyn soll, die Rechnung für denselben leicht machen. Die Abstände eines Vereinigungspunktes von den

den nächſten Gläſern ſind zwar der Lage nach entgegengeſetzt, aber dennoch poſitiv. Wenn ſie nach einerley Richtung von den Gläſern aus genommen werden, ſo iſt einer derſelben negativ.

Euler bezeichnet in der Dioptrica T. II. §. 265. u. a. den Quotienten der gedachten Abſtände durch negative Größen, als $-P$; $-Q$ etc. Ein ſolcher Quotient muß aber im Allgemeinen durch $+P$; $+Q$; etc, oder vielmehr ſchlechtweg durch P; Q; etc, bezeichnet werden, weil in demjenigen Falle, auf welchen die Rechnung angelegt wird, die Abſtände als poſitiv betrachtet werden. Sonſt entſteht die Unbequemlichkeit, daß, wenn die Abſtände die Lage haben, wie in dem zum Grunde gelegten Falle, oder wenn ſie poſitiv ſind, ihr Quotient durch eine doppelte Negation poſitiv zu machen iſt. Wird aber einer der Abſtände eines Vereinigungspunktes von den beyden nächſten Gläſern negativ, ſo bezeichne man den Quotienten durch $-P$, oder $-Q$; etc, und laſſe P, Q, etc, eine abſolute Zahl bedeuten. So bin ich in meiner analytiſchen Dioptrik verfahren, §. 341; 366; 421; 477; 483, u. m.

(Die Fortſetzung folgt im nächſten Hefte.)

## IV.

## Mehrere große Mathematiker ſind der Erfindung der combinatoriſchen Involutionen ganz nahe geweſen; von dem Herausgeber.

Man kann die Erſcheinungen, die ſich hier in Form von erläuternden Beyſpielen zeigen werden, als eben ſo viele Belege zu dem Erfahrungsſatze anſehen, daß man Entdeckungen ganz nahe ſeyn, ſogar zu wiederholtenmalen

len auf ſie treffen könne, ohne auch nur im geringſten etwas davon zu ahnden. Die figürlichen involutoriſchen Anordnungen (S. 13 u. f.) welche die nächſte Veranlaſſung zu Erfindung der Combinatoriſchen Analyſis gegeben haben (S. 21, 22; 251, 252) deren Werth man nun ſchon aus unzähligen Anwendungen kennt, ſind gerade in dem Falle geweſen. Um das recht anſchaulich darzuthun, und von einer Seite zu zeigen, von welcher nun die Leſer ſchon hinlänglich vorbereitet ſind, will ich, da in den vorhergehenden beyden Heften des Archivs, mehrere involutoriſche Darſtellungen für die Werthbeſtimmung der continuirlichen Brüche (S. 47-68; 154-195) umſtändlich ſind auseinandergeſetzt worden, auch hier zuerſt die Behandlung ſolcher Brüche von andern Analyſten, mit jenen Anordnungen vergleichen, und hier die Buchſtaben der gegebenen Reihen ſelbſt, wie dort die Zahlen, die ihre Stelle vertreten, gebrauchen.

## I. L. Eulers Verfahren für die Werthbeſtimmung der continuirlichen Brüche.

*(Introd. in Anal. Infin. T. I. C. XVIII.)*

1. Die ſucceſſiven Werthe der Brüche

$$\frac{a+1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\text{etc}}}} \quad \text{oder} \quad \frac{a+\frac{\alpha}{b+\frac{\beta}{c+\frac{\gamma}{d+\text{etc}}}}}$$

nach der Reihe zu finden, werden folgende Anordnungen beygebracht:

A. Für die Werthe des erſten Bruchs (a. a. O. §. 359)

$$\frac{a}{1};\ \frac{ab+1}{b};\ \frac{abc+a+c}{bc+1};\ \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d};\ \text{etc}$$

B. Für die Werthe des zweyten Bruchs
(a. a. O. §. 360)

$$\frac{\begin{matrix}a & b & c & d & e & \text{etc}\\ 1 & a & ab+\alpha & abc+\beta a+\alpha c & abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma & \text{etc}\\ 0 & 1 & b & bc+\beta & bcd+\beta d+\gamma b & \text{etc}\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \text{etc}\end{matrix}}{}$$

2. Man schreibt nämlich die einzelnen Buchstaben a, b, c, d, e ... und α, β, γ, δ, ε ... wie hier in A und B, und setzt $\frac{1}{0}$ unter a, und $\frac{a}{1}$ unter b. Aus diesen beyden Anfängen, als ersten Werthen, leitet man den dritten und alle übrigen Werthe folgendergestalt her:

a) Den Zähler jedes folgenden Bruches in A zu finden „multiplicirt man den Zähler des unmittelbar „vorhergehenden Bruchs in den darüber stehenden Buch„staben, und addirt zu diesem Producte den Zähler des „vorletzten Bruchs. Dasselbe Verfahren auf die Nenner „der beyden unmittelbar vorhergehenden Brüche angewen„det, giebt den zugehörigen Nenner des gesuchten fol„genden Bruchs.

b) Den Zähler jedes folgenden Bruchs in B zu finden „multiplicirt man den Zähler des unmittelbar vor„hergehenden Bruchs in den darüber stehenden, den Zäh„ler aber des vorletzten Bruchs in den darunter stehenden „Buchstaben, und addirt beyde Producte. Dasselbe Ver„fahren auf die Nenner des letzten und vorletzten Bruches „angewendet, giebt den zugehörigen Nenner des gesuch„ten folgenden Bruchs.“

3. In den Anordnungen A, B (1) ist $\frac{1}{0}$ dem $\frac{a}{1}$ vorgesetzt worden, (obschon $\frac{1}{0}$ eigentlich nicht mit unter die Werthe des continuirlichen Bruches gehört) blos um jene

Regeln (2) gleich vom Anfange an anwenden zu können. Auch erhellet, daß, wenn man $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=1$ (in B, 1) ſetzt, dann A aus B, und eben ſo auch die Regel für A (2) aus der für B fließt.

4. Das Geſetz, ſagt Euler (§. 359) nach welchem Zähler und Nenner in den einzelnen Werthen der continuirlichen Brüche aus den Buchſtaben a, b, c... α, β, γ... ſich zuſammenſetzen, ſey nicht leicht durchzuſehen. Die Vorſchriften (in 2) ſind alſo nur ein Surrogat für ein ſolches Geſetz. Sie ſind, wie man ſieht, äußerſt leicht zu befolgen, führen aber in Weitläuftigkeit, wenn man nur einzelne Werthe braucht, und dieſe zu finden, gleichwohl alle vorhergehende mit ſuchen und jeden einzeln und beſonders abſetzen muß.

5. Das vermeidet man, wenn man die Euleriſchen figürlichen Anordnungen (1) zugleich involutoriſch macht, oder ſie in einer combinatoriſchen Involution ausführt. Man darf nämlich nur die gegebenen Vorſchriften (2) nach meiner Art die Glieder involutoriſch untereinander zu ſchreiben (S. 33-36) anwenden; und ſo kommen z. B. für B (1) aus den beyden Anfangswerthen $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+\alpha}{b}$, die Involutionen

für den Zähler

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e |
| α | | c | d | e |
| a | β | | d | e |
| a | b | γ | | e |
| | α | γ | | e |
| a | b | c | δ | |
| | α | c | δ | |
| | α | β | δ | |

u. f. w.

und für den Nenner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| b | c | d | e | u. |
| β | | d | e | |
| b | γ | | e | f. |
| b | c | δ | | |
| | β | δ | | |

u. f. w.

Eben

Eben ſo leicht laſſen ſich die Involutionen der Zähler und Nenner für A (1) angeben, oder aus den für B (1) hier dargeſtellten, ſogleich (nach 3) ableiten.

Bey der involutoriſchen Ausführung werden (was Euler in A und B [1] nicht befolgt) die Buchſtaben, mit denen man die Complexionen der vorhergehenden Werthe multiplicirt (2) immer ans Ende geſetzt, auch die Complexionen von gleichen Endbuchſtaben beyſammen gelaſſen (S. 36, A, B). Aus dieſen (gleichen) Endbuchſtaben ſieht man auch ſogleich, welche Winkel oder Complexionen, für Zähler und Nenner, zuſammengehören.

6. Die Vorſchriften (2) laſſen ſich auch in ſolchen Formeln darſtellen, wie ich (S. 43, 53, 63) gegeben habe; und die (S. 54, VII) wörtlich ausgedruckte Regel, iſt mit der Euleriſchen, nur anders vorgetragenen, Vorſchrift (2) für B, vollkommen übereinſtimmend *). Nicht alſo der Inhalt, ſondern blos die Anwendung, beyderley Formeln und Regeln ſind hier verſchieden; und dieſe ſo leichte Umſtaltung, dieſe blos abgeänderte Lage, wie wichtig iſt ſie gleichwohl nicht an ſich und in ihren Folgen! Denn

a) Sie hebt die Weitläuftigkeit auf, in welche die Anordnungen A, B (1) dadurch führen, daß man bey jedem geſuchten Werthe zugleich alle vorhergehende einzeln mit abſetzen muß (4). Man braucht hier gerade nur ſo viel, nicht mehrere, Complexionen zu ſchreiben, als in dem geſuchten Werthe wirklich vorkommen.



*) Daß dort bey mir der continuirliche Bruch $\frac{a}{a+\text{etc}}$, hier aber bey Eulern $a+\frac{\alpha}{b+\text{etc}}$ (1) zum Grunde liegt, hat blos auf die Anfangsglieder, nicht aber auf die Regel ſelbſt, Einfluß, nach welcher die folgenden Werthe aus den vorhergehenden geſchaft werden. Die Regel (54, VII) iſt in beyden Fällen dieſelbe, und gilt eben ſowohl für die Darſtellungen (S. 55, oben) als für die (S. 185, III).

b) Sie entdeckt sogleich das tief verborgen geachtete Gesetz (4) nach welchem sich jeder einzelne Werth aus den Buchstaben a, b, c... $\alpha, \beta, \gamma$... zusammensetzen läßt; sie zeigt, wie das Gesetz schon in den Vorschriften (2) liegt, und nur durch die Art, wie solche (nach 2 in 1) ist angewendet worden, verdunkelt wird.

c) Sie zeigt, wie man bey solchen Darstellungen (für Zähler oder Nenner wie in 5) zwar von vorhergehenden Werthen auf folgende, und in so fern dependent von jenen auf diese, fortgeht; aber die ganz eigene Art von Zusammensetzung, nach welcher man vorhergehende und folgende Werthe in und um einander schreibt, lehrt auch, daß diese Dependenz mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig sey, weil man hier für jeden verlangten Werth, blos das für ihn unumgänglich Nöthige thut (a) und nichts schreibt, was nur etwa als Vorbereitung dienlich wäre, nicht aber selbst zu der Sache, die man sucht, gehörte. In dieser Rücksicht (wie ich auch durchgängig gethan habe) kann man diese und andere ähnliche Darstellungen, als ganz independente betrachten und ansehen. Man kann nämlich für jeden außer der Ordnung verlangten Werth, die Involution, ohne alle vorgängige Vorbereitung, sogleich einleiten, und selbige auf einem, eben so leicht als geschwind zum Ziele führenden, Wege vollenden.

d) Sie ist das einzige Mittel, wodurch man im Stande ist, gegebene (nach ihr ausgedrückte) Glieder, Coefficienten oder Werthe, sogleich, und mit dem geringsten Aufwande an Zeit und Nachdenken, für höhere folgende zu bearbeiten, so wie alle niedrigere vorhergehende, wie sie zugleich in den gegebenen mit enthalten sind, nachzuweisen, und durch einzuschreibende Winkel gleichsam auszuschneiden (S. 37, c).

e) Die

e) Die Involutionen für ſolche Zähler und Nenner (5) laſſen ſich 1) jede für ſich, folglich **ganz unabhängig von einander**, nach einem und demſelben Geſetze, nur auf verſchiedene **Anfänge** $\frac{a}{\alpha}^{b}$ und b angewendet (5) ausführen; man kann aber auch 2) **einen aus dem andern**, durch bloße Vertauſchung der Buchſtaben a, b, c, d ... $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... gegen b, c, d, e ... $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ... reſpective, und umgekehrt, ableiten (S. 42 unten).

f) Dieſe **allgemeine Darſtellung** durch Involution führet endlich auf die für die Anwendung ſo beträchtliche Abkürzung durch **Factoren** (S. 57, X; S. 58, 59, XI; S. 64, 65 Expl.) welche aus der Involution (S. 35) und ihrer weitern Zerlegung (S. 41-45) eben ſo leicht ſich ergeben, als es unmöglich ſcheint, ohne Kenntniß von dergleichen **figürlichen Anordnungen**, auf ſie zu verfallen.

7. **Andere Geſetze**, als das aus den **Euleriſchen** Vorſchriften (2) für Zähler und Nenner hier (5) abgeleitete, zeigen die übrigen Auflöſungen nach meinen Formeln (S. 157) namentlich das dortige Exempel I, mit den Anmerkungen (S. 159, 160) verglichen. Setzt man noch die figürlichen Anordnungen (S. 161-182) hinzu, welche folgende Werthe der Brüche (nicht in dem Sinne von 6, c ſondern in der vollen Bedeutung des Worts) **unabhängig von vorhergehenden Werthen**, ſchaffen: ſo ergiebt ſich hier, wo ſelbſt ein **Euler** Schwierigkeiten fand, und ſolche in der Folge durch einen **eigends dafür eingerichteten Algorithmen** (unten 25) zu heben ſuchte, eine überaus große Mannichfaltigkeit darſtellender Geſetze für die Werthe ſolcher Brüche, die theils in der Ordnung, wie ihre Complexionen auf einander folgen, theils in der Lage ihrer Factoren, von einander verſchieden ſind. — **Eine natürliche Folge der großen Ergiebigkeit des eröfneten combinatoriſchen Quells!**

## II. Lamberts Verfahren bey dergleichen Brüchen.

(Beytr. zum Gebr. der Math. 2. Th. 1. Abſchn. III. Abh.)

8. Für einen continuirlichen Bruch,

wie $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc}}}}}$ wird folgende Figur

| B | 1 C | 0 D |
|---|---|---|
| a | 0 | 1 |
| b | 1 | a |
| c | b | ab+1 |
| d | bc+1 | abc+c+a |
| . | . . | . . |

gemacht, in welche die einzelnen Nenner a, b, c, d... des gegebenen Bruchs in die Colonne B, die Zahlen 1, 0 in C, und 0, 1 in D, im voraus eingeſchrieben, die übrigen Glieder aber der Colonnen C und D (der Zähler und Nenner der ſucceſſiven Werthe des continuirlichen Bruchs) gefunden werden, indem man nach und nach „jeden Buchſtaben der Colonne B in das nebenſtehende Glied von C, D „multiplicirt, zu dem Producte das gleich überſtehende „Glied addirt, z. B.

$$b.1+0=b \text{ und } b.a+1=ab+1$$

„und die ſo gefundenen Summen (b und ab+1) neben „0 unter C und D ſchreibt, u. ſ. w.“ Das giebt die Werthe nach der Ordnung (Lamb. a. a. O. §. 15)

$$\frac{1}{0};\ \frac{a}{1};\ \frac{1}{a};\ \frac{b}{ab+1};\ \frac{bc+1}{abc+c+a};\ \text{etc}$$

9. Die Regel (8) für die Glieder in C, D iſt mit der Euleriſchen Vorſchrift (2) für A (1) vollkommen übereinſtimmend, nur daß hier die Buchſtaben a, b, c... den Complexionen zur Seite, dort über ſie geſchrieben werden; auch iſt hier 0, 1 in D ſtatt des dortigen a, 1, wegen der Verſchiedenheit der Brüche (in 1 und 8) eingeſchrie-

schrieben, daher auch beyderley Werthe nicht mit einander übereinkommen.

10. Die Lambertische Figur (8) hat vor der Eulerischen Anordnung (1) den Vorzug, daß bey jener alle gleichnamigen Größen (Zähler oder Nenner der verschiedenen Werthe) untereinander, alle zusammengehörigen Größen aber (Zähler und Nenner für einerley Werthe) nebeneinander stehen. Auf diesem Wege der unmittelbaren Vergleichung lassen sich entstehende Gesetze leichter wahrnehmen, und ihr beharrliches Ausdauern hinterher erweisen. Hätte Lambert, so wie er der Reihen C, D einzelne Glieder unter einander schrieb, auch dieser Glieder einzelne, auf gleiche Endfactoren sich beziehende, Theile untereinander gesetzt, so hätte er, bey Fortsetzung der Reihen C, D nur um ein Paar Glieder weiter, als in der obigen Figur (8), die Involutionen

der Zähler C

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| b | c | d | e | f |
| 1 | d | e | f | |
| | b | e | f | |
| | b | c | f | |
| | | 1 | f | |
| | b | c | d | |
| | | | d | |
| | | | b | |

u. f. w.

und

der Nenner D.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e |
| 1 | c | d | e | |
| | a | d | e | |
| | a | b | e | |
| | | 1 | e | |
| | a | b | c | |
| | | | c | |
| | | | a | |

u. f. w.

nicht leicht verfehlen können.

Hier lassen sich C, D, jede für sich, aber auch abhängig von einander, durch bloße Verwechselung der Buchstaben b, c, d ... mit a, b, c ...; respective, und umgekehrt (wie in 6, d) ableiten. Die Involution C ist hier, weil es der Raum verstattete, bis auf f, aber D nur bis auf e dargestellt.

11. Eigentlich ſollten in der Colonne B der Lambertiſchen Figur (8) nicht blos

die einzelnen Nenner $a\ b\ c\ d \ldots$

ſondern die Quotienten $\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}\ \frac{1}{d} \ldots$

ſtehen. Ich erinnere das hier, weil ich ſogleich in folgendem, wo die einzelnen Zähler nicht (wie in 8) alle $= 1$, ſondern nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ ſind, die Brüche $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c} \ldots$ ſtatt $a, b, c \ldots$ in B ſetzen werde.

12. Am deutlichſten zeigt ſich ein ſolches Geſetz bey dem allgemeinſten Bruche $A + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{b + \text{etc}}}$

in nachſtehender Figur, in welcher C, D, wie vorher (8) die Reihen der Zähler und Nenner der ſucceſſiven Werthe darſtellen

| B | I C | o D |
|---|---|---|
| $\frac{\alpha}{a}$ | $A$ | $1$ |
| $\frac{\beta}{b}$ | $Aa + \alpha = \binom{Aa}{\alpha}$ | $a$ |
| $\frac{\gamma}{g}$ | $\binom{Aa}{\alpha} \cdot b + A\beta$ | $a.b + \beta$ |
| $\frac{\delta}{d}$ | $\binom{Aa}{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} b & c \\ \gamma & \end{bmatrix} + A\beta . c$ | $a. \begin{bmatrix} b & c \\ \gamma & \end{bmatrix} + \beta . c$ |
| $\frac{\varepsilon}{e}$ | $\binom{Aa}{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} b & c & d \\ \gamma & \delta & \\ b & \delta & \end{bmatrix} + A\beta . \begin{bmatrix} c & d \\ \delta & \end{bmatrix}$ | $a. \begin{bmatrix} b & c & d \\ \gamma & d & \\ b & \delta & \end{bmatrix} + \beta . \begin{bmatrix} c & d \\ \delta & \end{bmatrix}$ |
| $\frac{\phi}{f}$ | $\binom{Aa}{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} b & c & d & e \\ \gamma & d & e & \\ b & \delta & e & \\ b & c & \varepsilon & \\ & \gamma & \varepsilon & \end{bmatrix} + A\beta . \begin{bmatrix} c & d & e \\ \delta & e & \\ c & \varepsilon & \end{bmatrix}$ | $a. \begin{bmatrix} b & c & d & e \\ \gamma & d & e & \\ b & \delta & e & \\ b & c & \varepsilon & \\ & \gamma & \varepsilon & \end{bmatrix} + \beta . \begin{bmatrix} c & d & e \\ \delta & e & \\ c & \varepsilon & \end{bmatrix}$ |
| etc | etc etc | etc etc |

Es werden nämlich hier die Quotienten $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c} \ldots$, nach der Ordnung unter B, die Zahlen 1, A in C, und 0, 1 in D, im voraus eingeschrieben; für die übrigen Glieder in C und D „multiplicirt man das letztgefundene „Glied (in C oder D) in den Nenner des daneben stehen„den Quotienten unter B, addirt dazu das Product aus „dem vorletzten Gliede (von C oder D) in den Zähler „desselben Quotienten, und setzt die Summe der so (für „C oder D) gefundenen Producte neben den folgenden „Quotienten unter C oder D."

13. Das Lambertische Verfahren ist also auch hier mit der Eulerischen Vorschrift (2) für B (1) vollkommen übereinstimmend. Zählte man der Colonnen C, D erste, neben $\frac{\alpha}{a}$ stehende Zahlen, als erste Glieder dieser Colonnen, wo also $C]1 = A$; $C]2 = Aa + \alpha$; ... $D]1 = 1$; $D]2 = a$; ... folglich, $C]0 = 1$, und $D]0 = 0$ wären, so kämen für die Regel (in 12) folgende Lokalausdrücke:

$$C]n = \overset{n-2}{a}.C](n-1) + \overset{n-2}{\alpha}.C](n-2)$$

$$D]n = \overset{n-2}{a}.D](n-1) + \overset{n-2}{\alpha}.D](n-2)$$

wo $\overset{n-2}{a}$ und $\overset{n-2}{\alpha}$, vermöge des Distanzexponentens $n-2$, die einzelnen Buchstaben a, b, c ... und $\overset{n-2}{\alpha}, \beta, \gamma \ldots$ darstellen. Für Brüche (wie 8), müßte $\overset{n-2}{\alpha} = 1$ in vorstehende beyde Formeln für die dortige Regel gesetzt werden.

14. Ich habe bey Formirung der Glieder für C, D (in 12), die Buchstaben gleich so neben und unter einander gesetzt, wie sie eine combinatorische Involution zusammen geben; auch habe ich die Factoren, die hierbey von selbst in die Augen fallen, zugleich mit abgesondert, und so alles auf den allgemeinen Ausdruck (S. 159, III)

$$Zun = \frac{(0.2+1)\,{}^{[4]}S + 0.3\,{}^{[6]}S}{2\,{}^{[4]}S + 3\,{}^{[6]}S}$$

$$\begin{pmatrix} A; & \alpha, & a, & \beta, & b, & \gamma, & c, & \delta, & d \ldots \\ 0; & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots \end{pmatrix}$$

reducirt, für welchen ${}^{[4]}S$, ${}^{[6]}S$ sich noch weiter in Factoren zerlegen lassen (S. 43, 44).

15. Da Lambert die allgemeine Form (12) nicht in Betrachtung gezogen hat, so muß man es an seinen Ort gestellt seyn lassen, ob ihn deren Behandlung nach seiner Figur, auf Involutionen geführt haben würde. Freylich läßt sich von Lamberts tief eindringendem Geiste, von seinem vorzüglichen Talente für Constructionen und bildliche Darstellungen, von seiner innigen Bekanntschaft mit Combinationen und ihres wichtigen Gebrauchs, die er so häufig bey seinen mathematischen und philosophischen Untersuchungen anwendete, selbst bey einer Zeichenkunst in der Vernunftlehre, für einen Calcul der Qualitäten, zu benutzen suchte — von einem solche Manne, sage ich, ließe sich allerdings viel erwarten. Indessen scheint es fast gewiß zu seyn, man müsse combinatorische Involutionen schon vorher, wenigstens aus Beyspielen, wie sie etwa der Zufall herbeyführen kann, kennen, ehe man auf den Einfall geräth, die Buchstaben der einzelnen Complexionen, so wie die Complexionen selbst, so neben und unter einander zu stellen, als für eine solche Absicht nöthig ist. Ich kann hier meine eigene, bey den Zahlensystemen in und um einander, und bey den Discerptionen zu bestimmten Summen, gemachten Erfahrungen (S. 21; 243, 244; 251) anführen, bey denen ich combinatorische Involutionen zuerst wahrgenommen hatte, und dann erst solche und ähnliche Anordnungen überall aufsuchte. Diese Behauptung wird durch das Folgende noch mehr bestätiget.

## III. Dan. Bernoulli's Verfahren bey dergleichen Brüchen.

(*Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. T.* XX. p. 24-27; 31. 34; 38-43)

16. Bernoulli iſt den combinatoriſchen Involutionen ſchon ungleich näher gekommen. Er legt (a. a. O. §. 2) den Bruch

$$\cfrac{a}{\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\text{etc}}}}$$

zum Grunde, nennt deſſelben Glieder $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$, u. ſ. w. Indices, und ſtellt die 5 erſten reducirten Werthe des Bruchs, bis auf und mit den Index $\frac{e}{\varepsilon}$, dar.

17. Die weitere Entwickelung für ſpätere Werthe (erinnert B. §. 3) führe in Weitläuftigkeit. Inzwiſchen ſey er recht paſſend (peropportune) auf eine Abkürzung verfallen, wodurch die Arbeit, (gegen die gewöhnlichen Reductionen *) verglichen) beträchtlich erleichtert werde, ſo, daß jeder neue Werth ſehr geſchwind (currente veluti calamo) dargeſtellt werden könne, wie auch übrigens die Indices $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$ u. ſ. w. beſchaffen ſeyn mögen.

18. Wären nämlich $\frac{M}{N}$ und $\frac{P}{Q}$ zwey auf einander folgende Werthe eines continuirlichen Bruchs, und $\frac{f}{\Phi}$ der

*) Eine der natürlichſten iſt wohl die (S. 51, 52; 174) befindliche und vom Abt Friſi (Opp. T. I. p. 38, 39) ſchon gebrauchte. Meine daraus abgeleitete Involution enthält zugleich das Bernoullïſche Geſetz, mit noch andern Vortheilen vereinbart.

der Index des nächstfolgenden Werthes $\frac{R}{S}$, so sey alsdann $\frac{R}{S} = \frac{P\varphi + Mf}{Q\varphi + Nf}$. Man dürfe also nur „„den Zähler „„des letzten Werthes in den Nenner des neuen Zeigers, „„und den Zähler des vorletzten Werthes in den Zähler „„desselben Zeigers multipliciren; die Summe beyder „„Producte gebe des neuen Werthes Zähler $R = P\varphi$ „„$+ Mf$. Dasselbe Verfahren auch auf die Nenner „„Q und N angewendet, gebe des neuen Werthes „„Nenner $S = Q\varphi + Nf$, und beyder Verbindung zu „„einem Bruche den gesuchten Werth für $\frac{R}{S}$.“ Diesen neuen Werth sogleich (currente veluti calamo) zu finden, dürfe man also nur, indem man die zusammengehörigen Glieder aus den beyden vorhergehenden Werthen, für den neuen Werth, abschreibt, ihnen die Buchstaben $\varphi$ und f, wie eben beschrieben worden, beyfügen.

19. Ebendaselbst nennt V. diese gefundene Abkürzung *praestantissimum compendium*, und bemerkt, sie liege so offenbar vor Augen, daß er sich schwerlich überreden könne, sie sey noch von Niemanden vor ihm wahrgenommen worden. Bey Zahlenexempeln, wo jeder Bruch nur aus einem Zähler und Nenner bestehe, könne man so ganz leicht, durch gehörige Multiplication der Zahlen $\varphi$ und f, einen Werth nach dem andern finden.

20. Noch wird daf. (§. 2; 10. 12) erinnert, wie nöthig es sey, ganz allgemein ausgedrückte Indices $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$ u. s. w. anzunehmen, da man gewöhnlich die Zähler a, b, c... = 1 setze. Diese beschränkte Annahme könne sogar zu Fehlern verleiten, vornehmlich dann, wenn in den Indicibus positive und negative Größen unter einander

ander vorkommen. Von dem Falle, wenn eine dieſer Größen = o (dort §. 6, 7) und hier (S. 157, 158).

21. Die Bernoulliſche Regel (18) iſt die Euleriſche Vorſchrift (2) für B (1) nur ſymboliſch ausgedrückt; dergleichen Ausdrücke mehrere (hier S. 53 u. a. O.) vorkommen. Bernoulli's Vermuthung (19) war alſo nicht ungegründet. Indeſſen iſt doch der Gebrauch, den dieſer von ſeiner Formel macht, daß er die Buchſtaben des neuen Zeigers immer ans Ende der Complexionen der beyden vorhergehenden Werthe ſchreibt, vorzüglich, denn dadurch kommt jede Complexion, obſchon B. nicht daran gedacht hat, gut geordnet, auch folgen die Complexionen in eben der Ordnung, wie bey mir (S. 55), auf einander; welches bey der Euleriſchen Darſtellung B (1) ſich ganz anders verhält.

22. In den von B. (§. 2, 3) aufgeführten ſechs erſten Werthen des Bruchs (16) ſind die Complexionen der Zähler, und ſo auch der Nenner, in horizontalen Reihen, wie gewöhnlich, neben einander geſtellt. Wäre nun dieſer große Meßkünſtler auf den Einfall gerathen — ein bloßer Zufall, ein ſchmales Blatt Papier, das die Complexionen nicht neben einander faſſen konnte, hätte das veranlaſſen können — die Complexionen, auch nur eines einzigen Werthes, z. B. des 5ten, in ihrer Ordnung nicht neben, ſondern unter einander zu ſchreiben; ſo hätten ſich ihm, da die einzelnen Complexionen bereits gut geordnet (21) waren, die Involutionen

für

für Zähler

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | β | γ | δ | ε |
| | a | c | δ | ε |
| | a | β | d | ε |
| | a | β | γ | e |
| | | a | c | e |

u. f. w.

und für Nenner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ε |
| | b | γ | δ | ε |
| | α | c | δ | ε |
| | α | β | d | ε |
| | | b | d | ε |
| | α | β | γ | e |
| | | b | γ | e |
| | | α | c | e |

u. f. w.

des 5ten und aller vorhergehenden, und ſo auch das Fortgangsgeſetz für die folgenden Werthe auf einmal vor Augen geſtellt, und er würde ſie und ihre Wichtigkeit, auch ohne eingeſchriebene Winkel, wohl nicht überſehen und verkannt haben.

23. Er würde vielmehr ſogleich wahrgenommen haben, die von ihm gefundene Abkürzung (18) laſſe ſich noch viel weiter abkürzen und auf ein *longe praeſtantiſſimum et fructuoſiſſimum compendium* bringen, wenn man die Werthe involutoriſch ſo in und untereinander ſchreibt, daß man, der folgenden wegen, die vorhergehenden nicht erſt beſonders abzuſetzen braucht*). Eben ſo wenig würden ihm die übrigen oben (6, a, b, c, d, e) beygebrachten Bemerkungen entgangen ſeyn, und wahrſcheinlich auch nicht die ſo wichtige Zerfällung in Factoren (6, f) wodurch nicht nur überhaupt die große Anzahl der

*) Die ſechs erſten Werthe des continuirlichen Bruchs (16) darzuſtellen, gebraucht Bernoulli (§. 2. 3) zuſammen 52 Complexionen, wo bey der involutoriſchen Anordnung nur 21 nöthig ſind. Bey ſpätern Werthen iſt der Unterſchied noch viel beträchtlicher, und doch iſt dabey noch nicht auf die ſo anſehnliche Verkürzung gerechnet, die die Factoren ſchaffen, welche die Involutionen darreichen. Noch iſt hier zu erinnern, daß bey den Bernoulliſchen Complexionen einige Druckfehler vorkommen, die ſich durch obige Involutionen leicht verbeſſern laſſen.

der Complexionen (worüber B. §. 2 sich äußert) beträchtlich vermindert wird, sondern auch mehrere übereinstimmende Factoren im Zähler und Nenner sich absondern lassen, die, wenn sie einmal für den einen berechnet sind, auch zugleich für den andern gelten.

24. So viel kann oft eine an sich gering scheinende Veränderung, hier blos die veränderte Lage der Complexionen, ihre verticale Stellung, bewirken! Die Involutionen nämlich, die auf diese und andere Arten entstehen, sind der Erfindung neuer synthetischer Sätze gleichgültig, bey denen sich neue Verhältnisse wahrnehmen, und mehrere vorhin nicht bemerkliche Folgen ableiten lassen. Zugleich schaffen sie die vollkommenste Uebersicht des Ganzen aus seinen Theilen, die hier, mit ihren Beziehungen auf einander, ganz offenbar und unverdeckt vor Augen liegen.

25. Euleri specimen algorithmi singularis (*Nouæ Comm. Ac. Sc. Petrop. T.* IX. *p.* 53-69) hat vornehmlich zur Absicht, die Zusammensetzung der Buchstaben a, b, c... für die Werthe des Bruchs $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc}}}$ durch einen eigends dafür eingerichteten Algorithmen zu bestimmen, und so die (*Introd. in Analyſ. Inf.* §. 359 und hier [4]) bemerkte Schwierigkeit zu heben. Der Hauptsatz dieses Algorithmen (*Nou. Comm.* a. a. O. §. 8) aus welchem das Gesetz der Zusammensetzung erhellet, stützt sich auf combinatorische Verrichtungen. Ein anderer Eulerischer Aufsatz: *de uſu nou. Algorithmi* bey einer unbestimmten Aufgabe, kommt *Nou. Comm.* — *T.* XI. *p.* 28, 66 vor. Dan. Bernoulli (*Ib. T.* XX. *p.* 41, 42) vermißt gleichwohl bey diesem Algorithmen den Umstand, daß die Indices des dabey zum Grunde lie-

liegenden Bruchs nicht ganz allgemein (20) $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c} \ldots$ angenommen ſind.

Man kann ſich mehrere ſolche beſondere Algorithmen und daraus abgeleitete Formeln für andere Aufgaben, wo es Schwierigkeiten hat, die Endreſultate aus den gegebenen Größen ohne Umſchweife darzuſtellen, gedenken. Wollte man aber auch dergleichen ausarbeiten, ſo würden ſie immer als iſolirte, nicht aus einer gemeinſchaftlichen Quelle fließende Formeln und Vorſchriften, dem Gedächtniſſe zur Laſt fallen, und doch endlich insgeſamt als einzelne kleine Bäche in den Strömen eines weit ausgebreitetern Calculs ſich verlieren, die ſich ſämtlich in den unermeßlichen Ocean combinatoriſcher Veränderungen ergießen.

26. So auffallend aber auch immer die angeführten Erſcheinungen ſeyn mögen: ſo iſt gleichwohl das Folgende noch ungleich auffallender, und, theils wegen der Involutionen und andern figürlichen Anordnungen, die dabey vorkommen, theils wegen der Anwendungen, die ſich auf den für die Analyſis ſo überaus wichtigen polynomiſchen Lehrſatz, und auf andere Sätze davon machen laſſen, um ſo merkwürdiger.

(Die Fortſetzung folgt künftig.)

---

V.

# V.

## Allgemeine Summation einer Reihe, worinn höhere Differenziale vorkommen; von J. F. Pfaff, Prof. der Math. zu Helmſtädt.

### Satz *).

Die Summe der mit dem $(n+1)$ten Gliede abbrechenden Reihe:

$$x\,d^n y + {}^n\mathfrak{A}\,u\,dx.\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right) + {}^n\mathfrak{B}\,d(u^2dx).\,d^{n-2}\left(\frac{y}{u^2}\right)$$

$$+ {}^n\mathfrak{C}\,d^2(u^3dx).\,d^{n-3}\left[\frac{y}{u^3}\right] + \text{etc} + {}^n\mathfrak{B}\,d^{n-3}(u^{n-2}dx).\,d^2\left[\frac{y}{u^{n-2}}\right]$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,d^{n-2}(u^{n-1}dx).\,d\left(\frac{y}{u^{n-1}}\right) + d^{n-1}(u^n dx).\,\frac{y}{u^n}\ **)$$

ist, für jedes $u, = d^n(xy)$.

Be-

*) Ich erhielt diesen lehrreichen Satz mit seinen Zusätzen zu gleicher Zeit mit jenem Aufsatze über Herrn de la Grange's allgemeine Umkehrungsreihe (S. 81), aber der Raum verstattete nicht, ihn dort mit abdrucken zu lassen. Ich gebe ihn also hier, und werde die andern, spätterhin eingesendeten, mehr oder weniger damit in Verbindung stehenden Sätze, in der Folge beybringen. H.

**) Die beyden ersten Glieder dieser Reihe lassen sich, zur deutlichern Einsicht des Ganzen, auch so darstellen: $d^{-1}(u^0\,dx)\,d^n y + {}^n\mathfrak{A}\,d^0(u\,dx)\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right)$; nämlich $d^{-1}(dx) = \int dx$ und $d^0 u\,dx = u\,dx$. Statt der Coefficienten ${}^n\mathfrak{B}$, ${}^n\mathfrak{A}$, 1, der drey letzten Glieder, hätte man auch setzen können: ${}^n_{-2}\mathfrak{A}$, ${}^n_{-1}\mathfrak{A}$, ${}^n_0\mathfrak{A}$. Von diesen Hindenburgischen Zeichen für Binomialcoefficienten (S. 99, 100).

## Beweis.

1. Der Satz giebt:

für $n=1$; $x\,dy+u\,dx.\frac{y}{u}=d(xy)$

für $n=2$; $x\,d^2y+2\,du\,dx.d\left(\frac{y}{u}\right)+d(u^2\,dx).\frac{y}{u^2}$

$=x\,d^2y+2\frac{u\,dy-y\,du}{u}dx+d^2x.y+2\frac{du\,dx.y}{u}$

$=x\,d^2y+2\,dy\,dx+y\,d^2x=d^2(xy)$.

Alſo darf nur gezeigt werden, daß der Satz, wenn er für alle Werthe von n, von $n=1$ bis zu einem gewiſſen Werth, gilt, auch für das nächſtfolgende n gelten werde.

2. Die Reihe des Satzes, da ihre Summe von x, y und n abhängt, drücke man durch $\varphi(x,y,n)$ aus, wobey unentſchieden gelaſſen wird, ob die Summe auch von u abhangen möge. Durch eine leichte Verwandelung ergiebt ſich

$$\varphi(x,y,n)$$

$$=$$

$$x\,d^ny$$

$$+{}^n\mathfrak{A}\,d(ux).d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right)-{}^n\mathfrak{A}\,x\,du.\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right)$$

$$+{}^n\mathfrak{B}\,d^2(u^2x).d^{n-2}\left(\frac{y}{u^2}\right)-{}^n\mathfrak{B}\,d(2u\,du.x)\,d^{n-2}\left(\frac{y}{u^2}\right)$$

$$+{}^n\mathfrak{C}\,d^3(u^3x).d^{n-3}\left(\frac{y}{u^3}\right)-{}^n\mathfrak{C}\,d^2(3u^2du.x)d^{n-3}\left(\frac{y}{u^3}\right)$$

$$+\text{ etc}\qquad\qquad -\text{ etc}$$

Von den beyden, hier von einander abgezogenen, Reihen, werde die erſte linker Hand (deren Summe auch von x, y, n abhängt) durch $\psi(x,y,n)$ bezeichnet, ſo iſt

die

die andere rechter Hand $= n\psi(x\,du, \frac{y}{u}, n-1)$. Das giebt folgende Gleichung, welche die Verhältniß zwiſchen den beyden Reihen ausdrückt, deren Summe durch die Functionen $\varphi$ und $\psi$ bezeichnet werden:

$$\psi(x,y,n) = \varphi(x,y,n) + n\psi(x\,du, \frac{y}{u}, n-1)$$

3. Eben ſo ergeben ſich, durch unmittelbare Verwechslung der drey Größen unter dem Functionalzeichen folgende Gleichungen:

$$1)\ \psi(x\,du, \frac{y}{u}, n-1)$$
$$= \varphi(x\,du, \frac{y}{u}, n-1) + (n-1)\psi(x\,du^2, \frac{y}{u^2}, n-2);$$

$$2)\ \psi(x\,du^2, \frac{y}{u^2}, n-2)$$
$$= \varphi(x\,du^2, \frac{y}{u^2}, n-2) + (n-2)\psi(x\,du^3, \frac{y}{u^3}, n-3);$$

u. ſ. w. und ſo wird endlich:

$$\psi(x,y,n)$$
$$= \varphi(x,y,n) + n\varphi(x\,du, \frac{y}{u}, n-1)$$
$$+ n.n-1.\varphi(x\,du^2, \frac{y}{u^2}, n-2) + n.n-1\,n-2.\varphi(x\,du^3, \frac{y}{u^3}, n-3)$$
$$+ \text{etc etc} + n.n-1.n-2\ldots1.\varphi(x\,du^n, \frac{y}{u^n}, 0).$$

4. Nun ſey die Summation des Satzes richtig für $n = 1, 2, 3 \ldots n$, ſo wird

$$\psi(x,y,n)$$
$$= d^n(xy) + n\,d^{n-1}\left(xy\frac{du}{u}\right) + n.n-1.d^{n-2}\left(xy\frac{du^2}{u^2}\right)$$
$$+ \text{etc etc} + n.n-1.n-2\ldots 1.\ xy\frac{du^n}{u^n}$$

(nach 3) und weil angenommenermaßen $\varphi(x,y,n) = d^n(xy)$ von $n=1$ bis $=n$.

5. Daraus folgt $\psi(u\,dx, \frac{y}{u}, n) = \psi(dx,y,n)$; weil in dem Ausdrucke für $\psi(x,y,n)$, wo x und y jede Größen bedeuten können, bloß xy vorkommt, und $u\,dx.\frac{y}{u} = dx.y$. Also:

$$\psi\left(u\,dx, \frac{y}{u}, n\right) = \psi(dx,y,n)$$

das ist:

$$\left\{\begin{array}{l} u\,dx.d^n\left(\frac{y}{u}\right) \\ +{}^n\mathfrak{A}\,d(u^2dx)d^{n-1}\left(\frac{y}{u^2}\right) \\ +{}^n\mathfrak{B}d^2(u^3dx)d^{n-2}\left(\frac{y}{u}\right) \\ +\text{ etc} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} dx.d^n y \\ +{}^n\mathfrak{A}\,d(u\,dx)d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right) \\ +{}^n\mathfrak{B}d^2(u^2dx)d^{n-2}\left(\frac{y}{u^2}\right) \\ +\text{ etc} \end{array}\right\}$$

das ist:

6. Nun ist $\varphi(x,y,n+1)$
$$= x\,d^{n+1}y + {}^{n+1}\mathfrak{A}\,u\,dx.\,d^n\left(\frac{y}{u}\right)$$
$$+ {}^{n+1}\mathfrak{B}\,d(u^2dx).\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u^2}\right)$$
$$+ \text{etc}$$

$$= x\,d^{n+1}y$$
$$+ {}^{n}\mathfrak{A}\,u\,dx.\,d^{n}\left(\frac{y}{u}\right) \quad + u\,dx.\,d^{n}\left(\frac{y}{u}\right)$$
$$+ {}^{n}\mathfrak{B}\,d(u^{2}dx).\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u^{2}}\right) + {}^{n}\mathfrak{A}\,d(u^{2}dx).\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u^{2}}\right)$$
$$+ \text{etc} \quad + \text{etc}$$

Für die zweyte Reihe, in welche $\varphi(x, y, n+1)$ aufgelöset ist, setze man die ihr gleiche (aus 5) so wird

$$\varphi(x, y, n+1)$$
$$= x\,d^{n+1}y$$
$$+ {}^{n}\mathfrak{A}\,u\,dx.\,d^{n}\left(\frac{y}{u}\right) \quad + dx.\,d^{n}y$$
$$+ {}^{n}\mathfrak{B}\,d(u^{2}dx).\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u^{2}}\right) \quad + {}^{n}\mathfrak{A}\,d(u\,dx).\,d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right)$$
$$+ \text{etc} \quad + \text{etc (wie in 5)}$$

d. i. $\varphi(x, y, n+1) = d[\varphi(x, y, n)] = d^{n+1}(xy)$

Also gilt der Satz auch für $n+1$.

## Zusatz 1.

1) Von diesem allgemeinen Satze ergeben sich zween besondere Fälle. Wenn man erst $x = q^{f}$; $y = q^{g}$; $u = q^{d}$ setzt, dann $x = q^{g-nd}$; $y = q^{f+nd}$; $u = q^{d}$; so wird:

$$\text{a)}\ \frac{1}{f}\,d^{n}(q^{g}) + \frac{n\mathfrak{A}}{f+d}\,d(q^{f+d})\,d^{n-1}(q^{g-d})$$
$$+ \frac{n\mathfrak{B}}{f+2d}\,d^{2}(q^{f+2d})\,d^{n-2}(q^{g-2d}) + \text{etc}$$
$$+ \frac{n\mathfrak{A}}{f+(n-1)d}\,d^{n-1}(q^{f+(n-1)d})\,d(q^{g-(n-1)d})$$
$$+ \frac{1}{f+nd}\,d^{n}(q^{f+nd}).\,q^{g-nd} = \frac{1}{f}\,d^{n}(q^{f+g})$$

$$b)\ \frac{1}{g}q^f d^n(q^g)+\frac{n\mathfrak{A}}{g-d}d(q^{f+d})d^{n-1}(q^{g-d})$$
$$+\frac{n\mathfrak{B}}{g-2d}d^2(q^{f+2d})d^{n-2}(q^{g-2d})+\text{etc}=\frac{1}{g-nd}d^n(q^{f+g})$$

Bey dieser zweyten Reihe wird nämlich die Reihe des Satzes rückwärts geschrieben.

a) Die Reihe (a) in $sd-cf$ multiplicirt, werde zu der in $sd+cg$ multiplicirten Reihe (b) addirt, so kömmt, nach der Division durch $(f+g)d$, eine dritte Reihe:

$$c)\ \frac{s}{fg}.q^f.d^n(q^g)$$
$$+\frac{(s+c)n\mathfrak{A}}{(f+d)(g-d)}d(q^{f+d})d^{n-1}(q^{g-d})$$
$$+\frac{(s+2c)n\mathfrak{B}}{(f+2d)(g-2d)}d^2(q^{f+2d})d^{n-2}(q^{g-2d})$$
$$+\text{etc}=\frac{s(f+g)+n(cf-ds)}{f(f+g)(g-nd)}d^n(q^{f+g})$$

## Zusatz 2.

Diese drey abgeleiteten Summationen gelten für jede Function $q$, und für jeden Werth der veränderlichen Größe, wovon $q$ eine Function ist.

Es können also auch aus diesen Fällen noch speciellere Sätze hergeleitet werden. Es sey

$$q=\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\text{etc}$$

und man nehme in jenen drey Reihen (Zus. 1) $z=0$, so wird bekanntlich

$$d^{\nu-1}(q^{\mu}) = 1.2.3 \ldots \nu - 1 . q^{\mu} \times \nu . dz^{\nu-1}$$ *).

Dieſen Werth in die Reihen ſubſtituirt, verwandelt ſich die Reihe (a) in die von Herrn Rothe *Diſſert. de Ser. Reuerſ. p.* 18) mit B bezeichnete, und die Reihe (c) in die des dortigen Lehrſatzes §. VI. Begreiflich kann nun aber auch

$$q = \alpha z^{m} + \beta z^{m+r} + \gamma z^{m+2r} + \delta z^{m+3r} + \text{etc}$$

geſetzt werden (S. 86, 4)

Uebrigens läßt ſich aus der dortigen Reihe B die allgemeinere §. VI leicht herleiten. Man ſchreibt jene verkehrt, und ſetzt g für $f+nd$, und f für $g-nd$; ſo erhält ſich eine neue Reihe, welche, in $\frac{sd+cg}{(f+g)d}$ multiplicirt, und zu der in $\frac{sd-cf}{(f+g)d}$ multiplicirten erſten Reihe addirt, die Reihe §. VI hervorbringt.

## Zuſatz 3.

1) Indem man in der Reihe des Satzes (für $d^{n} . \times y$) y noch unbeſtimmt läßt, ſetze man $x = u^{e}$, ſo wird:

$$\frac{1}{e} u^{e} d^{n} y + \frac{n\mathfrak{A}}{e+1} d(u^{e+1}) d^{n-1}\left(\frac{y}{u}\right) +$$

$$+ \frac{n\mathfrak{B}}{e+2} d^{2}(u^{e+2}) d^{n-2}\left(\frac{y}{u^{2}}\right) + \text{etc} = \frac{1}{e} d^{n}(u^{e} y)$$



*) Hier bedeutet $q^{\mu} \times \nu$ den νten Coefficienten der Potenz $q^{\mu}$, nach den von mir eingeführten Zeichen (7, ×) für Glieder und Coefficienten (S. 87). Eben ſo bedeuten die hier (Zuſatz 4) und weiter in der Folge von Herrn Profeſſor Pfaff gebrauchten Ausdrücke $(y q^{-2\alpha}) \times (n-1)$; $(y q^{\beta}) \times (n+1)$; u. ſ. w. $(n-1)$te, $(n+1)$te u. ſ. w. Coefficienten der (in Klammern) daneben ſtehenden Producte der Reihen und ihrer Potenzen. Man vergleiche S. 220, 223; 224, 228.

Eben so wird:

$$\frac{1}{h}\zeta d^n(u^h) + \frac{n\mathfrak{A}}{h-1} d(\zeta u).d^{n-1}(u^{h-1})$$
$$+ \frac{n\mathfrak{B}}{h-2} d^2(\zeta u^2) d^{n-2}(u^{h-2}) + \text{etc} = \frac{1}{h-n}.d^n(u^h \zeta)$$

wo man auch noch, $\frac{1}{u}$ für u und $-\varrho$ für h und y für $\zeta$ schreiben kann.

1) Man setze $e = \frac{f}{d}$ und $u = q^d$, so wird:

$$\alpha)\ \frac{1}{f} q^f d^n(y) + \frac{n\mathfrak{A}}{f+d} d(q^{f+d}) d^{n-1}(y.q^{-d})$$
$$+ \frac{n\mathfrak{B}}{f+2d} d^2(q^{f+2d}) d^{n-2}(y.q^{-2d}) + \text{etc} = \frac{1}{f} d^n(q^f y)$$

Eben so ist:

$$\beta)\ \frac{1}{g} y d^n(q^g) + \frac{n\mathfrak{A}}{g-d} d(y.q^d) d^{n-1}(q^{g-d})$$
$$+ \frac{n\mathfrak{B}}{g-2d} d^2(y.q^{2d}) d^{n-2}(q^{g-2d}) + \text{etc} = \frac{1}{g-nd} d^n(q^g y)$$

## Zusatz 4.

Die beyden Reihen ($\alpha$ und $\beta$, Zusatz 3) sind denen (a und b, Zus. 1) ähnlich aber allgemeiner:

Setzt man $q = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc}$
und $y = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc}$

so kann man ähnliche Schlüsse, wie im 2ten Zusatze, anbringen. Es kann aber dann auch $q = \alpha z^m + \beta z^{m+r} + \text{etc}$ und $y = az^n + bz^{n+\varrho} + \text{etc}$ gesetzt werden (Zusatz 2), wenn nur der Exponenten-Unterschied in beyden Reihen gleich, oder $r = \varrho$ ist.

So

So ergeben ſich folgende zwey Summationen:

1) $\frac{1}{f} q^{f} \varkappa 1 . y \varkappa (n+1) + \frac{1}{f+d} q^{f+d} \varkappa 2 . (y q^{-d}) \varkappa (n)$

$\frac{1}{f+2d} q^{f+2d} \varkappa 3 . (y q^{-2d}) \varkappa (n-1)$

$+ \frac{1}{f+3d} q^{f+3d} \varkappa 4 . (y q^{-3d}) \varkappa (n-2)$

$+$ etc $= \frac{1}{f} (q^{f} y) \varkappa (n+1)$

2) $\frac{1}{g} y \varkappa 1 . q^{g} \varkappa (n+1) + \frac{1}{g-d} (y q^{d}) \varkappa 2 . q^{g-d} \varkappa (n)$

$+ \frac{1}{g-2d} (y q^{2d}) \varkappa 3 . q^{g-2d} \varkappa (n-1)$

$+$ etc $= \frac{1}{g-nd} (y q^{g}) \varkappa (n+1)$

Wegen der Coefficienten $\varkappa (n-1)$, $\varkappa (n+1)$ ꝛc. die Note S. 343.

Die erſte Summation iſt allgemeiner, als die bey Herrn Rothe (*De Ser. Reuerſ.* p. 18) mit B bezeichnete. Es dürfen nämlich q und y willkührliche Reihen nach z ſeyn, wenn nur der Exponenten-Unterſchied in beyden gleich iſt, wobey alſo y nicht gerade eine Potenz von q zu ſeyn braucht *).



*) Herr Pr. Pfaff hat auf eine ſcharfſinnige Art einige Sätze in Herrn Mag. Rothe's (oben angeführter) Diſſertation aus ſeinem Producten-Satze für $d^{n}(xy)$, mit welchem ſie Anfangs gar keine Verbindung und Aehnlichkeit zu haben ſcheinen, hergeleitet und gezeigt, daß jene Sätze noch allgemeiner wahr ſind, als Herr R. ſie gebraucht hat. Für Leſer, die jene Diſſertation nicht kennen, muß ich erinnern, daß Herrn M. Rothe's nächſte Abſicht bloß Lokalformeln für Potenzen erforderte, daher er auch in ſeiner Schrift nur von Lokal-Zeichen und Sätzen für Potenzen von Reihen, nicht aber für Producte derſelben (dergleichen hier S. 220-232 vorkommen) gehandelt, und ihre Bedeutung erklärt

## Zuſatz 5.

Folgende beyde Summationen laſſen ſich aus den obigen auch noch herleiten:

$$1)\ u\,dx.d^n\left(\frac{y}{u}\right)+\frac{n\mathfrak{A}}{2}d(u^2dx)d^{n-1}\left(\frac{y}{u^2}\right)$$
$$+\frac{n\mathfrak{B}}{3}d^2(u^3dx)d^{n-2}\left(\frac{y}{u^3}\right)+\text{etc.}$$
$$+\text{etc}=\frac{d^{n+1}(xy)-x\,d^{n+1}y}{n+1}$$

$$2)\ \frac{1}{2}u^2\,d^2x.d^n\left(\frac{y}{u^2}\right)+\frac{1}{3}{}^n\mathfrak{A}d(u^3d^2x)d^{n-1}\left(\frac{y}{u^3}\right)$$
$$+\frac{1}{4}{}^n\mathfrak{B}d^2(u^4d^2x)d^{n-2}\left(\frac{y}{u^4}\right)+\text{etc}$$
$$+\text{etc}=\frac{x\,d^{n+2}y-d^{n+2}(yx)+(n+2)d^{n+1}(ydx)}{(n+2)(n+1)}$$

die Summen dieſer beyden Reihen, in welchen u vorkommt, ſind alſo von u unabhängig.

## Zuſatz 6.

Aus dem Satze bey Herrn Rothe (*De Ser. Rec.* §. VI. p. 15) entſpringt, wenn $d=o$, $c=d$ geſetzt wird, der Satz §. IV, daß alſo dieſer als ein beſonderer Fall von jenem betrachtet werden kann.

Lehr-

ſicht hat. Daß einige ſeiner Sätze nicht blos von Potenzen (aus gleichen Factoren oder Reihen) ſondern auch von Producten (aus ungleichen Factoren oder Reihen) wahr ſind, war ihm nicht unbekannt, und er fand in der Folge eine noch allgemeinere Lokalformel, als die hier im Texte angeführte, und daraus die ihr zugehörige Differenzialformel, beyde von noch größerem Umfange, als die im Anfange dieſes Aufſatzes für $d^n(xy)$ gegebene. Anmerkungswürdig iſt es übrigens, daß Herr Prof Pfaff in einem mir neuerlich überſendeten, und nächſtens mitzutheilenden Beytrage zu dem gegenwärtigen Aufſatze, auf eben dieſelbe allgemeinere Differenzial- und Lokalformel gekommen iſt. K.

### Lehrsatz.

Eine Function von x und y, m mal nach x, und dann n mal nach y differentiirt, giebt eben das, als wenn sie zuerst n mal nach y und dann m mal nach x differentiirt wird. Das gilt von endlichen Differenzen, wie von Differentialen, und läßt sich auch auf mehrere veränderliche Größen anwenden. Für $m = n = 1$ entspringt daraus der bekannte gewöhnliche Satz.

Anmerk. Ich bringe diesen Satz, auf den mich meine Untersuchungen über das de la Grangische Problem (S. 81) und die Summirung der Reihen geleitet haben, als einen Lehrsatz hier bey. Er ist in mehrerer Rücksicht nützlich, und der schon sonst bekannte Satz wird durch ihn zur Allgemeinheit erhoben.

## VI.

## Fragen eines Ungenannten über die Art durch Gitter geheim zu schreiben.

1. Ist über die Art, durch Gitter (*Chassis*) geheim zu schreiben, etwas im Drucke bekannt?

2. Wo nicht, wäre solche, als ein Beytrag zur Lagerechnung (*calculus situs*) ausführlich abgehandelt, der Bekanntmachung werth?

3. Der bescheiden Fragende wünscht, daß Liebhaber des Dechiffrirens das beyfolgende Beyspiel zu übersetzen versuchen möchten, damit seine Meynung: — diese Art geheim zu schreiben, sey sowohl die kürzeste und geschwindeste, als auch die schwerste, ohne Schlüssel zu lesen — vernichtet, oder befestiget werde.

Durch

## Durch Gitter geschriebener, zum Dechiffriren vorgelegter, Aufsatz.

u h e v e i d a t k k e r i m i g e g s ; c i e n h
u r i l n s e h i c n b S e c d e a e m f m s g e L
e ä n u e e a n f h v d p d h o i c h h f u i s e r
n s u r v i n n i S o e d i l M e k o a n d e r t w
i L c u R m z a f u r e g e e n m t e r o t i f s n
, n h ä ä l t e e t h s s D e f e l r l g c m i t h
z i e c c e e t e n r f n f S t t s t i r e a e u n
r s d i e z w h r e a h r s d w i e e d v e s r a i
a l w h h l r n i e s n a e i a a a r e f h s b e l
z u l m s n n e a m m f c e g e t s b n o b c t n r
u c e h z n n m s r z t t S c e i a z i a e h G d s
b i r a c h w a e v u n h e c t w r n D a b e r s F
e h d o r m e m c r w t h c l n e a T D r h n e e i
e n i e r L ä g o d n e e e r n n g h e i r c a w o
d h e o u h r i r k e r e e h s i l n o r a e g e n
g v e r s a r l n l r a t n r e d s d m i a e r l h
u a u s s f M t t d e r e e m w i d i s n m d u c e
t n k k o n e n u g e n n D e n g e o n n z u m h B
g e r i h s e Z p a h n i r e e l i d o m a n e e t
e e e f a n d f n r R o o m i a c r n l e s e r g f
l i n e m d a u r b e v l h h h z e u c e r h t a !
i n s n e i s t d d m o o e t a K s h h e R e n n a
ä t G o m g R h B e s e g n e e l o r l a l r m z a
i n e t t d e t u e e h G e u n t r u e i t g a b .
c B r é n d o c h n u r m i n t w e n i g E u u e
w n s s h ! c n u n t d t g h a f t e n n u s b s n

Anmerkung. Die horizontalen und vertikalen Linien, welche die Buchstaben in Fächer einschließen, sind hier im Drucke weggelassen worden, damit das Buchstabenviereck die Breite einer Octavseite nicht übersteigen möchte. Wer den Aufsatz dechiffriren, d. i. das zugehörige Gitter, als den Schlüssel dazu, finden will, entwirft sich leicht das Buchstabenviereck nach Fächern abgetheilt, auf einem Blatte von gewöhnlichem Quartformate.

---

Vor-

## Vorläufige Beantwortung der vorgelegten Fragen; vom Herausgeber.

1) Im Contr' Espion, ou les clefs de toutes les correspondances secrettes, à Paris 1794, vom französischen Bürger Dlandol, wird im dritten Capitel (§ 18) eine Manière d'écrire en chiffres avec le chassis, mit beygefügtem Beyspiele angezeigt. Daselbst werden aber durch die Fächer des Gitters **ganze Worte** eingeschrieben, und der übrige Raum mit solchen Worten ausgefüllt, die mit denen durchs Gitter (geheim) geschriebenen, einen Sinn geben. Fließt nun der Sinn der so zusammengesetzten Worte natürlich und ungezwungen, und ist der Inhalt der Schrift den Personen, Zeiten und Umständen angemessen, so wird dadurch sogar aller Verdacht von Geheimschreiberey vermieden, der durch einzelne Buchstaben sogleich aufgeregt wird. Inzwischen ist es, bey den so schwierigen Bedingungen bey ganzen Worten, allemal rathsamer durch **zerstreute Buchstaben** zu schreiben.

Die Dlandolsche Schrift handelt im ersten Abschnitte von Chiffres par Combinaison, im zweyten von écritures occultes, durch sogenannte sympathetische Dinten. Die Absicht ist, solche Arten geheim zu schreiben, bekannter, und dadurch, besonders bey den jetzigen Zeiten, für den Staat weniger gefährlich zu machen. Als eine Probe von der nützlichen Anwendung solcher Kenntnisse, werden, im dritten Abschnitte, einige aufgefangene und entzifferte Briefe vorgelegt. Uebrigens hat der Titel des Buchs meine Erwartung stärker gereitzt, als der Inhalt desselben sie befriediget hat.

2) Die

2) Die Seite, von welcher der fragende Ungenannte die Sache, nach der Aeußerung in (2) anſieht, giebt ihr ein wiſſenſchaftliches Intereſſe, dadurch ſie um ſo mehr an Werth gewinnt, und den einſeitigen, vorlängſt abgenutzten, vom Verfaſſer des Contr'eſpion's mitgetheilten, Entwurf weit hinter ſich zurückläßt. Ein Beytrag zur Steganographie, in der angezeigten Form, würde den Kennern gewiß ſehr willkommen ſeyn. Noch muß ich erinnern, daß ſtatt der Gitter in quadratiſcher Form, man ſich auch des gewöhnlichen oder mechaniſchen Abzählens, der in länglichten Parallelogrammen geordneten kleinern Fächer, nach mannichfaltigen Geſetzen und umlaufenden Perioden, bedienen könnte; auf ähnliche Art, wie ich in meiner Beſchreibung ꝛc. (der Titel des Buchs ſteht hier S. 242, 3, 1) mit Auffindung vorgegebener Zahlen, verfahren habe. Dadurch würde das Feld der Unterſuchung erweitert, und die combinatoriſchen Geſetze damit in nähere Verbindung gebracht werden.

3) Will ich, einiger Leſer wegen, noch folgende wohlgemeynte Erinnerung beyfügen: Wer nicht einen ganz beſondern Beruf in ſich fühlt, oder durch einen unwiderſtehlichen Hang dazu getrieben wird, der wage ſich nicht an die Entzifferung des oben vorgelegten Aufſatzes. Ich habe doch in den Zeiten, wo ich noch weniger beſchäftiget war als itzt, ſchon manche Schrift, aus Liebhaberey für die Sache, dechiffrirt; ich finde aber, wenn ich auch noch ſo viel Zeit übrig hätte, nicht die geringſte Neigung in mir, mit dieſem Aufſatze einen Verſuch zu machen. Der mir eben ſo unbekannte als vor dem Publikum ungenannte Verfaſſer deſſelben, ſcheint mir nicht ſo treuherzig zu ſeyn, ein ſchon ſonſt bekanntes, und von andern gebrauchtes Verfahren dabey nur obenhin nachgeahmt, und ſo einen Weg betreten zu haben, auf welchem ihm andere nachtreten und ihn beſchleichen könnten.

Die

Die Anordnung der kleinern Fächer in dem großen Quadrate oder Gitter hat übrigens so viel Willkührliches; die veränderliche Lage des letztern, in Absicht auf die Eckpunkte (direct und umgekehrt) und in Absicht auf die Verschiebung an den horizontalen und vertikalen Linien u. s. w. so viel Mannichfaltiges; die Einführung der dabey gebräuchlichen Füll- und Misweisezeichen, so viel Labyrinthisches, daß gewiß jeder, der seinen Vortheil kennt, sich nicht anders, als unter den oben angezeigten Bedingungen, an die Auflösung wagen wird. Allerdings ist das Verfahren durch Gitter geheim zu schreiben, eben so kurz als geschwind in der Ausführung, und gehört zu den schwersten, ohne Schlüssel zu lesen; ja man kann, in unzähligen Fällen, die Entzifferung für so gut als unmöglich ansehen. H.

## VII.

# Auszüge und Recenſionen neuer Bücher.

---

1. Nachricht von Herrn Glenie's Antecedental Calcul.

The *Antecedental Calculus*; or: a geometrical method of reaſoning, without any conſideration of motion or velocity, applicable, to every purpoſe to which Fluxions have been, or can be applied.... by *James Glenie* Esqu. M. A. and F. R. S. Lond. 1793. 16 Quartſ. und 2 eingedruckte Holzſchnitte.

1. Dieſe geometriſche Methode, ohne daß Bewegung und Zeit betrachtet werden, zu bewerkſtelligen, wozu man ſonſt Fluxionen braucht, bezieht ſich auf eine Abhandlung deſſelben Verfaſſers in den Tranſactionen 1777, und eine andre lateiniſche, die 1776 herausgekommen iſt. Bis auf dieſe zurückzugehen iſt wohl jetzo nicht thulich, alſo kann nur Etwas von dem dargeſtellt werden, wie er ſeine dortigen Lehren anwendet. Folgendes iſt getreue Ueberſetzung des Anfangs.

2. „In der erſten Formel, des 3ten Lehrſatzes meiner Vniverſal Compariſon, (wenn R zu Q ſich wie 2 zu 1 verhält) werde ſtatt A, geſetzt A + N; da erhalten wir den geometriſchen Ausdruck: $A+N+(A+N).\frac{A-B+N}{B}$, welcher den beyden gleich iſt $A+A.\frac{A-B}{B}$ und $\frac{2AN+N^2}{B}$. Hieraus iſt folgendes offenbar: Der Ueberſchuß der Größe, (the exceſs of magnitude) welche zu B, die zweyfache Verhältniß (duplicate ratio) von A + N zu B hat, über die Größe, welche zu B, die zweyfache Verhältniß von A zu B hat, wird durch die Größe von eben der Art $\frac{2AN+N^2}{B}$ ausgedruckt."

So weit die Ueberſetzung.

3. Wenn

3. Wem die nicht ganz deutlich iſt, der ſuche die Urſache darinn, daß ſie den Grundtext genau ausdrückt.

4. Ich bekenne, daß ich ihn anfangs ſo verſtanden habe: die duplicata ratio $A+N : B$ ſolle zu B eine gewiſſe Größe haben; und da war mir unbegreiflich, wie eine Verhältniß zu einer einzelnen Größe eine Größe haben könnte.

5. Hierinn that ich ihm nun Unrecht, und da ich ſolches ſelbſt, ohne anderer Erinnerung, bey Zeiten erkannt habe, ſo beruhige ich mein Gewiſſen mit der Regel, die ich noch von meinen juriſtiſchen Jugendjahren her weiß: Interpretatio contra eum eſt facienda, qui clarius loqui debuiſſet.

6. Seine Meynung iſt dieſe: $x+e$ ſey eine Größe, welche zu B rationem duplicatam von $A+N : B$ hat, und x eine, die zu B rationem duplicatam von $A : B$ hat.

Das iſt, $x+e : B = (A+N)^2 : B^2$ und $x : B = A^2 : B^2$

So iſt der Ueberſchuß der erſten Größe über die zweyte

$$= e = \frac{2.AN+N^2}{B}.$$

Eine bekannte Wahrheit.

7. Von (2) geht Hr. Gl. zur ratione triplicata fort, und dann zum Allgemeinen. Ich bin nicht vermögend, in meiner Mutterſprache ſo zu ſchreiben, wie Hr. Gl. in der ſeinigen; ich ſetze alſo die Stelle engliſch her:

8. And, in general, the exceſs of the magnitude, which has to B a ratio, having to the ratio of $A+N$ to B, the ratio of R to Q (when R has to Q any given ratio whatever), above the magnitude, which has to B a ratio, having to the ratio of A to B the ſame ratio of R to Q, is geometrically expreſſed by

$$\frac{\frac{R}{Q}.A^{\frac{R-Q}{Q}}.N+\frac{R}{Q}\cdot\frac{R-Q}{2Q}.A^{\frac{R-2Q}{Q}}.N^2+\text{etc}}{B^{\frac{R-Q}{Q}}}$$

9. In dieſer genau abgeſchriebenen Stelle, habe ich nur im Dividend das etc ein Glied eher geſetzt, als Hr. Gl. Jedermann ſieht, daß der Dividend, von der Potenz von $A+N$, deren Exponent $\frac{R}{Q}$ iſt, diejenigen Glieder enthält, die nach dem

dem erſten folgen; Alſo, $\frac{R}{Q} = m$ geſetzt, Hr. Gl. Ausdruck käme:

$$\frac{m.A^{m-1}.N + \frac{m.(m-1)}{1.2}.A^{m-2}.N^2 + \text{etc}}{B^{m-1}}$$

10. Völlig auf die Art, ſagt Hr. Gl., findet ſich, that the exceſs of the magnitude, which has to B, a ratio, having to the ratio of A to B, the ratio of R to Q above the magnitude, which has to B a ratio, having to the ratio of A — N to B, the ratio of R to Q, is geometrically expreſſed by... meine Abkürzung (9) gebraucht:

$$\frac{m.A^{m-1}N - \frac{m(m-1)}{1.2}.A^{m-2}N^2 + \text{etc}}{B^{m-1}}$$

11. Wenn nun, A + N und A — N gegen B in Verhältniſſen ſtehn (in relations) die der der Gleichheit näher kommen, als um jede angebliche Größe eben der Art, ſo wird jede dieſer allgemeinen Ausdrückungen (nach meiner Abkürzung) $\frac{m.A^{m-1}.N}{B^{m-1}}$

Das nennt Hr. Gl. the antecedental of the magnitude, which has to B ſuch a ratio, as has to the ratio of A to B, the ratio of R to Q.

12. Bezeichnet man nun, N, the antecedental of A, mit $\mathring{A}$ oder $\overset{a}{A}$, ſo kömmt $\frac{m.A^{m-1}.\mathring{A}}{B^{m-1}}$ oder $\frac{m.A^{m-1}.\overset{a}{A}}{B^{m-1}}$, welches zu $\mathring{A}$ oder $\overset{a}{A}$ die Verhältniß $\frac{m.A^{m-1}}{B^{m-1}} : 1$ hat.

Nachdem man $\frac{R}{Q}$ (mein m) 2; 3; 4... oder $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$... ſetzt, kommen bekannte Fluxionenformeln.

13. Eben das, beweiſt Hr. Gl. noch auf eine andre Art. Es iſt wohl nicht nöthig, auch dieſe herzuſetzen, da jeder leicht ein

einſieht, wie übereinſtimmend dieſes Verfahren mit dem iſt, dadurch man die Verhältniß der Differentialen einer Potenz und ihrer Wurzel findet (in meiner Analyſis des Unendlichen (15)). Daß Hr. Gl. einmahl die Potenz von A+N, darnach die von A—N macht, ändert nichts im Weſentlichen. Wenn A+N: B und A—N: B einander näher kommen als um jeden angeblichen Unterſchied, daß da in ſeinen Dividenden (8; 10) nur das Glied behalten wird, das die erſte Potenz von N enthält, darüber ſagt er nichts weiter, als was ich in (11) überſetzt habe. Wäre das in den vor 16 Jahren herausgegebenen Aufſätzen (1) dargethan, ſo hätte er ſich wohl auf dieſelben beziehen können. Findet es ſich in dieſem eigentlichen Anfange gegenwärtigen Werkes, ... welcher davon der Zeit nach ſo weit entfernt iſt, als dem Orte nach der Urſprung des Nils vom Nile in Aegypten .... ſo iſt nicht abzuſehen, was Hr. Gl. dem ſo lange ſchon erſchienenen hier beygefügt hat; Findet es ſich da nicht, ſo iſt eigentlich das Weſentliche der Fluxionalformel einer Potenz zu rechtfertigen, dem gegenwärtigen Leſer überlaſſen, und Hr. Gl. hat in einem ſehr dunkeln Vortrage gelehrt, was man eben ſo gründlich, deutlicher ſagen kann. Bey ſeinen ratio's, wo es ſo ſchwer iſt ſich herauszufinden, fiel mir ein Brief aus einem alten Ritterbuche ein, der gleich im 1. Capitel des Don Quixote ſteht, da kömmt razon in drey Zeilen doch nur fünfmahl vor.

14. Noch handelt Hr. Gl. von Incrementen und Maaße der Verhältniſſe. Auf ſein Verfahren ſey er zuerſt 1774 gekommen, niemand, ſo viel ihm bekannt, habe dergleichen vor ihm angedeutet. (Eine Größe um etwas wachſen, und um eben daſſelbe abnehmen zu laſſen, und daraus die Fluxionen herzuleiten, war Newtons Gedanke, Princ. L. II. Sect. 2. Lemma 2, ob wohl ſein daſiger Vortrag nicht überzeugend ſchien. In der Schrift: Geometry no Friend to Infidelity, — by Philalethes Cantabrigienſis, Lond. 1734; ſoll 52 S. den Beweis mehr aus einander ſetzen).

15. Seine Grundlehren, erinnert Hr. Gl., ſeyen ganz frey von den Begriffen der Bewegung und der Zeit, welche, genau zu reden, der reinen Geometrie und abſtracten Wiſſenſchaft fremde ſeyen.... Newton habe den Begriff der Geſchwindigkeit vornehmlich deswegen in die Geometrie gebracht, die Lehre der Indiviſibilium zu vermeiden, und ſo Linien, Flächen, Körper, durch Bewegung entſtehen laſſen, anſtatt ſie

aus unendlichen Zahlen, an einander gefügter untheilbarer Theile zuſammen zu ſetzen. In ſeiner Lehre der erſten und letzten Verhältniſſe, nimmt er ſeine Zuflucht zum Begriffe der Zeit, welches da gewiß nicht nöthig war. Hätte der große Mann die Möglichkeit entdeckt, eine allgemeine geometriſche Methode zu finden, die ſich überall anbringen ließe, wo Fluxionen oder erſte und letzte Verhältniſſe vorkommen, ohne daß man Bewegung und Zeit brauchte, ſo würde er ſie vorgezogen haben, da Zeit und Bewegung mit reiner Mathematik nicht natürlich und unzertrennlich verbunden ſind. Die Rechnung der Fluxionen und Differentiale, ſind nur Aeſte, allgemeinere, und ihre Ausdrückungen, ganz numeriſch.

16. Daß Bewegung, Geſchwindigkeiten und Zeiten in Mechanik gehörten, und nicht in reine Mathematik, iſt wohl zuweilen gegen Newtons Darſtellung der Fluxionen erinnert worden, aber mich deucht, ſehr mit Unrecht. Bewegung muß man ja wohl denken, wenn man nach dem dritten Euklidiſchen Poſtulate einen Kreis beſchreiben ſoll. In den Erklärungen des XI Buchs, läßt Euklid Halbkreis, rechtwinklichtes Dreyeck, Rechteck, ſich drehen, um Kugel, Kegel, Cylinder zu begränzen. Hier wird jedesmal nur eine einzige Bewegung betrachtet, alſo an Geſchwindigkeit nicht gedacht. Aber beym Archimed von den Schneckenlinien, kommen gleichförmiges Drehen einer geraden Linie, und gleichförmige Bewegung eines Punctes in ihr vor; auch ſo was bey des Dinoſtratus Quadratrix. Will man den Begriff der Spirallinien allgemein machen, ſo muß man andere Verhältniſſe zwiſchen dem Drehen der Linie und dem Fortgehen des Punctes annehmen. So gehören Bewegungen, Geſchwindigkeit, Zeit, in die Geometrie, nach dem Verfahren der Griechen abgehandelt. An Kraft, die zur Bewegung erfordert wird, denkt man da nicht, und die macht eigentlich die mechaniſche Betrachtung. Die Einwendungen gegen die Fluxionen, zeigen alſo, daß, wer ſie macht, an den Unterſchied zwiſchen Phoronomie und Dynamik nicht denkt, den ich in meiner höhern Mechanik (1793) am Ende des 1. Cap. des 1. Abſchn. erklärt habe.

So viel betrift Herrn Gl. Antecedental Calculus. Noch hat er einige Conſtructionen beygefügt; von dieſen im nächſtfolgenden Hefte.

2. Della

2. Della Specola aſtronomica de' regj ſtudj di Palermo. Libri quattro, di Giuſeppe Piazzi. C. R. (Clerico regolare) Regio Profeſſore d'Aſtronomia, Socio della Reale Accademia delle ſcienze di Napoli, Corriſpondente di Torino, Pietroburgo eto. In Palermo M. DCC. XCII dalla reale Stamperia. Folio 240 Seiten, ohne die Zueignungsſchrift an den König, und die 32 Seiten ſtarke Einleitung, mit 4 Kupfertafeln.

Herr Piazzi, der dem aſtronomiſchen Publikum bereits durch andere kleinere Schriften und Arbeiten als ein vorzüglicher Himmelsbeobachter vortheilhaft bekannt iſt, liefert uns in dem vor uns liegenden Werke, die erſten Früchte einer neuen aſtronomiſchen Anſtalt, die unter dem ſchönſten Himmelsſtriche angelegt, mit vortreflichen Werkzeugen ausgerüſtet, in ſehr kurzer Zeit, mit dem größten Eifer, in den allerthätigſten Gang iſt geſetzt worden. Jeder Freund dieſer erhabenen Wiſſenſchaft wird gewiß mit Begierde dieſen Band ergreifen, und mit Vergnügen die Ausbreitung und Fortſchritte dieſer Wiſſenſchaft darinn bemerken, und der praktiſche Aſtronom wird das Werk nicht unbefriedigt, und auch nicht unbenutzt aus der Hand legen.

So unbedeutend, und voll der alltäglichſten Gemeinplätze Dedicationen an Könige und Fürſten gewöhnlich zu ſeyn pflegen, ſo ſehr zeichnet ſich gegenwärtige an den König von Neapel, durch einige kühne Ausdrücke, und noch kühnere Anſpielungen aus, wie man ſie aus dieſen Gegenden nicht gewohnt iſt, und die Recenſent mit vieler Verwunderung, aber auch mit vielem Vergnügen las. Mit Muth, aber wahr und ſcharf iſt das Bild des Deſpotismus, des Fanatismus und des Monopols mit den Wiſſenſchaften, entworfen, die Italien ſo lange und ſo ſchändlich unterjocht haben. Man ſieht zugleich daraus, daß es Terroriſten von jeher gegeben hat; alſo nicht die Sachen, nur die Namen ſind neu! —

Die Einleitung zu dieſem Werke enthält auf 32 Seiten, Geſchichte und Schickſale der Aſtronomie in Sizilien. Die Aſtronomen haben noch viel zu thun; der Verfaſſer zählt ihre Arbeiten auf, die zu Erweiterung unſerer aſtronomiſchen Kennt-

niſſe noch auf Vollendung warten. Tafeln der Planeten laſſen noch etwas zu wünſchen übrig, noch wenig kennt man ihre Maſſen, Umdrehung um ihre Axen, Geſtalt und Bau.... Wenig wiſſen wir über ihre Trabanten, davon uns vielleicht viele noch ganz unbekannt ſind; von den vorhandenen iſt die Theorie nur aus dem Gröbſten vorgearbeitet; unendlich viele Sterne müſſen noch in Verzeichniſſe gebracht, und die ſchon verzeichneten aufs neue beſtimmt und berichtiget werden; wie viel wiſſen wir gewiſſes von der eignen Bewegung der Fixſterne? und in welcher totalen Unwiſſenheit ſtecken wir nicht über die Anordnung, Anzahl und Umlaufszeiten der Kometen!.... Nur durch Vervielfältigung der Mittel kann man zu dieſen Kenntniſſen gelangen. Italien zählte zu Anfange dieſes Jahrhunderts nur eine einzige Sternwarte, jetzt iſt keine große Hauptſtadt, die nicht ihre Sternwarte hätte, viele werden noch erbauet. Von der Art iſt gegenwärtige, unter dem 38ſten Grad der Breite errichtete neue Anſtalt, deſſen Beſchreibung Herr Piazzi unternimmt. Daß die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften in Sizilien nicht ganz unbekannt waren, und in vormaligen Zeiten mit Erfolg daſelbſt getrieben wurden, erzählt der Hr. Verfaſſer mit wenig Worten.

Die Griechen brachten zuerſt nach dem trojaniſchen Kriege die wenigen Kenntniſſe des Himmels, die ſie in Aſien geſammlet hatten, nach Sizilien. Empedocles, im ſechsten Jahrhundert vor Chr. Geb. zu Agrigent gebohren, kann als der erſte ſizilianiſche Aſtronom angeſehen werden. Er ſchrieb über die Sphäre, ſtellte verſchiedene Unterſuchungen über die Sonne, über die Neigung der Erdaxe, und andere ähnliche Gegenſtände an, man ſchreibt ihm eigene und ſehr ſonderbare Meinungen zu, die uns aber, da nichts von ihm ſelbſt auf uns gekommen, von ſpätern Schriftſtellern ſehr verunſtaltet können überliefert worden ſeyn. So ſchreibt Bailly dem Bayle auf Treu und Glauben die Erklärung nach, die Empedocles von der Schiefe der Erdbahn gegeben haben ſoll: die Sonnenſtrahlen, die von Mittag nach Mitternacht gehen, ſollen die daſelbſt angehäufte verdichtete Luft mit ſolcher Gewalt fortgetrieben haben, daß dadurch der Nordpol niedergedrückt, folglich der ſüdliche gehoben worden. Nicht zu verachtende Schriftſteller ſollen die Meinung geäußert haben, daß durch Empedocles die erſten Ideen der Zentralkräfte in Newton's Kopf geweckt worden.

Aſtro-

Astronomische Wahrheiten kamen immer mehr und mehr in Umlauf. Die Lehre von der Rundung der Erde, die Existenz der Antipoden, die Kugelgestalt der Gestirne, die Ursache des Mondenlichts, seine Verfinsterungen und jene der Sonne, wurden allgemeiner bekannt. Nicetas von Syrakus sprach bestimmter und auch freyer von der Bewegung der Erde, als man es zu unsern Zeiten gethan hat. Der Ruf der Sizilianer von dieser Seite stieg zu einem so hohen Grade, daß sichs die Griechen zu keiner Schande rechneten, Belehrung bey ihnen zu hohlen; selbst der göttliche Plato bediente sich ihres Raths, und sie haben ihm nicht wenig bey Verfertigung seines Kalenders geholfen. Die Erfahrung aller Jahrhunderte lehrt, daß Künste und Wissenschaften nur da gedeihen, und mit gutem Erfolge blühen, wo sie am meisten belohnt, geehrt und aufgemuntert werden. Daher war auch die Astronomie in Syrakus im größten Flor, wo der Geschmack und die Freygebigkeit der Tyrannen die Gelehrten mit Ehre und Belohnungen überhäuften. Es ist freylich nicht zu verhehlen, wie äußerst eingeschränkt noch die damaligen Kenntnisse des Himmels waren. Kaum waren sie zur Verfertigung der Kalender hinreichend, aber auch in Griechenland wußte man, bis zur Gründung der alexandrinischen Schule nicht mehr. Um diese Zeit legte Aristarch von Samos den ersten Grundstein zur wahren Astronomie, Archimedes folgte, oder vielmehr übertraf ihn. So sehr die alexandrinische Schule durch eine ununterbrochene Reihe von zehen Jahrhunderten in Erlangung neuer Kenntnisse immer fortschritt, so verschieden war hinwieder das traurige Loos, das nun Sizilien zufiel. Nachdem Syrakus eingenommen, Archimed ums Leben gebracht, und die Insel unter römische Botmäßigkeit gekommen, überzog die dunkelste Nacht diesen schönen Himmel, und die Astronomie in Sizilien fiel ganz in Vergessenheit. Kaum findet man nach tausend Jahren noch einige Spuren von zwey arabischen Philosophen (auf dieser Insel gebohren, als sie noch von dieser Nation beherrscht wurde) die einige Kenntnisse des Himmels hatten. Der Canonicus di Gregorio spricht von ihnen in seiner schönen und weitläuftigen Sammlung arabischer Denkwürdigkeiten in Sizilien. Essriph ist der Name des einen, Mohamed des andern, auch wird noch eines gewissen Giovanni als sizilianischen Astronomen gedacht, von welchen auf der Bibliothek des heiligen Antonio zu Venedig eine Handschrift aufbewahret wird, tabulae Taletanae super canonibus Arzachelis.

zachelis. Von dieſer Zeit bis zum 14ten Jahrhundert findet ſich niemand, außer einem Baſilianer Mönch, Namens Iſaaco d'Argiro, deſſen mit Ruhm gedacht wird, daß er ſich mit der Sternkunde beſchäftiget habe (1372), aber darinn irrt ſich Herr P. daß von ſeinen Werken nichts im Druck erſchienen ſeyn ſoll. Der berühmte Heidelberger Profeſſor, Jakob Chriſtmann, gab ſeinen Computum graecorum de Paſchate celebrando, griechiſch, mit der lateiniſchen Ueberſetzung und Anmerkungen 1611 in Heidelberg und Augsburg in 4to heraus, von da hat es P. Petau in ſeine Doctr. tempor. T. III. aufgenommen; auch einen zweyten Computum von Iſaaco d'Argiro hat Petau aus einer Handſchrift der königl. Pariſer Bibliothek abgedruckt. Auszüge daraus mit Noten hat Joſ. Scaliger in Leyden herausgegeben. Conrad Daſypodius hat ſeine Scholia in Euclidis Elementorum geometriae ſex priores libros ins Latein. überſetzt, und zu Strasburg drucken laſſen, ſeine übrigen zahlreichen griechiſchen Handſchriften werden auf den Bibliotheken zu Paris, Rom, Wien, Venedig, Oxford u. ſ. w. aufbewahrt. Voß und Gesner melden, daß ſeine aſtronomiſchen Handſchriften zu Augsburg befindlich ſeyen. Einen großen Ruf eines gelehrten, und in der Sternkunde ſehr erfahrnen Mannes erwarb ſich nicht lange nachher (1480) in Catania, Ptolemäus Gallina; allein aus glaubwürdigen ſizilianiſchen Geſchichtſchreibern erhellet ziemlich klar, daß er nichts mehr als ein armſeliger Sterndeuter war. Glorreicher für Sizilien war das 16te Jahrhundert, das in der Perſon des Francesco Maurolico einen wahrhaft großen Mann hervorbrachte, der die dicke Finſterniß, in welcher dieſe Inſel gehüllt lag, wieder zerſtreute; ſeine Schriften wurden in ganz Europa mit vielem Beyfall aufgenommen. Von ſeiner Cosmographia de forma, ſitu, numeroque Coelorum erſchienen in kurzer Zeit vier Auflagen, in Venedig, Paris und Baſel; er ſchrieb einen Tractat: Inſtrumentorum aſtronomicorum, eine Emendationem et Reſtitutionem Conicorum Apollonii Pergaei, und unzählige andere Schriften; er war ein Zeitgenoſſe des großen Copernicus. Aber alſo iſt der Gang des menſchlichen Geiſtes! Maurolico's Geiſt, durch ptolemäiſche Lehren genährt, ſeine lebhafte Einbildungskraft, durch theologiſchen Unſinn erhizt, ſah nichts als Kryſtallſphären, vor- und rücklaufende Bewegungen, und fand alle dieſe widerſinnige und abgeſchmackte ptolemäiſche Träumereyen ſo meiſterhaft, und mit ſo vieler Weisheit angeordnet, daß er ſich nicht entblö-

det,

dete, vom Copernicus folgendes niedrige und fanatiſche Urtheil zu fällen: „Toleratur et Nicolaus Copernicus, qui Solem „fixum ac terram in gyrum circumverti poſuit; et ſentiet „potius, aut flagello, quam reprehenſione dignus eſt. p. 26. „opuſc. mathem. Venet. 1575.“

Obgleich Maurolico's Aſtronomie, die er lehrte, nicht die beſte ſeiner Zeit war, ſo haben doch ſeine häufigen Schriften, ſein ausgebreiteter großer Ruf, ſehr viel dazu beygetragen, einen allgemeinen Durſt nach Kenntniſſen zu verbreiten, und haben gleichſam eine Gährung in einigen Köpfen hervorgebracht, worunter ſich vorzüglich hervorgethan haben: Giov. Ant. Giuffo, aus Palermo gebürtig, (ſeine Schriften ſind doch mehr aſtrologiſchen Inhalts) und Scipio di Lorenzo, auch ein Palermitaner. Er ſchrieb nicht nur einen Diſcorſo del anno 1596, wie uns Hr. P. berichtet, ſondern auch einen nach Aſtrologie riechenden Pronoſtico del anno 1596. (durch einen Druckfehler ſteht 1795). Caſpar Catalano aus Palermo ſchrieb über den Kometen von 1607, und Giov. Paolo Chiaranda, ein Jeſuite, de Sphaera, de Aſtronomia und über Uhren. Allein keiner übertraf an Fleiß und Arbeit den Erzprieſter J. B. Hodierna, geboren zu Raguſa den 15. April 1597. Galilei's Entdeckungen machte er zuerſt in Sizilien bekannt, er gab die erſten Jupiterstrabantentafeln in Palermo 1656, unter dem Titel: Meneologiae Jovis Compendium, ſeu Ephemerides Medicaeorum in uſuductionem, Pars prima heraus. Obgleich dieſe Tafeln ſehr unvollkommen waren (Mem. de Paris, Tom. VIII. p. 321) da Hodierna mit einem ſchlechten Fernrohr, und mit einer noch ſchlechtern Uhr verſehen war, ſo gebührt ihm dennoch die Ehre, daß er zuerſt dieſe Arbeit unternommen und ausgeführt hatte (Thomas Harriot's handſchriftliche Tafeln von dieſen Trabanten ſind von 1610). Hodierna war auch der erſte, der viel vernünftiger über Sonnen- und Mondflecken urtheilte. Er war der Meinung, der Mond ſey nicht ganz ohne Atmoſphäre und unbewohnt. Er ſchrieb über den Ring des Saturnus; ob als Ring, daran zweifelt Recenſent. Von einer beſondern Geſtalt dieſes Planeten, wußte Hodierna wohl, aber in ſeinem Werk Protei coeleſtis vertigines, ſeu Saturni Syſtema, Panorm. 1657 äußert er blos den Gedanken, daß Saturn die Geſtalt eines Sphäroids mit zwey dunklen Flecken habe, und daß er ſich, wenn er ſich um ſeine Axe dreht, in ſehr verſchiedenen Geſtalten zeige. Er ſchrieb

auch über Doppelſterne, Nebelflecken, beſonders aber über die Kometen von 1600, 1618 und 1652. Unter ſeinen vielen Schriften verdient ſein Nunzio della terra. Pan. 1644 bemerkt zu werden; darinn unterſucht er hauptſächlich die ſcheinbaren Durchmeſſer der Sterne. Nach vielen ſinnreichen Schlüſſen und zuſammengeſtellten Beobachtungen bringt er heraus, daß des größten Fixſtern Durchmeſſer nicht über zwey Sekunden betragen könne, und hieraus zieht er nun einen Schluß, den der Leſer gewiß nicht erwarten wird, und der iſt — daß alle Sterne zuſammengenommen bey weitem kleiner als unſere Erde wären! In einem andern Werke: De Syſtemate orbis Cometici, deque admirandis coeli characteribus. Pan. 1654 beſtrebt er ſich aus allen Kräften, das Copernicaniſche Syſtem zu wiederlegen. Gewaltig iſt die Macht des Vorurtheils, und fürchterlich der Druck des Deſpotismus, wenn er ſich der Entwicklung der lichtvollſten Wahrheiten entgegenſtellt!! Hodierna's Zeitgenoſſe war Pietro Emmanuele. Er galt für einen vortrefflichen Aſtronomen und Chemiker ſeiner Zeit (er hatte den Ruf eines Goldkochs, unvorſichtig eingeathmeter Schwefeldunſt brachte ihn den 6. Octob. 1669 ums Leben). Er ſchrieb einen Tractat in ſpaniſcher Sprache über die Meereslänge, 1661, in Palermo gedruckt; dem geſchickten Herausgeber der allgemeinen Litteratur der Marine im Catholicon Hamburg. S. 50 iſt dieſe Schrift entgangen. Auch de la Lande führt ſie in ſeinem Abregé de Navigation hiſtor. theor. et pratique, Paris 1793 nicht an; Recenſent ſetzet daher ihren vollſtändigen Titel hieher: Diſcurſo, en que propone, y reſolve algunos problemas aſtronomicos, hydrographicos para conocer la longitud en el Arco equinocial desde el meridiano, por facilitar los Vaxelles en la navigacion. Palermo. Piedro de Iſola 1661. 4to.

Zu derſelben Zeit lebte auch Pietro Mutalo, aus Meſſina, und ſchrieb über den Kometen 1664. Giov. Franc. Muſarra gab 1705 einen kleinen Tractat: Aſtronomia breviter expoſita heraus. Leonardo Omodei gab zwar nichts im Druck heraus, wird aber als ein großer Aſtronom geſchildert (unter ſeinen Handſchriften befinden ſich Beobachtungen der Kometen von 1652 und 1664, des Jupiters und Saturns und ihrer Trabanten, Beobachtungen von 5 Sonnen- und 4 Mondsfinſterniſſen, Anweiſung wie Fernröhre zu verfertigen u. ſ. f.) In letzteren Zeiten waren Benedetto Maria Caſtrone,

ſtrone, ein Dominicaner, und Gabriele Bonhomo, ein Minorite, berühmt, ſie ſchrieben über die Gnomonik; der erſte gab ſein Werk 1728 heraus, und wird deſſelben in den Leipziger Actis Eruditorum rühmlichſt gedacht. Nach Hrn. P. Urtheil iſt es noch bis jetzt das beſte Werk, das man über dieſen Gegenſtand hat, und Bonhomo gab 1758 einen Auszug daraus. In den neueſten Zeiten hat Sizilien faſt gar keinen Aſtronomen aufzuweiſen, jedoch waren der Herzog di Villaroſa, der Marcheſe di Giarratana, der Pater Spedalieri, Nicolo Cento, der Erzprieſter Sirena, Männer, die mathematiſche Wiſſenſchaften mit Erfolg trieben, und gewiß auch in der Aſtronomie etwas geleiſtet hätten, wenn Klugheit ſie nicht davon zurückgehalten hätte, da ſie ihren guten Namen, ihre Ruhe, und ihre Freyheit nicht auf das Spiel ſetzen wollten. Dies iſt, nach Hr. P., die wahre Urſache (incredibile dictu!) warum man in dieſem Jahrhundert gar keinen Sizilianer findet, der es gewagt hätte, über Aſtronomie in Sizilien zu ſchreiben. Der einzige, den Sizilien noch hervorgebracht hat, hat ſich nicht daſelbſt, ſondern in Toscana ausgezeichnet. Es iſt Leonardo Ximenes, ein Jeſuite, 1717 in Trapani geboren, und 1786 in Florenz geſtorben. Obgleich ihn ſein Beruf als Hydrauliker des Großherzogs von Toscana mehr zum Waſſerbau beſtimmte, ſo hat er dennoch mit dem größten Eifer der practiſchen Aſtronomie obgelegen. Man iſt ihm die Wiederherſtellung des großen florentiniſchen Gnomons, des größten der exiſtirt, und den Paul Toscanelli im Jahr 1500 (de la Lande ſagt 1467) daſelbſt in der Hauptkirche errichtet hatte, ſchuldig, und er hat damit in einer langen Reihe von Jahren Beobachtungen über die Schiefe der Ekliptik, und ihre Sekularabnahme angeſtellt. Jetzt hegt man in Sizilien die Meinung, man wiſſe von der Aſtronomie mehr als nothwendig iſt, und als man davon im bürgerlichen Leben brauche. Sternwarten und Obſerviren hält man für ganz unnöthig, und das Geld, das die Regierung darauf verwendet, für verlohren oder übel angewandt. Vor 200 Jahren machte man dem Galilei dieſelben Fragen und Einwendungen, und die heutigen Sizilianer verdienen alſo noch dieſelbe etwas unhöfliche Antwort, die jener vor 200 Jahren gab! Trauriges aber wahres Bild deſſen, was fortdaurender Deſpotismus und Aberglauben hervorbringen und unverrückt erhalten können!

Das ganze Werk zerfällt in vier Bücher. Im erſten beſchreibt Hr. P. die Sternwarte und das Klima. Im zweyten handelt er von den aſtronomiſchen Werkzeugen. Im dritten giebt er die Beobachtungen, die mit dem ganzen Kreiſe gemacht worden ſind. Im vierten ſetzt er die Länge und Breite der Sternwarte, und die mittlere Strahlenbrechung daſelbſt feſt. Am Ende ſind Witterungs-Beobachtungen angehängt.

Erſtes Buch. Nachdem Hr. P. auf königl. Befehl zwey Jahre in London, und ungefähr ein Jahr in Paris zugebracht hatte, ſo kehrte er im Jahr 1789 mit den, zu Errichtung einer Sternwarte nothwendigen Inſtrumenten verſehen, wieder nach Palermo zurück. Einen ſchicklicheren Platz zu Erbauung einer Sternwarte fand er nirgend, als auf einem Thurme des königl. Pallaſtes. Der damalige Vicekönig in Sizilien, Principe di Caramanico, unterſtützte dieſe neue aſtronomiſche Anſtalt aus allen Kräften, trotz aller der Schwierigkeiten, die man deshalb zu erheben bemüht war, und ſelbſt mit Hintanſetzung und Aufopferung ſeiner eigenen Vortheile und Bequemlichkeiten, da er dieſen Pallaſt ſelbſt bewohnte. Den 1. July 1790 kam aus Neapel die königl. Genehmigung, daß ſowohl die Sternwarte, als auch dem Director derſelben, eine bequeme Wohnung in dem königl. Pallaſt erbauet werden ſollte. So behutſam Hr. P. ſich bey Beſchreibung dieſer Umſtände benimmt, ſo erblickt man doch auf allen Seiten die häßlichen Spuren der Dummheit und Unwiſſenheit, die ein ſolches Unternehmen zu vereiteln ſuchten, und aus einer aus Herrn de la Lande's Geſchichte der Aſtronomie für 1790 in einer Note angeführten Stelle kann man ziemlich deutlich erkennen, welchen ſchweren Kampf ſelbſt ſein Mecän deshalb zu beſtehen gehabt hat. Da nach den letzten Zeitungsnachrichten der Principe di Caramanico mit Tode abgegangen iſt, ſo hat nun auch die Aſtronomie in Sizilien ihren eifrigſten und vielleicht einzigen Beſchützer verlohren, und die Götter wiſſen, welches Schickſal nun der neuen Palermiſchen Sternwarte bevorſtehet.

Der Thurm des königl. Pallaſtes, auf welchem die Sternwarte erbauet worden, wird gemeiniglich der Thurm von St. Ninfa genannt, und iſt von ſarazeniſcher Bauart, wie einige Verzierungen, die noch beſtehen, beweiſen. Aus dem neuerlich aufgefundenen arabiſchen Codex erfährt man, daß es das erſte Wohngebäude war, das die Sarazenen ihren Groß-Emirs auf-

aufgeführt haben ſollen. Dieſer Thurm iſt ſehr ſolide, der höchſte in Palermo, ruht auf lebendigem Fels, und iſt von viereckigter Geſtalt; ſeine Grundfläche hat 90 engliſche Fuß in die Länge, 69 in die Breite, und 115 in die Höhe nach der Seeſeite, aber nur 89 auf der entgegengeſetzten. Die Grundmauern ſind 17 Fuß ſtark, und nehmen nachher in der Höhe verhältnißmäßig bis auf 6 Fuß ab. Nach Nordweſt und Südoſt iſt er mit den viel niedrigern königl. Pallaſt verbunden; nach Nordoſt iſt ein großer Platz, nach Südweſt ſind Höfe und Gärten, ganz oben iſt er mit einer großen Terraſſe bedeckt, auf welcher eigentlich das neue Gebäude aufgeführt iſt, womit im July 1790 der Anfang gemacht, und ſolches im Februar 1791 vollendet wurde. Es ſteht auf der Seite nach den Gärten zu, und erſtreckt ſich von N. N. O. nach S. S. O. Herr P. hat dieſen Theil des Thurms vorzüglich deswegen gewählt, weil an einem Ende deſſelben ſchon ein kleines Thürmchen, und am andern Ende ein Pfeiler vorhanden war, der bis auf das unterſte Erdgeſchoß herabgieng, und vormals die Spindel einer Wendeltreppe geweſen zu ſeyn ſchien. Man hat alſo die ſchon vorhandenen alten Mauern des Thürmchens beyderſeits, von einem Ende zum andern des großen Thurms, verlängert, und das Ganze in drey Abtheilungen getheilt: die nördlichſte ward für das Mittagsfernrohr, die mittelſte zur Galerie, und die dritte, die in ihrer Mitte den obbemeldten Pfeiler hat, zum ganzen Kreiſe beſtimmt. Auf der IVten Kupferplatte iſt der Grundriß des alten Thurms, und das darauf geſetzte neue Gebäude vorgeſtellt.

Die viereckigte Stube zum Mittagsfernrohre hat 14 Fuß in der Breite, 15 in der Länge, und eben ſo viel in der Höhe (Hr. P. bedient ſich durchgehends des engliſchen Maßes). Das Inſtrument ruht auf zwey freyſtehenden Pfeilern, die auf einem gewölbten Bogen ſtehen; die Ausſicht geht ununterbrochen vom ſüdlichen bis zum nördlichen Horizont. Die zweyte Stube, oder vielmehr Galerie, die zehn Fenſter hat, zu beiden Seiten fünf, hat 52 Fuß in der Länge, 16 Fuß Breite und Höhe, und iſt zu den Vorleſungen in der praktiſchen Aſtronomie, und zu Aufbehaltung der übrigen Inſtrumente beſtimmt. Die dritte Stube, wo der ganze Kreis aufgeſtellt iſt, hat einen zirkelrunden ſteinernen Fußboden, 14 Fuß im Durchmeſſer, auf deſſen äußerſter Peripherie acht Säulen nach den acht Hauptwinden im Kreis herumgeſtellt ſind, und gleichſam die Form eines kleinen Tempels vorſtellen. Dieſe 8 Säulen ſind

von

von Marmor, acht Fuß hoch, tragen ein marmornes Haupt geſimſe, auf welchem das bewegliche runde Dach aufliegt. In der Mitte dieſes ſogenannten Tempels erhebt ſich ein viereckigtes ſteinernes Poſtament, in welchem ein anderes zylinderförmiges eingemauert iſt, das $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer und $1\frac{1}{2}$ Fuß Höhe hat. Auf dieſem letztern ſteht eigentlich das ganze Inſtrument, es erhebt ſich aber nur $\frac{1}{2}$ Fuß über die Fläche des erſten Poſtaments; das ganze ſitzt auf dem ſchon oben erwähnten Grundpfeiler. Das große, unterſte, viereckigte Poſtament, läßt auf dem runden, ſteinernen Fußboden einen Raum von drey Zirkelabſchnitten übrig (denn das Poſtament iſt auf einer Seite an die Wand angebaut), die einen Gang um das Inſtrument bilden, auf welchem man ſich bequem und ſicher um daſſelbe herumbewegen kann. Das ganze umſchließt ein bewegliches rundes Dach, das oben eine Kugelgeſtalt hat, ſich aber unten zylindriſch endigt. Obgleich es von einem beträchtlichen Gewichte iſt, ſo läßt es ſich doch ſehr leicht auf meſſingenen Rollen herumbewegen. Das Modell von dieſem Dach, ſo wie von den Fallthüren bey dem Mittagsfernrohre, ſind von der Erfindung des Herrn Ramsden.

Die Höhe der Sternwarte über der Meeresfläche beſtimmte Hr. P. mittelſt eines Ramsdenſchen Ziſternen-Barometers, deſſen Eintheilungen und Vorrichtungen ſo vollkommen waren, daß er ſehr beſtimmt eine Veränderung eines Tauſendtheils eines Zolles an der Queckſilberſäule bemerken konnte. Den Zeiger des Vernier bey Meſſung des Barometerſtandes ſtellt er immer ſo, daß deſſen unterſte Kante eine Tangente auf die Wölbung der inneren Queckſilberſäule ausmacht; damit hat er nach wiederholten Beobachtungen, ſowohl auf der Sternwarte als am Strande, bis auf ſehr geringe Unterſchiede (der größte 9 Fuß) die mittlere Höhe des Fußbodens der Sternwarte über die Meeresfläche 245 engl. Fuß gefunden (durch einen Druckfehler ſteht 247 Fuß). Es folgt nun eine Tafel dieſer Barometer- und Thermometerſtände; die Berechnung macht er nach General Roy's Methode und Vorſchrift. Nun maß er auch, um die barometriſchen Meſſungen zu verificiren, geometriſch und zu wiederholtenmalen die Höhe der Laterne des Mola, und beobachtete ſowohl oben die Tiefen-Winkel, als auch unten am Fuß des Molo die Höhen-Winkel, und fand hieraus Höhe der Sternwarte über der Meeresfläche 237 Fuß; nur 8 Fuß kleiner als durch die Barometer. Er ſchließt hieraus,

aus, daß Herrn General Roy's barometriſche Berechnungsta-
feln nur einer ſehr kleinen Verbeſſerung im dortigen Klima
bedürfen. Jedoch bevor er darüber mit Gewißheit entſcheiden
mag, glaubt er, daß eine noch größere Anzahl von Beobach-
tungen nothwendig ſeyen, wozu er bereits eine ziemliche An-
zahl geſammlet hat, und noch damit fortfährt. Nun folgen
zwey Tafeln, davon die eine Entfernungen einiger Orte vom
Mittelpunkte des großen Kreiſes auf der Sternwarte, und
ihre Höhen über die Meeresfläche enthält; die andere die Ba-
rometer- und Thermometerſtände, die an allen dieſen Orten den
2ten May 1792 beobachtet worden. Doch ſchreibt Hr. P.
allen dieſen gefundenen Maßen nicht die äußerſte Genauigkeit
zu, ſowohl wegen der Ungewißheit der terreſtriſchen Strahlen-
brechung, als auch wegen der Unvollkommenheit barometri-
ſcher Meſſungen.

Der Geſichtskreis der Sternwarte iſt nicht allenthalben
ſo frey, wie es zu wünſchen wäre. Palermo liegt am Ufer des
Meeres in einem angenehmen Thale, von einer großen Berg-
kette gebildet, die abwechſelnde Höhen haben, die ſich von
Oſten über Süden nach Weſten erſtrekken, und den Horizont
nur gegen Nordoſt ganz offen laſſen. In der Mittagsfläche
liegt im Norden der Monte Pellegrino, etwa 5° über den Ho-
rizont; in Süden erhebt ſich der Mezzagno, ungefähr $6\frac{1}{2}$°
hoch; der Monte Cuccio liegt gegen Abend; und der Monte
di Falſo-Mele nach Südoſt. Dieſe beyden letzten ſind die
höchſten Berge im ganzen Geſichtskreiſe, ſie erſcheinen beyde,
von der Sternwarte geſehen, unter einem Winkel von 8°. Noch
andere Berge, die nicht zu dieſer Gebirgskette gehören, erblickt
man gegen Oſten, worunter der berühmte Nebrodes der Alten
(heut zu Tage Madonia), der Etna und andere; allein ſie
erheben ſich, wegen ihrer allzugroßen Entfernung, nur ſehr we-
nig über den Horizont. In der darauf folgenden Tafel kom-
men nun, die mit dem ganzen Kreiſe beobachteten Azimuthe
der vornehmſten Gegenſtände dieſer Gebirgsreihe vor. Die Inſel
Uſtica kann man von der Sternwarte nicht ſehen, der Monte
Pellegrino deckt ſie; daher Hr. P. den Azimuth dieſer Inſel
vom Thurm des M. Pellegrino bloß mit einer Magnetnadel
gemeſſen hat, die keine große Genauigkeit geben kann. (Henri
Michelot Piſote hauturier, in ſeinem Portulan de la Mer
méditerranée. Marſeille 1775. p. 323. ſetzt die Breite dieſer
Inſel, die er ſelbſt beobachtet hat, auf 38° 43′.) Von den

ſ Eolliſchen, itzt Lippariſchen Inſeln, kann man nur zwey ſehen, die übrigen ſind zu entfernt, und werden vom Capo Zaffrano (Cap Sabran) bedeckt.

Die Witterung zu Palermo gehört unter die beſten von Europa, um ein geſundes, langes und angenehmes Leben zu führen. Die Regen ſind nicht häufig, aber ſtark, Stürme ſelten, noch ſeltner Donner; auch ſind wenige Tage im Jahre, an welchen die Sonne ſich nicht blicken ließ. Südwinde herrſchen vorzugsweiſe, aber ſie reinigen den Dunſtkreis. Die Kälte iſt nicht ſtrenge, noch die Hitze übermäßig. Im ſtärkſten Winter ſinkt das Queckſilber in Fahrenheits Thermometer nie unter 32° (den Gefrierpunkt); im Sommer ſteigt es nie über 90° (26° Reaumur) gewöhnlich iſt der mittlere Stand 75° im Sommer (19° R.), und 50° im Winter (+ 8° R.). Die nordöſtlichen Winde, die häufig im Sommer wehen, mäßigen die Hitze, ſind ſehr geſund und erfriſchend. Den Grad der Feuchtigkeit, den Hr. P. nach einem de Lucſchen Hygrometer beobachtete, fand er gewöhnlich zwiſchen 40 und 50°, ein einziges mahl iſt es bey einem heftigen Oſtwinde bis auf 85° geſtiegen, einandermahl iſt es bey einem Südoſtwind bis auf 24° geſunken. Die Erdbeben, die ſo manche ſizilianiſche Stadt hart mitgenommen haben, ſcheinen in Palermo nicht ſehr furchtbar zu ſeyn. Bey dem ſchrecklichen Erdbeben vom Jahre 1783, das ganz Calabrien zu Grunde gerichtet, und die Stadt Meſſina ſo zu ſagen dem Erdboden gleich gemacht hat, erlitt Palermo gar keinen Schaden. In 12 Jahren, die Hr. P. in dieſer Stadt verlebt hat, hat er nur im Jahr 1791 zwey ſchwache Stöße geſpührt; und zwey andremale, als er das Mittagsfernrohr berichtigte, wurde er gewahr, daß die Erde nicht ganz ruhig war. Bey alledem iſt der Himmel zu Palermo zu aſtronomiſchen Beobachtungen nicht der günſtigſte. Obgleich es wenige Tage giebt, an denen man die Sonne nicht zu ſehen bekäme, ſo giebt es hinwieder wenige Tage ohne Wolken. Beſonders auf der Mittagsſeite, im Herbſt und im Winter, ſind die herrſchenden Winde von Abend, und von Südweſt; im Frühjahr und im Sommer von Süd und Südoſt, und dieſe letzteren ſind ſehr heftig, wehen eine große Menge leichter Wolken zuſammen, machen die Luft trübe, und verbreiten über den ganzen Himmel gleichſam eine Art von dünnen, bisweilen undurchſichtigen Schleyer. Der heiterſte und günſtigſte Himmel zum Beobachten, pflegt ſich nur in den Monaten Junius,

Julius,

Julius, Auguſt und Januar einzuſtellen, in den übrigen Monaten iſt nicht viel zu machen, und wenn ja, hie und da eine Beobachtung gelingt, ſo iſt es mehr die Frucht der Beharrlichkeit und der anhaltenden Geduld, als eine freywillige Gabe des Himmels. Sehr oft wurden, im Augenblicke der gehofften Erfüllung, beſonders bey Tags-Beobachtungen der Venus und des Merkurs, alle Erwartungen vereitelt. Einen genauen Begriff von dem dortigen Himmelszuſtande kann man ſich am beſten aus den, dem Werke angehängten, genauen Witterungsbeobachtungen machen.

(Die Fortſetzung folgt im nächſten Hefte.)

## VIII.

## Auszüge aus Briefen, Nachrichten und andere Anzeigen.

### 1. Aus einem Briefe des Herrn Wurm an Herrn O. W. M. v. Zach.

Märtingen, den 7. Nov. 1794.

Bey Gelegenheit meiner Berechnung des 24 Durchmeſſers habe ich zugleich die Parallaxenrechnung für die Occultation dieſes Planeten den 7. April 1792 vollſtändig übernehmen müſſen. Da ich nun die Hauptſache ſchon hatte, ſo habe ich zugleich die Meridianunterſchiede der ſieben im Aufſatze gedachten Oerter hergeleitet; zur Vergleichung ſetze ich hier blos die für Gotha und Paris hergeleitete Zeit der wahren Zuſammenkunft her:

Wahre ♂ 24 ☾ in wahrer Zeit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gotha, aus dem Eintritt | 12ᵘ 13′ 40″,4 | + 1,94 Δα | − 0,96 Δβ + 0,26 Δπ |
| " " Austritt | 12 13 39, 0 | − 2,01 Δα | + 1,09 Δβ + 1,54 Δπ |
| Paris, aus dem Eintritt | 11 40 8, 7 | + 1,74 Δα | − 0,46 Δβ + 0,83 Δπ |
| " " Austritt | 11 40 10, 3 | − 1,78 Δα | + 0,59 Δβ + 1,28 Δπ |
| Manheim, a. d. Eintritt | 12 4 39, 9 | + 1,83 Δα | − 0,73 Δβ + 0,50 Δπ |
| " " Austritt | 12 4 39, 7 | − 1,89 Δα | + 0,87 Δβ + 1,38 Δπ |

Aus dieſen Angaben habe ich nach Gerſtner's Methode (Aſtr. J. B. 1792) durch Subtraction des Austritts vom Eintritte nachfolgende 3 Gleichungen gefunden:

$+1'',4+3,95\,\Delta\alpha-2,05\,\Delta B-1,28\,\Delta\pi=0$
$-1'',6+3,52\,\Delta\alpha-1,05\,\Delta B-0,45\,\Delta\pi=0$
$+0'',2+3,72\,\Delta\alpha-1,60\,\Delta B-0,88\,\Delta\pi=0$

Daraus habe ich die Werthe von $\Delta\alpha$ entwickelt $=+1'',9556$ $\Delta B=+6'',3041$ und $\Delta\pi=-2'',9677$. Für Gotha und Paris finde ich nach geſchehener Subſtitution der angezeigten Werthe die wahre Conjunction:

| Aus dem Eintritt | | | | Aus dem Austritt | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gotha | $12^u$ | 13′ | 37″,37 | Gotha | $12^u$ | 13′ | 37″,37 |
| Paris | 11 | 40 | 6, 74 | Paris | 11 | 40 | 6, 74 |
| | | 33′ | 30″,63 | | | 33′ | 30″,63 |

Unterſchiede der Meridiane von Paris und Gotha-Friedenſtein.

Die Chronometer und Timekeeper gaben für Gotha-Friedenſtein 33′ 30″,04 (Berlin. Aſtr. J. B. 1795. S. 249) Obige Angabe differirt um 0″,59.

Ueber die Störungen des ♄ und des ♃ durch den Uranus habe ich einige Berechnungen gemacht; ich finde für die vom Commutationswinkel abhängige Perturbation des Saturns durch Uranus — 8″, 799 ſin t + 12″,805 ſin 2t + 1″, 386 ſin 3t+0″,219 ſin 4t; des ♃ durch den Uranus — 1″,050 ſin t +0″,533 ſin 2t+0″,044 ſin 3t. (das Maximum $=\pm 1'',34$) der Winkel t iſt $=$ ♄ — ☉ oder ♃ — ☉. Das Argument braucht nicht erſt berechnet zu werden, es ſtehet ſchon in de Lambre's Uranustafeln, und iſt daſelbſt Arg. II. für die Perturbation des ♄, und Arg. VII. für die des ♃ durch Uranus. Die Perturbation des Jupiters habe ich bereits in folgende kleine Tafel gebracht:

Per-

Perturbatio Longit. ☿ ab ☉ Arg = Arg II apud de Lambre in tabulis ☉.

| Arg. | 0+ | 100 ± | 200 — | 300 — | 400 — | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0″,00 | 8″,45 | 1″,86 | 16″,50 | 16″,16 | 100 |
| 10 | 1, 37 | 8, 26 | 3, 55 | 17, 32 | 15, 09 | 90 |
| 20 | 2, 70 | 7, 85 | 5, 25 | 17, 96 | 13, 86 | 80 |
| 30 | 3, 96 | 7, 22 | 6, 94 | 18, 41 | 12, 48 | 70 |
| 40 | 5, 11 | 6, 39 | 8, 59 | 18, 67 | 10, 97 | 60 |
| 50 | 6, 14 | 5, 36 | 10, 18 | 18, 74 | 9, 33 | 50 |
| 60 | 7, 00 | 4, 12 | 11, 69 | 18, 61 | 7, 59 | 40 |
| 70 | 7, 68 | 2, 81 | 13, 10 | 18, 28 | 5, 77 | 30 |
| 80 | 8, 15 | 1, 34 | 14, 38 | 17, 76 | 3, 88 | 20 |
| 90 | 8, 41 | 0, 22 | 15, 52 | 17, 05 | 1, 95 | 10 |
| 100 | 8, 45 | 1, 86 | 16, 50 | 16, 16 | 0, 00 | 0 |
| | 900 — | 800 ∓ | 700 + | 600 + | 500 + | Arg. |

## 2. Aus einem Schreiben des Herrn O. W. M. von Zach an den Herausgeber.

Daß gute und gründliche mathematische und astronomische Kenntnisse und Einsichten in Deutschland auch unter einer Gattung Männer, bey denen man sie so selten sucht, und noch seltner zu finden pflegt, täglich zunehmen, und man schon die schönsten und nützlichsten Früchte daraus hervorgehen sieht, darüber werden Ew. — sich gewiß mit mir erfreuen, und vielleicht folgende Notiz Ihrer gütigen Aufmerksamkeit und einer gefälligen Bekanntmachung nicht unwerth halten.

Unterm 14ten October 1794 beehrte mich aus Dillingen der fürstl. Augsburgische Landgeometer, Herr Ignaz Ambros Ama, mit einem Schreiben, worinn er mich benachrichtigte, wie er die dortige Gegend, besonders das Fürstenthum Augsburg trigonometrisch vermessen, und mit den Hülfsmitteln, die er erlangen konnte, eine Karte davon entworfen habe. Früher unternahm er diese Vermessung mit von ihm selbst gebauten Werkzeugen,

zeugen. Nachdem sie ihm aber kein Genüge geleistet hatten, so kaufte er sich eine getheilte Branderische Scheibe, und einen 6zolligen Hadleyschen Sextanen von demselben Künstler, aber ohne Fernglas. Damit vermaß er die Sonthofische Gegend, welche allein 11½ geographische Meilen enthält, trigonometrisch; der Hadleysche Sextant wurde ihm bey diesem Geschäft, wegen des bequemen Transports und der Beykommung an die Standpunkte, die am schicklichsten auf Kirchthürmen zu suchen, und wo keine Stativinstrumente anzubringen sind, vorzüglich lieb, und er erlangte bald (da er ein sehr scharfes Auge hat) die Fertigkeit mit diesem kleinen Werkzeuge, Winkel bis auf eine Minute zu bestimmen. Bey Winkelmessung auf Thürmen vernachlässigte er das Centriren derselben nie; die höheren und niederen Objecte suchte er entweder durch genau ausgesteckte Stäbe, oder durch Hülfe einer Kippregel, die mit einem Niveau à bulle d'air versehen ist, auf den Horizont des Standorts zu bringen; manchmal visirte er die schiefen Winkel, und berechnete Winkel und Seiten auf den Horizont. Zur Verzeichnung der Situation bediente er sich des Meßtisches, welcher mit Niveaux achromatischen 14 Zoll langen Fernrohr, und einer 5zölligen starken Magnetnadel mit Glashütchen versehen war, nach Art des Hogreve oder des Dupain de Montesson. Der Parallelmethode, wie Bugge vorschlägt, und Dännemark vermessen worden, konnte er sich nur bey Flurvermessungen im Ackerfeld und Wiesen bedienen, niemals aber im Gebirge, und bey zusammenhängenden Waldungen. So entstand seine Karte, dessen Zusammensetzung für ihn größtentheils Nebenbeschäftigung war, und aus Liebe zur Wissenschaft geschah. Nun wünschte er sie auch orientiren, und ihr die geographische Bestimmung geben zu können. Dieser Gedanke war für ihn desto anziehender, da ihn bisher nicht eine einzige Karte zu Gesichte gekommen war, worauf die Lage der dortigen Gegend nur erträglich angegeben wäre. Herrn Bode's Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels, und seine Karten, lernten ihn den Himmel kennen, und Herr Bugge den wohlfeilsten Sector. Diesen baute er sich selbst, weil der Grahamische, Bougerische, ꝛc. ... für ihn zu künstlich waren; die Eintheilung machte er nach Birdischer Art mit Stangelzirkel, das Centrum wurde aus Metall, der Limbus aus Messing, die Unter- und Oberstifte aus polirtem Stahl, der Körper aber aus geradstammigen Fichtenholz so zusammengefügt, verleimt und verbunden, daß

keine

keine Beugung ſtatt haben konnte, auch aller Schwindung möglichſtermaßen abgeholfen wurde.

Mit dieſem Sector, deſſen Radius 10 Fuß war, beobachtete er nun die Sonthofer Polhöhe durch viele Tagebeobachtungen ſowohl der Capella als β Aurigä, ſowohl am Limbo weſtlich, als öſtlich gekehrt. Eine Reihe dieſer Beobachtungen hat er beygefügt, und ich finde, daß ihre größten Unterſchiede bey gemeſſenen Abſtänden vom Scheitel ein einzigesmal auf 6″ gieng. Aus Capella fand er die Polhöhe von Sonthofen 47° 31′ 7″ aus β Aurigä 47° 31′ 6½″. Auch die Länge von dieſem Ort ſuchte er ebenfalls zu beſtimmen. Zu dem Ende ſchafte er ſich eine gut gearbeitete Pendeluhr an, mit einer Compenſationsſtange nach Köhleriſcher Manier von Fichtenholz und Meſſing; die Linſe hat 20 ℔ am Gewicht, und die Uhr bleibt während dem Aufziehen in ungeſtöhrtem Gange. Ein beygelegtes Regiſter von ihrem Gange zeigt, daß die Uhr nicht ſchlecht iſt, nur vermuther er, daß die Compenſation nicht genau genug iſt. Da die Pendelſtange genau nach des Herrn Inſpektor Köhlers Vorſchlage gebauet iſt, ſo iſt er, eben ſo, wie Herr Oberamtmann Schröter in Lilienthal, überzeugt, daß die Länge des Holzes zu kurz, die obern und untern Meſſingtheile aber zu lang ſind. Dieſes beſtätigte der Gang ſeiner Pendeluhr gegen Ende des März und Aprils 1791, da in Sonthofen beſonders plötzliche kalte Witterung einfiel. In Ermangelung eines Quadranten, oder ſonſt dazu ſchicklichen Werkzeugs, mußte nun auch ſein Zenithſector dazu dienen, correſpondirende Sonnenhöhen zu Findung der wahren Zeit, und zu Berichtigung des Ganges der Pendeluhr zu nehmen. In dieſer Abſicht brachte er an des Sektor's Säule ein 2ſchuhiges Fernrohr an, mit einem Branderiſchen Glasmikrometer verſehen, und nahm ſolchergeſtalt übereinſtimmende Vor- und Nachmittägige Sonnenhöhen. Zu Erfindung der geographiſchen Länge von Sonthofen beobachtete er die beyden Sonnenfinſterniſſe vom 4ten Juny 1788 und 3ten April 1791, und correſpondirte deshalb mit dem verdienſtvollen nun ſeligen Hrn. Pater Fixlmillner in Cremsmünſter. Nach deſſelben parallactiſchen Berechnungen fand er aus der erſten Beobachtung Sonthofen weſtlicher als Paris = 31′ 40″ in Zeit, nach der zweyten aber 31′ 24″,8. Wenn man die ſchwache Vergrößerung bedenkt, deſſen ſich Herr Ama bedienen mußte, auch in Erwägung ziehet, daß ſein Fernrohr chromatiſch war, ſo muß man billig bewundern, daß er ſo genau beobachtet, und bey

der hergeleiteten Meridiandifferenz kein größerer Unterſchied ſtatt gefunden hat. Er zog hieraus das Mittel, und folgerte demnach die Länge von Sonthofen = 27° 53′ 6″ öſtlich. Zur fernern Berichtigung dieſer Länge hat Herr Ama noch folgende Sternbedeckungen vom Monde beobachtet: 1) Den 14ten März 1791 Eintritt des λ in den Zwillingen um 10ᵘ 46′ 20″,7 W. Z. 2) Den 16ten März 1791 Eintritt des κ im Krebs um 13ᵘ 2′ 31″,7 W. Z. 3) Den 7ten April 1791 Eintritt des 1 ♉ im Stier um 7ᵘ 44′ 52″,5 W. Z. und des 2 ♉ um 8ᵘ 19′ 36″ W. Z. Wegen Mangel an guten und ſtark vergrößernden Seherröhren konnte er die Austritte nie ſcharf beobachten; hierzu wünſcht er nun die correſpondirenden Beobachtungen aus andern ſchon genau beſtimmten Orten. In Dillingen hat Herr Ama noch nichts Aſtronomiſches vornehmen können, weil ſein Sector noch in Sonthofen liegt, und er in Dillingen noch keine bequeme Wohnung dazu hat erhalten können. Doch hat er einſtweilen Sonthofen durch eine Triangelreihe mit Dillingen verbunden, und nach Lamberts Manier berechnet. Hiernach läge Dillingen unter der Breite von 48° 34′, und Länge 28° 7′. Nach Caſſini de Thury wäre die Breite 48° 33′ 20″, die Länge 28° 5′ 40″; ſtimmte alſo ſehr gut mit Hrn. Ama's Angabe.

Nun wünſchte Herr Ama nichts ſehnlicher, als einen guten engliſchen Sextanten mit achromatiſchem Fernrohr, und künſtlichem Horizont zu erhalten. Mit einem ſolchen vortreflichen Werkzeuge wolle er die ganze trigonometriſche Operation wiederhohlen, das ganze Netz von Dreyecken von vorne berechnen, es durch beobachtete Sonnenazimuthe orientiren, und an mehreren Orten Pohlhöhen nehmen. Sein gnädigſter Landesherr, des Churfürſten von Trier Durchlaucht, den er bey ſeiner Anweſenheit in Augsburg, ſeine Arbeit vorzuzeigen die Ehre hatte, bezeugten Ihr gnädiges Wohlgefallen, ermunterten und unterſtützten ihn auf die allerhuldreichſte Art, und durch fernere Verwendung des verdienſtvollen Herrn geheimen Raths von Epplen, der ſelbſt Wiſſenſchaften treibt, liebt und ſchätzt, wurde es beſchloſſen, einen engliſchen Hadleyſchen Sextanten, ſamt Zubehör, beyzuſchaffen. Herr Ama wandte ſich deshalb an mich, und ich hatte das Vergnügen, ihm unterm 18ten December 1794 einen eben aus London erhaltenen Dollondiſchen 7zolligen Sextanten mit ſilbernem Gradbogen, ſamt künſtlichem Horizont und Niveau zuzuſchicken. Ich hoffe, daß wir bald ſichtbare und weſentliche Spuren davon erhalten werden,

den, daß dieser Sextant in so geschikte Hände gekommen ist, und ich kann Hofnung machen, daß wir bald eine gute Karte des Hochstifts, und überhaupt, aus einer interessanten Gegend Deutschlands geographische Kenntnisse erhalten werden, von der zur Zeit nur noch so wenig bekannt ist. Herr Ama hatte die Güte, mir eine kleine Skizze seiner Karte, und das ganze trigonometrische Netz zuzuschicken; seine Fixpunkte sind meist Signale auf hohen Bergen, oder Kirchthürme. Die Gegend um Sonthofen ist eine schöne flache Gegend, die aber ganz mit den höchsten Bergen umschlossen ist. Ungefähr 19600 Augsburger Fuß von Sonthofen liegt der zum Vorgebirge gehörige 3156 Fuß über Sonthofen erhabne Grintenberg, der kaum die halbe Höhe des weiter gegen Mittag liegenden Hochgebirges hat. Auf diesem Fixpunkte ist die herrlichste Aussicht, weil er das übrige Vorgebirge beherrscht, und viel höher als dasselbe ist; mehr als 180° im Kreisbogen sieht man gegen Norden flaches Land, der übrige Kreisbogen hat aber gegen Süden nach Tyrol zu, Hochgebirge, Gletscher und Verner vor sich, zwischen welchen die fruchtbarsten, schönsten, ebnen Thäler liegen. Auf diesem Berge ist der Bodensee von Langenargen, Buchhorn gegen Konstanz ganz zu übersehen; im Untersee zeigt sich die Insel Reichenau deutlich, ob sie gleich beynahe 30 Stunden Wegs entfernt ist. Man sieht von diesem Standpunkte ferner die Schlösser Waldburg, Wolfegg, Zeil, Kronburg, Babenhausen, Kirchheim, Oberdorf, Lichtenberg, Imenhausen; dann die Städte Konstanz, Buchhorn, beyde am Bodensee, Wangen, Kempten, Memmingen, Mindelheim, Kaufbayrn, Augsburg, Fridberg, Landsperg, Schongau, und eine unzählige Menge von Dörfern. Vom Fuße des Berges anfangend, kann er leicht in 2 Stunden bestiegen werden. Die mittlere Barometerhöhe in Sonthofen ist 25" 9‴ Pariser Maaß. Von einem andern Standpunkte, der Berg Säurling genannt, kann man Augsburg und München in Bayern sehen; auch auf dem Hochpeisenberg kann man beyde Städte mit bloßem Auge sehen, obgleich sie gegen 13 Stunden Wegs von selben entfernt liegen. Sonst sind die bey Sonthofen liegenden Berge, der Widderstein, Biberhorn, Trettachspitz, und Wachsenberg in der Gegend von Dillingen alle aus ihrer Gestalt deutlich zu unterscheiden. Die Sonthofische Meridianlinie bestimmte Herr Ama mehr als 40mal mittelst der Uhr, und correspondirenden Sonnenhöhen, und bemerkte selbige an einem Felsen im Hochgebirge, welcher gegen 7 Stunden Wegs entfernt lag, an

und Mondsbewegungen im Mittel um das Jahr 1756 angesetzt haben, auch obige jährliche Verbesserung von 0″, 10′ von dieser Zeit an, angebracht werden müsse, und hiernach nach dem Verhältniß von 1″ in 10 Jahren, von der Epoche nach 1756 abgezogen, und zu den Epochen, die vor 1756 fallen, hinzugethan werden müssen.

Die Längen derjenigen Sterne aus Dr. Bradley's Sternverzeichniß, das im Nautical Almanac 1773 abgedruckt stehet, sind gleichfalls aus Beobachtungen, die um das Jahr 1756 angestellt, hergeleitet, und vermittelst der falschen jährlichen Präcession 50″, 35 auf das Jahr 1760 reducirt worden. Diese müssen nun erstlich mit derselben fehlerhaften Präcession 50″, 35 wieder auf 1756 zurückreducirt werden, und dann erst wieder auf künftige, oder verflossene Zeiten, mit der wahren jährlichen Vorrückung 50″, 20 von vorne berechnet, und ferner durch die Gleichung der oberwähnten Sekularbewegung, nach der 44sten Maskelynischen Tafel verbessert werden. Die Breiten, die in demselben Sternverzeichnisse stehen, werden ebenfalls durch die Sekulargleichung der 45sten Tafel, nach der, dem Jahr 1756 vor- oder nachgehenden Anzahl Jahre verbessert. In dem Zeitraume von 41 Jahren, die seit 1756 bis 1797 verflossen sind, betragen diese Verbesserungen 4″, 1 in den Epochen der Längen des Mondes oder der Sonne, 13″ in der Länge, und 20″ in der Breite mancher Sterne, von welchen die Mondsabstände in den Nautical Almanac berechnet werden. Nach diesen Vorschriften sind auch die Nautical Almanacs von 1797 bis 1800 berechnet worden. Um diese Verbesserungen durch Beyspiele zu erläutern, so werden noch folgende Elemente für den Anfang des 1797sten Jahres angegeben:

Der Sonne mittlere Länge wird seyn $9^{s}\ 10°\ 37'\ 28'',6$; die Länge ihres Apogeums $3^{s}\ 9°\ 29'\ 11'',9$; die mittlere Länge des Mondes $10^{s}\ 7°\ 34'\ 30'',7$, und mit der Voreilung $10^{s}\ 7°\ 34'\ 39'',2$; seine mittlere Anomalie $0^{s}\ 24°\ 6'\ 53''$, und mit der Voreilung $0^{s}\ 24°\ 7'\ 1'',5$; die Länge des Knotens $3^{s}\ 1°\ 15'\ 1'',9$; die Länge von Fomalhaut wird seyn $11^{s}\ 0°\ 59'\ 58'',9$, und seine Breite 21° 6′ 35″, 0 südlich.

## 4. Auszüge aus zwey Briefen des Herrn de la Lande an Herrn Obriſtwachtmeiſter von Zach.

Paris, vom 9. Jänner 1795.

Herr Mechain iſt wieder hergeſtellt *), er befindet ſich jetzt in Genua, und erwartet daſelbſt die Verhaltungsbefehle, um nach Paris zurückzukehren. Ich habe die Geſchichte der Aſtronomie für das verfloſſene 1794ſte Jahr aufgeſetzt, und werde ſie in dem Journal de Phyſique oder anderswo **) abdrucken laſſen. Wenn Sie Herrn Bode ſchreiben, ſo melden Sie ihm, daß ich ihm ſehr viele Sterne der 6ten Größe zu ſeinen neuen Himmelskarten ſchicken werde. Flamſteed hat, beſonders gegen Norden, nicht die Hälfte in ſeinem Verzeichniſſe; auch ſagen Sie ihm, daß er nicht damit eilen ſoll, No. 46 und 48 im Hercules aus den Sternverzeichniſſen wegzuſtreichen, denn ich habe ſie beyde beobachtet; vielleicht ſind es veränderliche Sterne, die manchmal fehlen ***). Ich vermuthe daſſelbe von 14 im Wallfiſch, 35 der Caſſiopea, 28 im Widder, 8 und 9 im Stier, und 26, 71, 73, 74 im Krebs, ingleichen von 25

*) Von dem unglücklichen Zufall, wodurch dieſer gelehrte und eifrige Himmelsbeobachter beynahe ums Leben gekommen wäre, giebt Herr Graf von Brühl in dem Berliner aſtronomiſchen Jahrbuche für 1797 S. 135 Nachricht. Indem er einen Freund von einer augenſcheinlichen Gefahr in der Nähe einer hydrauliſchen Maſchine in Catalonien retten wollte, erhielt er ſelber eine gefährliche Wunde am Kopf, nebſt einem doppelten Bruch des Knochens, der die rechte Schulter mit dem Halſe verbindet. v. Z.

**) Die Geſchichte der Aſtronomie vom Jahre 1789 erſchien im Panthéon-littéraire à Paris chez Maradan; Neuvieme Galerie. Uranie. page 155. v. Z.

***) Dies ſcheint ein Irrthum zu ſeyn, der vermuthlich durch einen Schreib- oder Druckfehler entſtanden iſt. Nicht No. 46 und 48 Herculis, ſondern 46 und 48 Ophiuchi fehlen am Himmel, wie man aus Hrn. Dr. Koch's Anzeige, Berl. J. B. 1797 S. 169 erſiehet. Herr Bode hat ſich in der vorletzten Zeile ſeiner Note verſchrieben, und ſtatt Ophiucht, Herculis geſetzt; auch hat Herr Dr. Herſchel No. 46. Herculis beobachtet, und ihn als einen ſehr ungleichen Doppelſtern gefunden, der kaum ſichtbar iſt. Siehe *Wollaſton* General Catalogue Zone 61°. Von den übrigen als veränderlich oder verſchwunden angegebenen Sternen in dem Briefe des Herrn de la Lande werde ich in der Folge mehreres anzeigen und berichtigen. v. Z.

25 und 71 im Löwen, 27 im kleinen Löwen, φ in der Waſſerſchlange, 53 im großen Bär, und 18, 24, 45, 52, 96 und 101 in der Jungfrau, eben ſo von 14 im kleinen Bär, 72 im Drachen, 12 im Triangel, von 72 und 80 im Waſſermann, und 45 in Fiſchen u. ſ. f. Wir haben auf dieſe Art 136 Sterne nicht wieder gefunden, vielleicht finden wir ſie ein andermal. Herr Pictet aus Genf *), der hier in Paris war, hat mir erzählt, daß Miſs Herſchel 1794 einen neuen Kometen entdeckt habe. Wir haben nichts davon gehört noch geſehen; iſt Ihnen mehr davon bekannt? Auch hat er von einer Beobachtung eines fünffachen Saturnusringes geſprochen; obgleich Herſchel bis jetzo nur zwey bemerkt hat; allein Short hat mir im Jahr 1763 zu London verſichert, daß er mehrere Ringe unterſcheide (diſtinguoit) **).

Ich habe Herrn de Lambre die Bemerkungen des Herrn Prof. Klügels über die mittlere Entfernung des Saturns ***) mitgetheilt. Er wird ſie zu der Arbeit benutzen, die ihm noch über Saturn zu machen übrig bleibt. Jetzt iſt er damit beſchäftiget, die wechſelſeitigen Störungen aller Planeten zu berechnen, und ganz neue Tafeln nach der Methode des Herrn de la Place, die ſo vollkommen gelungen iſt, zu verfertigen. Wenn beyde damit fertig ſind, ſo werden ſie zuſammen eine ganz neue Umarbeitung der Mondstheorie vornehmen, und hiernach ſowohl, als auch aus den neueſten Beobachtungen, neue Mondstafeln entwerfen. Das ſind gerade die zwey Män-

*) Iſt *Marc-Antoine Pictet*, Profeſſeur de Phyſique, und Verfaſſer der Eſſais de Phyſique ſur le feu, davon Herr Profeſſor Pfleiderer eine deutſche Ueberſetzung beſorgt hat. Er wurde, ſo wie Mr. *de Sauſſure* bey der in Genf ausgebrochenen Revolution flüchtig. Jetzt befinden ſich beyde in England. v. Z.

**) Weder von dem neuen Kometen, noch von dem 5fachen Ring des Saturns habe ich etwas Näheres in Erfahrung bringen können. Meine letzten Briefe aus London ſind vom December v. J., worinn von beiden Erſcheinungen gar keine Meldung gemacht wird, welches doch gewis geſchehen ſeyn würde, wenn etwas an der Sache wäre. Ich bezweifle alſo dieſe Nachricht ſehr. Was übrigens Herr Herſchel mit gutem Grunde von den obbemeldeten Shortiſchen Beobachtungen hält, kann man im Berliner aſtronomiſchen Jahrbuche für 1796. S. 93. nachſchlagen. v. Z.

***) Siehe aſtronomiſches Jahrbuch für 1797. S. 172. v. Z.

Männer, deren eine so große Unternehmung bedarf. Sie sind beyde beym Depôt de la Marine angestellt, und es ist unmöglich, eine glücklichere und nützlichere Vereinigung, als dieser zwey Gelehrten, zu finden. Zu dieser Arbeit werden uns vorzüglich die Greenwicher Beobachtungen nützlich seyn. Wie weit sind sie wohl heraus? Ist auch der Nautical Almanac von 1797 erschienen *)? Ich bitte Sie, Herrn Grafen von Brühl

*) Die Greenwicher Beobachtungen des Herrn Dr. Maskelyne sind bis auf das Jahr 1793 heraus, jeder Jahrgang kostet 2½ Schilling. Sie fangen vom Jahre 1765 an. Der erste Band geht bis aufs Jahr 1774, der zweyte enthält die Jahre 1775 bis 1786, die folgenden Jahre gehören zum dritten Bande. Es ist eine der schätzbarsten Sammlungen, besonders von Mondsbeobachtungen, die nirgend so anhaltend und genau gemacht angetroffen werden. Sie sind zu Entwerfung neuer Mondstafeln unumgänglich nothwendig, und man hat sich längst gewundert, daß Hr. Charles Mason sich ihrer nicht bey seiner letzten Verbesserung der Mayerischen Mondstafeln bedient hat. Er brauchte hierzu nur eine kurze Reihe 10jähriger Bradleyscher Beobachtungen von 1750 bis 1760; die Maskelynischen Beobachtungen geben aber jetzo eine ungleich vorzüglichere Anzahl von Mondsörtern von 28 Jahren. Die erste Verbesserung der Mayerschen Mondstafeln, die 1770 erschienen sind, hat Mason im Jahr 1778 vorgenommen, sie brachten den größten Fehler in der Länge auf 45″ herab. Diese Tafeln erschienen nie im Druck; aber in England wurde der Nautical Almanac von 1777 bis 1788 darnach berechnet. Im Jahr 1780 verbesserte Herr Mason diese Tafeln nochmals, und ihr größter Fehler betrug nur 30″; hiernach sind die Nautical Almanacs von 1789 bis 1796 berechnet. Diese Tafeln sind in der Conn. des temps pour 1790, in den Wiener Ephemeriden 1794, und in der neuen Ausgabe der Astronomie (1792) des Herrn de la Lande nachgedruckt worden. Seitdem ist eine dritte Verbesserung vorgenommen worden, die man in der Vorrede zu dem Nautical Almanac für das Jahr 1800 detaillirt findet; und hiernach sind die Naut. Alman. von 1797 bis 1800 berechnet. Uebrigens sind diese Masonischen Mondstafeln sehr empirisch verbessert, und den Beobachtungen auf Kosten der Theorie angepaßt, wie jeder Sachverständige es selbst verificiren kann. So ist z. B. die XIXte Tafel in de la Lande für die Mittelpunktsgleichung des Monds von Mason ganz falsch berechnet, und stimmt nicht mit der Excentricität oder der daraus hergeleiteten analytischen Formel. Die Tafel der Reduction auf die Ekliptik LIII., stimmt nicht mit der Tafel für die Neigung der Bahn; das Unternehmen der französischen Geometer und Astronomen ist demnach so groß und nützlich, als wichtig und wünschenswerth, und es läßt sich von der bekannten Geschicklichkeit und dem thätigen Eifer dieser Männer nichts anders als der vollkommenste Erfolg erwarten. Die Nautical Almanacs sind bis auf das Jahr 1800 erschienen. Die Gothaische Sternwarte erhielt sie vom *Board of Longitude* zum Geschenke. v. Z.

Brühl, wenn Sie ihm schreiben, zu befragen, wie er die Abweichungen der Sterne, die Sie mir überschickt haben *), beobachtet habe. Ich bin sehr überzeugt, daß Arcturus 11″ mehr haben muß, Capella 8″, dagegen α Capricorni 7″ weniger, Antares 6″ weniger: die zwey letzteren sind weniger gewiß wegen der Unsicherheit der Strahlenbrechung; aber über die beyden anderen habe ich keinen Zweifel. Mir war nicht lieb zu vernehmen, daß Herr Barry in Manheim seinen Adjunctum Hrn. Henry verlohren hat **), ich hoffe aber, daß er dadurch

*) Obbenannte vier Sterne hat Herr Graf von Brühl mit seinem ganzen Kreise in Harefield beobachtet; er fand die Abweichungen dieser Sterne nach der in seiner (hier S. 257 u. f. übersetzten) Abhandlung: „On the Inveſtigation of Aſtronomical-Circles, London 1794“ beschriebenen Methode. Ich bezweifle sehr, ob die von Herrn de la Lande angezeigten Verbesserungen statt haben können. Er beobachtet à l'Ecole Militaire an einem Mauerquadranten, den er nicht umwenden kann; auch hat er keinen Zenithsector, womit er den Collimazionsfehler bestimmen könnte. Der Herr Graf kann hingegen seinen ganzen Kreis, so oft ihm beliebt, umwenden, und nach seiner Methode erhält er die Beobachtungen frey von Collimazions-, Excentricitäts- und Theilungsfehlern. Zum Beweis dessen führe ich folgende merkwürdige Stelle aus einem Schreiben des Herrn Abbé Barry zu Manheim, vom 3ten October 1794 an: „Mein Zenithsector „giebt mir nicht immer dieselben Resultate für den Collimazionsfehler meines Mauerquadranten; diese Unterschiede „gehen in einem Zeitraume von 8 bis 15 Tagen, ja manchmal von einem Tag bis zum andern auf 7″ bis 8″. Ich „vermuthe daher einen Fehler in der Bewegung des Fernrohrs. Außer diesem Fehler bemerke ich noch einen andern, der von einem Tag zum andern auf 13″ gehet, obgleich der Collimazionsfehler nach den Beobachtungen am „Zenithsector derselbe bleibt. Ich kann diesen Irrthum „nichts anderem als der größeren oder geringeren Ausdehnung des Gradbogens zuschreiben, und ich weiß diesem „Uebel nicht anders zuvor zu kommen, als daß ich eine „große Menge von Beobachtungen, auf allen Abtheilungen meines Mauerquadranten angestellt, mit solchen vergleiche, die mit ganzen Kreisen gemacht worden, und daraus seine Fehler ableite.“ Diese Vorsicht ist dennoch nicht hinlänglich, und nichts übertrifft die Beobachtungsart mit ganzen Kreisen; daher ich auch den Graf Brühlischen Bestimmungen mehr Glauben beymesse. v. Z.

**) Herr Henry hat Manheim verlassen, als sich die Franzosen im vorigen Jahre dieser Stadt näherten, und hat sich nach Rußland begeben. Herr Barry erhielt Befehl, alle Instrumente abzunehmen und in ihre Kisten zu packen. Inzwischen hat er wäh-

dadurch nichts in seiner Thätigkeit für die Astronomie verlohren habe. Man erlaubt uns nicht, Bücher ins Ausland zu schicken, es sey denn, daß man Bürgschaft stelle, daß man das Equivalent wieder nach Frankreich einbringe. Ich kann Ihnen also unsere Memoires und die anverlangten Connoissances des temps nicht schicken. Diese Hindernisse werden aber, wie man uns verspricht, bald gehoben werden, und das Commercium literarium wird nun bald in seine alten Rechte wieder eintreten.

Paris, den 25. Jenner 1795.

Man ist itzt damit beschäftiget, die Abschrift meiner beobachteten Sternabweichungen zu machen, und ich sehe sie mit vielem Fleiß durch. In drey bis vier Wochen werde ich sie absenden. Ich habe mir sehr viel Mühe gegeben, um die Gelegenheit Ihres neuen Werks zu benutzen. De Lambre beschäftiget sich, alle Störungen der Planeten nach der de la Placischen Methode zu berechnen. Die Mars und Venustafeln werden große Hülfe daraus ziehen. Diese beyden Gelehrten sind ein Paar seltne und kostbare Männer. Mechain ist noch immer in Genua, allein man hat ihm seit kurzem geschrieben, zurückzukehren, und im April wird er wieder seine Meridianmessung in Collioure, und de Lambre in Orleans vornehmen. Die neuen Beobachtungen mit ganzen Kreisen haben für die Breite der Sternwarte 48° 50′ 11″ gegeben *), wenn man die Strahlenbrechung nach meinen Tafeln voraussetzt; der Fehler kann nicht über eine Sekunde betragen. Nouet, Perny, Villeneuve haben sich sehr viele Mühe gegeben, dieses Element zu bestätigen. Meine Antrittsrede im College de France enthält die Eloges von Bailly, du Sejour, Saron ꝛc.... sie wird gedruckt, und ich werde sie Ihnen übersenden. Mir war sehr lieb zu erfahren, daß die Verfinsterung des 4ten Jupitersrabanten den 12ten May 1794 nicht

während der ganzen Belagerung immerfort seinen Thurm bewohnt, obgleich das Feuer der Franzosen, besonders bey Nachtzeit, immer darauf gerichtet war. Der Thurm wurde 9mal sowohl von Bomben als Kugeln getroffen, hat aber demungeachtet sehr wenig gelitten. Die Instrumente waren in sicherer Verwahrung, und konnte ihnen gar kein Schade zugefügt werden.

v. Z.

*) Man hatte bisher die Breite der Pariser Sternwarte auf 48° 50′ 14″ gesetzt, allein in den Jahren 1792 und 1793 fand Herr Cassini mit einem ganzen Kreise 48° 50′ 12″. Diese vermindern die jetzigen Astronomen der Sternwarte noch um 1″. v. Z.

nicht ſtatt gehabt habe *). De Lambre's Satellitentafeln haben wohl durch die Theorie des Herrn de la Place vor allen andern den Vorzug erhalten; allein, auch nur einem de Lambre war es möglich, dieſe Theorie ſo vortheilhaft zu benutzen. Die große Kälte, die wir ſeit drey Wochen hier haben, hat unſern aſtronomiſchen Arbeiten Einhalt gethan; wir ſind immer noch bey 25000 Sternen, aber die Berechnungen gehen ihren Gang fort. Das Collége de France geht wie ſonſt in allen ſeinen Verrichtungen fort, und ich glaube, daß es dabey bleiben wird. La Place und La Grange ſind bey der Normalſchule **) mit 12000 Livres angeſtellt; de Lambre und Mechain mit 5000 Livres beym Depôt de la Marine. Ich glaube, daß ich eben ſo viel beym Collége de France erhalten werde. Die Wiſſenſchaften werden durch die gegenwärtige Regierung unterſtützt, und wir haben uns nicht über die Republik zu beklagen. Ich hoffe, daß Beauchamps wieder nach der Levante zurückkehren wird. Er hat eine Gratification von 2000 Livres, ſo wie mehrere andere Gelehrte erhalten ***). Der Muralquadrant von 7½ Fuß des Herrn le Monnier wird auf das große Obſervatorium gebracht. Caſſini wird wieder dahin berufen; die Gehalte der Aſtronomen der Sternwarte werden erhöhet.

*) Den Eintritt dieſer nach Wargentiniſchen Tafeln angekündigten Verfinſterung, wollte Herr Triesnecker in Wien beobachten; allein er konnte nur zwiſchen 1 Uhr 0 Min. und 11 Min. eine ſehr ſchwache Abnahme des Lichts bemerken. Nach den ältern Tafeln ſollte dieſer Trabant eine Stunde lang verfinſtert bleiben; nach *de Lambre's* Tafeln fand es ſich wirklich, daß dieſe Verfinſterung gar nicht ſtatt haben ſollte. Man ſehe: Götting. gelehrte Anz. 166. Stück vom 18ten Octob. 1794. S. 1657. v. Z.

**) Bey der Pariſer Normalſchule ſind folgende Gelehrte in nachſtehenden Claſſen angeſtellt. 1. Mathématiques, *La Grange* und *La Place*. 2. Phyſique, *Hally*. 3. Géometrie déſcriptive, *Monge*. 4. Hiſtoire naturelle, *Daubenton*. 5. Chymie, *Bertholet*. 6. Agriculture, *Thouin*. 7. Geographie, *Buache*. und *Mentelle*. 8. Hiſtoire, *Volney*. 9. Morale, *Bernardin St. Pierre*. 10. Grammaire, *Sicard*. 11. Analyſe de l'Entendement, *Garat*. 12. Littérature, *La Harpe*. v. Z.

***) Von den bekannteſten und verdienteſten Gelehrten beſonders der vormaligen Akademie der Wiſſenſchaften, haben 3000 Livres erhalten, die Herren Adanſon, Anquetil, Bitaubé, Boſſut, Briſſon, Couſin, Cotte, Guignes, Herman, Jeaurat, La Lande, Lamark, Mauduit, Meſſier, Montucla, Oberlin, Pingré, Rochon, Valmont Bomare ꝛc.... 2000 Livres haben erhalten, Beauchamp, Mazéas, Mentelle, Pelletier, Villers ꝛc..... v. Z.

# Archiv
der
# reinen und angewandten Mathematik.

Viertes Heft. 1795.

## I.

## Allgemeine Darstellung des Polynomialtheorems nach de Moivre und Boscovich, nebst verschiedenen Bemerkungen über die dabey zum Grunde liegenden lexikographischen Involutionen; von dem Herausgeber.

Von dem Moivrischen Theorem habe ich neuerlich in einem Programm *) ausführlich gehandelt, aus welchem ich das, was hieher gehört, anführen, und diesem noch das Boscovichische Verfahren beyfügen werde, welches, so nahe es auch mit dem Moivrischen zusammentrift, (beyder Darstellung ist lexikographisch) dennoch sein eigenes Verdienst hat, und einer nähern Bekanntmachung würdig

*) *Terminorum ab infinitinomii dignitatibus* Coefficientes Moivraeanos *legui* Ordinem lexicographicum *oſtenditur*; eine akademische Proluſion (vom 21ſten März 1795) zu drey Gedächtnißreden. Die Mittheilung des Inhalts dieſes Programms in dem Archive, bedarf wohl keiner Entſchuldigung, da der Gegenſtand intereſſant iſt, und ſolche Gelegenheitsſchriften nicht weit verbreitet und bekannt werden. Auch kommen hier verſchiedene Bemerkungen vor, die in jenem Programme nicht ſtehen, und gleichwohl, in Beziehung auf die combinatoriſche Analyſis, wichtig ſind.

würdig iſt. Das Boscovichiſche Theorem ſteht überdies in einer heut zu Tage wenig mehr geleſenen, und daher ſelten gewordenen, periodiſchen Sammlung von Aufſätzen und Recenſionen; um ſo mehr darf ich hoffen, daß es den Leſern angenehm ſeyn wird, ſolches, neben den weit mehr und allgemeiner bekannten, de Moivriſchen, hier mit aufgeführt, und eben ſo wie dieſes, ganz allgemein dargeſtellt, zu finden.

## I. Moivriſches Polynomialtheorem.

1. Wenn $az+bz^2+cz^3+dz^4+\text{etc}=p$, ſo iſt:

$$p^m=a^m z^m+\frac{m}{1}a^{m-1}bz^{m+1}+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2\Big]z^{m+2}$$
$$+\frac{m}{1}a^{m-1}c$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3\Big]z^{m+3}+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4\Big]z^{m+4}$$
$$+\frac{m.m-1}{1\times 1}a^{m-2}bc$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2\times 1}a^{m-3}b^2c$$
$$\frac{m}{1}a^{m-1}d$$
$$+\frac{m.m-1}{1\times 1}a^{m-2}bd$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}c^2$$
$$\frac{m}{1}a^{m-1}e$$

+ etc. Von dieſem Theorem umſtändlich *Moivre in Philoſ. Tranſ. Vol. XIX, for* 1795-1797. *No.* 230. Das Weſentliche daraus in deſſ. *Animadv. in Cheyn. tract. de Flux. Meth. Inv. p.* 96-101. und in *Miſc. Anal. de Ser. et Quadr. p.* 86-89.

2. Bey den Coefficienten der Reihe (1) unterſcheidet de Moivre ausdrücklich zweyerley Geſetze: 1) der Pro-

Producte aus a, b, c, d, e ... und 2) der ihnen vorzusetzenden, durch m auszudrückenden, Unzen; und dieser Absonderung der beyderley Gesetze hat der Satz die große Leichtigkeit in Darstellung der Glieder zu verdanken. Es kann nicht zu oft erinnert werden, daß man bey verwickelten Sätzen (wohin das Polynomialtheorem und viele andere, noch weit mehr zusammengesetzte, gehören) wo mehrere ungleichartige Größen (wie hier Coefficienten a, b, c ... und Exponent m) vorkommen, die Gesetze derselben einzeln aufsuchen, wie sie in ihren Gliedern zusammengehören, nachweisen, und in Formeln (wozu die combinatorisch-analytischen vorzüglich geschickt sind) darstellen müsse (*Nov. Syst. Perm. p.* I, II. *nr. a*; Arch. der Math. H. I. S. 16, 5 und S. 17. Anmerk.)

3. Das Moivrische Gesetz der Buchstabenproducte (2) kurz und faßlich vorzulegen, will ich annehmen, $a^m$, B, C, D, E, F, G .... stellen diese Produkte vor, wie sie in den einzelnen Gliedern, vom ersten an, nach der Ordnung vorkommen. Um nun die Buchstabenproducte eines folgenden Gliedes aus den Producten der vorhergehenden, z. B. die Producte für H aus den gegebenen $a^m$, B, C, D, E, F, G zu finden, multiplicire man $\frac{b}{a}$ in G; ferner multiplicire man $\frac{c}{a}$ in F, mit Uebergehung der Producte in F, die b enthalten; dann $\frac{d}{a}$ in E, mit Uebergehung der Producte in E, die b oder c enthalten; darauf $\frac{e}{a}$ in D, mit Uebergehung der Producte in D, die b oder c oder d enthalten; und so verfahre man weiter, bis man zu dem ersten Product $a^m$ gelangt, das man als das letzte vorwärts, auf gleiche Art mit dem zugehörigen Bruche (hier, im Excempel $\frac{h}{a}$) multiplicirt. Diese so

gefundenen Producte zuſammen addirt, werden H geben. Auf eben die Art findet man die Buchſtabenproducte jedes andern Gliedes, aus den gegebenen Producten aller vorhergehenden Glieder (Mein Progr. §. 9, a).

4. Was die, durch m auszudrückenden Moivriſchen Unzen (2, und mein Progr. §. 9, b) anbetrift, ſo ſind ſelbige nichts anders als Producte der Binomialcoefficienten $^{m}\mathfrak{A}$, $^{m}\mathfrak{B}$, $^{m}\mathfrak{C}$... $^{m}\mathfrak{N}$ (*Nov. Syſt. Perm.* p. XL, 9), in die gleichnamigen Polynomialcoefficienten a, b, c... n (oder Verſetzungszahlen; Ebend. 10 und p. XXIV, 23) von denen jene auf die Potenzen von a, dieſe hingegen auf die Producte von b, c, d... ſich beziehen. Ihre natürlichſte Bezeichnung iſt alſo $^{m}\mathfrak{A}a$, $^{m}\mathfrak{B}b$, $^{m}\mathfrak{C}c$... $^{m}\mathfrak{N}n$, und ihr Werth einem Bruche gleich, deſſen Zähler dem Zähler des zugehörigen Binomialcoefficientens, der Nenner dem Nenner des zugehörigen gleichnamigen Polynomialcoefficientens gleich iſt (mein Progr. S. VIII, IX). Demnach iſt z. B.

$$(^{m}\mathfrak{D}b)\,a^{m-4}b^{3}d = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\times 1}\,a^{m-4}b^{3}d$$

$$(^{m}\mathfrak{D}b)\,a^{m-4}b^{2}c^{2} = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2\times 1.\ 2}\,a^{m-4}b^{2}c^{2}$$

Ich nenne ſie Moivriſche Unzen, wegen des Satzes (1); ihr Ausdruck iſt aber nicht von Moivre, wie ſchon daraus erhellet, daß er die Vorſchrift darüber *a Rule, which is commonly given* (a. a. O. der *Phil. Tranſ.* p. 623) nennt. Man vergleiche die (*Inſin. Dign.* p. 28, 29 in den Noten) angeführten Stellen. Ein ſehr allgemeiner Beweis der Regel, ſo wie die Regel ſelbſt, und wie man die Werthe der Producte ihrer Factoren aus der Tafel der figurirten Zahlen nehmen könne *Inſin. Dign.* p. 30-35.

5. Das

5. Das Geſetz, nach welchem de Moivre die Producte der Buchſtaben a, b, c, d .... in den Coefficienten, aus allen vorhergehenden Producten zuſammenſetzt (3), iſt combinatoriſch; auch glaubt er den Gang der Natur genau dabey beobachtet zu haben, daß er ſeine Vorſchrift darüber, in Verbindung mit jener andern, für die Unzen (4) *Legem, quam obſeruat* NATURA nennt (*Miſcell. Anal. p.* 87; *Anim. in Cheyn. p.* 97). Die Folge wird gleichwohl zeigen, daß von demſelben Standpuncte aus, von welchem de Moivre ausgegangen iſt, es noch einen zweyten Weg giebt, der ungleich näher und ohne alle Umſchweife, geradezu zum Tempel der Göttinn führt.

6. De Moivre fängt ſeine *Exponents of the Letters* (wie er die Ordnungszahlen der Buchſtaben nennt, die ihre Stellen anzeigen) von a zu zählen an. So natürlich das auch an ſich iſt, ſo hätte er hier doch beſſer gethan, wenn er

nicht $\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ ſondern $\binom{1,2,3\ldots}{b,c,d\ldots}$ oder $\binom{0,1,2\ldots}{a,b,c\ldots}$

zu Zeigern genommen hätte. Seine Regel für die Producte (3), ja ſelbſt ein vergleichender Blick auf die Coefficienten (1) deren er (a. a. O. der *Philoſ. Tranſ.*) ſieben (bis mit $z^{m+6}$) angegeben hat, zeigt deutlich, daß die Potenzen von a von der Anzahl der nebenſtehenden Factoren in den Producten aus b, c, d, e.... abhangen, weil dieſe die Zahl beſtimmt, die von dem Exponenten m an a abgezogen werden muß. Man kann alſo dieſe Potenzen von a inmittelſt ganz bey Seite ſetzen, und nur allein die Producte oder Combinationen von b, c, d, e... und ihr Geſetz in Betrachtung ziehen.

7. Für dieſe Potenzen von a werde ich in der Folge allgemein $a^{m-*}$ ſetzen; wo alſo des (*) Zahlenwerthe $= 1, 2, 3, 4\ldots$ ſeyn werden, nachdem von den Factoren b,

c, d, e... einer, zwey, drey, vier oder mehrere auf $a^{m-*}$ folgen; nach dem Gebrauche, den ich von dieſem Zeichen zu machen pflege, deſſen Werth und Bedeutung immer von andern abhängt (*Nov. Syſt. Perm.* p. XLIV, XLVIII, LXXII, LXXIV, LXX[illegible]I).

8. Die Abſonderung der Potenzen $a^{m-*}$ von den Producten aus b, c, d... (6), und die dadurch veranlaßte Unterſuchung des Geſetzes dieſer Producte, giebt mehrere Aufſchlüſſe, und beſtätiget, was ich bereits an einem andern Orte (S. 323, 6; 335, 24) bemerkt habe, wie wichtige Folgen zuweilen, eine dem Scheine nach nur geringe Aenderung veranlaſſen könne. Denn

1) Könnte dadurch der Beweis des Satzes (1) nicht nur kürzer, ſondern auch allgemeiner abgefaßt werden, als ihn de Moivre (in den *Philoſ. Tranſ.* a. a. O.) gegeben hat, wo er blos auf Induction für den Fall, wenn der Exponent m eine poſitive ganze Zahl iſt, geführt worden, obſchon der Satz für jeden Werth von m wahr iſt, wie de Moivre zuletzt ſelbſt erinnert.

2) Führt die Unterſuchung des Geſetzes, welches die Factoren b, c, d, e... der Producte, wie ſie in den

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| etc | b | b | b | b | etc | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | b | b | c | | | 1 | 1 | 2 | |
| | b | d | | | | 1 | 3 | | |
| etc | c | c | | | etc | 2 | 2 | | |
| | e | | | | | 4 | | | |
| etc | etc | | | | etc | etc | | | |

Coefficienten (1) untereinander ſtehen, befolgen, auf Involutionen, welche, nach der Art dieſer Zuſammenſetzungen, alle vorhergehende Producte mit enthalten. Hier iſt nur beyſpielsweiſe, die zu $z^{m+4}$ gehörige Involution, mit ihren Evolutionen in den Winkeln, dargeſtellt worden; aber der Fortgang von dieſer auf alle folgende, hat keine Schwierigkeit.

De

De Moivre iſt alſo der Erfindung von Involutionen nicht blos, wie Euler, Lambert, Bernoulli nahe geweſen (S. 322, 5; 327, 10; 334, 23), ſondern hat ſelbige ſogar, bis auf die Darſtellung in einzelnen Factoren b, c, d, e..., ſchon erreicht und richtig geordnet — freylich, ohne ſie zu kennen, und (was natürlich daraus folgt) ohne ſie ihrem Werth und Umfange nach gehörig zu benutzen; denn ſonſt würde er eingeſehen haben, daß ſelbſt nach ſeinem Verfahren (3) es gar nicht nöthig ſey, alle vorhergehende Producte einzeln abgeſetzt vor ſich zu haben, da man für jedes Glied die zugehörigen Producte ſogleich und ohne alle weitere Vorbereitung involutoriſch darſtellen kann (S. 323, 6, a und 324, 9).

3) Dieſe Producte von b, c, d, e.... als Wörter einer Sprache angeſehen, folgen in alphabethiſcher oder lexikographiſcher Ordnung auf einander. Das gilt nicht blos von den (hier in 1) aufgeführten Producten, ſondern auch von allen folgenden; da ſich leicht darthun läßt, daß die Moivriſche Regel (3) dieſe Producte in keiner andern, als lexikographiſchen Ordnung, herbeyführe. Dies wäre alſo unſtreitig das älteſte Beyſpiel einer lexikographiſchen Anordnung zu Erfindung eines analytiſchen Satzes. Andere Exempel (S. 31, 165, 166, 169, 178).

9. Freylich hat de Moivre die lexikographiſche Folge der Buchſtabenproducte eben ſo wenig, als die involutoriſche Anordnung ihrer Factoren, eingeſehen, die auch beyde nicht ſtatt haben, ſo lange man die Potenzen von a mit zu den Producten aus b, c, d, e .... zieht, und Ein Geſetz für die Verbindungen aus a, b, c, d... ſucht; woraus die Wichtigkeit der Abſonderung (8) der Potenzen $a^{m-*}$ erhellet. Ob nun aber ſchon die lexikographiſche (ſo wie die involutoriſche) Darſtellung jener Producte, bey de Moivre ein Werk des bloßen Zufalls geweſen iſt:

so ist es doch, wenn man dergleichen Anordnungen einmal kennt, kein Werk eines blos spielenden Witzes, sie aufzusuchen und da zu gebrauchen, wo sie vorzüglich nützen können. Die Leichtigkeit, mit welcher sich die Moivrischen Buchstabenproducte, und dadurch überhaupt die Coefficienten darstellen lassen, und welche die nach meiner Formel (*Nov. Syst. Perm, p.* LIV, 7) noch übertrift, beruht ganz allein auf der lexikographischen Anordnung dieser Producte, von denen auch die Potenzen von a und mit ihnen die Unzen (4, 7) abhangen.

Um so mehr ist es wichtig und nothwendig, dem Moivrischen Polynomialtheorem (1) die möglichste Allgemeinheit im Ausdrucke und Leichtigkeit in der Entwickelung zu geben, und so die wahre LEGEM NATVRAE — *posito velamine* — vor den Augen der Leser zu enthüllen. Folgendes dient dazu als Vorbereitung.

10. Lehnsatz. Die Variationen und Combinationen gegebener Summen $n$, aus den Elementen 1, 2, 3, 4...$n$, in directer alphabetischer oder lexikographischer Ordnung, mit Widerholungen, in einer combinatorischen Involution, und (was die Combinationen anbetrift) in gutgeordneten Complexionen, darzustellen.

Auflösung. 1) Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe $(n-1)$ das Element 1 (die Einheit) vor.

2) Man vertausche —

a) für die Variationen, in allen Complexionen der Summe $(n-1)$,

b) für die Combinationen, nur in denjenigen Complexionen der Summe $(n-1)$, bey denen

denen die beyden erſten Elemente nicht einerley, ſondern verſchieden ſind —
das erſte Element ſolcher Complexionen, mit dem nächſtfolgenden größern Elemente.

3) Jede Complexion, wie ſie (2) giebt, ſchreibe man, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen, wie ſie (1) nach der Reihe gegeben hat.

## 11. Exempel von Variationen und Combinationen zu beſtimmten Summen in dieſer lexikographiſcher Ordnung.

### A. Variationen

der Summen (1,2,3,4,5 ...)
aus d. Zahlen 1,2,3,4,5 ...

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| etc | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| | 1 | 1 | 3 | | |
| | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| | 1 | 2 | 2 | | |
| | 1 | 3 | 1 | | |
| etc | 1 | 4 | | | |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | |
| | 2 | 1 | 2 | | |
| | 2 | 2 | 1 | | |
| | 2 | 3 | | | |
| | 3 | 1 | 1 | | |
| | 3 | 2 | | | |
| | 4 | 1 | | | |
| | 5 | | | | |
| | etc | etc | etc | | |

### B. Combinationen

d. Summ. (1,2,3,4,5,6,7 etc)
a. d. Zahl. 1,2,3,4,5,6,7 ...

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| etc | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| | 1 | 1 | 1 | 4 | | | |
| | 1 | 1 | 2 | 3 | | | |
| etc | 1 | 1 | 5 | | | | |
| | 1 | 2 | 2 | 2 | | | |
| | 1 | 2 | 4 | | | | |
| | 1 | 3 | 3 | | | | |
| | 1 | 6 | | | | | |
| | 2 | 2 | 3 | | | | |
| | 2 | 5 | | | | | |
| | 3 | 4 | | | | | |
| | 7 | | | | | | |
| | etc | etc | etc | | | | |

Für Elemente 1, 2, 3, 4 ... m, wo m < n, oder das gröſste Element m kleiner ist als die Summe n, lassen die Complexionen, die mit m anfangen, keine Vertauschung (10, 2) zu, und müssen daher übergangen werden. Exempel dafür haben keine Schwierigkeit (Mein Programm §. 2; 4; 6, 3).

Die Auflösung (10) giebt die gesuchte Involution aus der unmittelbar vorhergehenden, und da diese und alle weiter vorhergehende, bis zur Summe 1 herab, involutorisch in einander liegen: so kann man jede verlangte Involution sogleich einleiten und bearbeiten (S. 324, c). Wären statt der Zahlen 1, 2, 3, 4 ... die Buchstaben b, c, d, e ... gegeben: so ließen sich obige lexikographische Anordnungen A, B eben so leicht und unmittelbar in Buchstaben, als in Zahlen ausführen. Auf ersteres geht auch die de Moivrische Regel (3) für die Buchstabenproducte.

12. Der Lehnsatz (10) enthält eigentlich zwey Aufgaben, die hier, weil es bequem geschehen konnte, der Kürze wegen, zusammengenommen sind, obgleich in diesem Aufsatze nur allein von 11, B Gebrauch gemacht werden wird. Diese beyden Aufgaben sind die, für die gesamte Analysis so wichtigen, der Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen, die ich vorlängst auf einem von diesem ganz verschiedenen Wege, der Zahlenzerfällung (*numerorum sectiones*) gelöst habe (*Infin. Dign.* §. XXII. *p.* 73 *seq.* und §. XXVII. *p.* 129 *seq.*). Die hier gegebene Auflösung (10, 11) ist aber ungleich simpler; so wie überhaupt die lexikographischen Darstellungen einfachere Gesetze befolgen, als die Anordnungen nach Classen. Das giebt gleichwohl, in Absicht ihres Gebrauchs in der Analysis, jenen Auflösungen keinen unbedingten Vorzug vor diesen (mein Progr. §. 7); nützlich aber ist es beyde zu kennen, um jede an

ihrem

denen die beyden erſten Elemente nicht einerley, ſondern verſchieden ſind —
das erſte Element ſolcher Complexionen, mit dem nächſtfolgenden größern Elemente.

3) Jede Complexion, wie ſie (2) giebt, ſchreibe man, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen, wie ſie (1) nach der Reihe gegeben hat.

## 11. Exempel von Variationen und Combinationen zu beſtimmten Summen in dieſer lexikographiſcher Ordnung.

**A. Variationen** der Summen (1,2,3,4,5 ...) aus d. Zahlen 1,2,3,4,5 ...

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| etc | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| | 1 | 1 | 3 | | |
| | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| | 1 | 2 | 2 | | |
| | 1 | 3 | 1 | | |
| etc | 1 | 4 | | | |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | |
| | 2 | 1 | 2 | | |
| | 2 | 2 | 1 | | |
| | 2 | 3 | | | |
| | 3 | 1 | 1 | | |
| | 3 | 2 | | | |
| | 4 | 1 | | | |
| | 5 | | | | |
| etc | etc | etc | | | |

**B. Combinationen** d. Summ. (1,2,3,4,5,6,7 etc) a. d. Zahl. 1,2,3,4,5,6,7 ...

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| etc | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| | 1 | 1 | 1 | 3 | | |
| | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| | 1 | 1 | 4 | | | |
| | 1 | 2 | 3 | | | |
| etc | 1 | 5 | | | | |
| | 2 | 2 | 2 | | | |
| | 2 | 4 | | | | |
| | 3 | 3 | | | | |
| | 6 | | | | | |
| | 2 | 2 | 3 | | | |
| | 2 | 5 | | | | |
| | 3 | 4 | | | | |
| | 7 | | | | | |
| etc | etc | etc | | | | |

ſtimmt 7) die Producte aus a, b, c, d, e, f ... in dem 6ten zu $z^{m+5}$ gehörigen Coefficienten:

$a^{m-5}b^5$; $a^{m-4}b^3c$; $a^{m-3}b^2d$; $a^{m-3}bc^2$; $a^{m-2}be$; $a^{m-2}cd$; $a^{m-1}f$

15. In der lexikographiſchen Involution zur Summe n (11, B) rechne man die einzelnen Zahlencomplexionen,

die mit 1 anfangen, ſämtlich zur erſten Ordnung $= {}^{n}A$

" " 2 " " " zweyten " $= {}^{n}B$

" " 3 " " " dritten " $= {}^{n}C$

u. ſ. w.; brauche $a^{m-*}$ in der (7) angegebenen Bedeutung; und ſetze, Kürze halber $({}^{m}_{*-1}A\,a)$ ſtatt $({}^{m}_{*-1}A\,{}^{1}_{*-1}a)$, weil hier der Diſtanzexponent $*-1$ bey beyden Buchſtaben A a gleiche Beziehung hat: ſo läßt ſich die Involution zur Summen in ſolchen lexikographiſchen Ordnungen ausdrücken, und durch ſie und die übrigen Zeichen das Moivriſche Polynomialtheorem (1) (aber hier auf die generellere Reihe:

$$p = az^s + bz^{s+r} + cz^{s+2r} + dz^{s+3r} + ez^{s+4r} + \text{etc}$$

bezogen) in nachſtehender combinatoriſch analytiſchen Formel, für jeden Werth von m, allgemein darſtellen*):

$p^m$

*) Die lexikographiſchen Combinations-Ordnungen werden nämlich mit einem eigenen Alphabete, das ſich von dem für die Combinations-Claſſen ſehr auszeichnet, angegeben. Sonſt iſt die übrige Zeichnung für dergleichen Combinationsordnungen, *ſimpliciter* und *ad definitam ſummam*, mit und ohne Widerholungen, in Abſicht der beyzufügenden Abzeichen, eben ſo wie bey den correſpondirenden Combinationsclaſſen (*Nov. Syſtem. Perm.* p. XLII-XLV; *Rothe de Ser. Reverſ. Diſſ.* p. 31. *not.* f.) Für lexikographiſche Variationsordnungen braucht man daſſelbe (jedoch ſchiefſtehende oder Curſiv-) Alphabet, wie bey den Combinationsordnungen, und fügt ihnen, nach Umſtänden, dieſelben Abzeichen bey, wie ſolche bey den Variationsclaſſen gebraucht worden. *Nov. Syſt. Perm.* p. XLVI-XLVIII.

So läßt ſich eine ſehr große Menge ſehr zuſammengeſetzter Begriffe, auf wenige, äußerſt einfache, durchgängig analogiſch gebildete, und daher leicht verſtändliche Zeichen bringen, und kurz und bequem durch ſelbige ausdrücken!

$$p^m = a^m z^{ms}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} {}^1\mathfrak{A}\, z^{ms+r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^2\mathfrak{A} + {}^2\mathfrak{B}\right) z^{ms+2r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^3\mathfrak{A} + {}^3\mathfrak{C}\right) z^{ms+3r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^4\mathfrak{A} + {}^4\mathfrak{B} + {}^4\mathfrak{D}\right) z^{ms+4r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^5\mathfrak{A} + {}^5\mathfrak{B} + {}^5\mathfrak{E}\right) z^{ms+5r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^6\mathfrak{A} + {}^6\mathfrak{B} + {}^6\mathfrak{C} + {}^6\mathfrak{F}\right) z^{ms+6r}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^7\mathfrak{A} + {}^7\mathfrak{B} + {}^7\mathfrak{C} + {}^7\mathfrak{G}\right) z^{ms+7r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^{2n}\mathfrak{A} + {}^{2n}\mathfrak{B} \ldots\ldots + {}^{2n}\mathfrak{N} + {}^{2n}\overset{n}{\mathfrak{N}}\right) z^{ms+2ns}$$
$$+ \binom{m}{1} a^{m-*} \left({}^{2n+1}\mathfrak{A} + {}^{2n+1}\mathfrak{B} \ldots\ldots + {}^{2n+1}\mathfrak{N} + {}^{2n+1}\overset{n+1}{\mathfrak{N}}\right) z^{ms+(2n+1)r}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

Der Werth des Zeichens * wird durch die Anzahl der Factoren b, c, d, e... in den einzelnen Complexionen der Ordnungen bestimmt (7) und

für $* = 1, 2, 3, 4 \ldots$

wird $a^{m+*} = a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4} \ldots$

und $\binom{m}{1} = ({}^m\mathfrak{A}\, a) = ({}^m\mathfrak{A}\, a), ({}^m\mathfrak{B}\, b), ({}^m\mathfrak{C}\, c), ({}^m\mathfrak{D}\, b), \ldots$

Aus dieser Werthbestimmung von * erhellet zugleich, daß die Factoren $a^{m-*}$ und $\binom{m}{1}$ in der Formel, auf die einzelnen Complexionen der Ordnungen in ihr sich beziehen.

Die

Die beyden letzten Glieder der Formel (das [2n+1]te und [2n+2]te vom erſtern an gezählt) geben den Unterſchied in der Folge der Ordnungen allgemein an, nachdem der Summenexponent der Ordnungen eine gerade Zahl 2n oder eine ungerade 2n+1 iſt.

Es iſt vortheilhaft, bey den zu ſuchenden combinatoriſch-analytiſchen Formeln, die auf die allgemeinſte Art gezeichneten Annahmen und Vorausſetzungen zum Grund zu legen (Töpfers Comb. Anal. Vorr. S. XI-XIII). Daher ich auch hier die allgemeinere Reihe

$$p = az^s + bz^{s+r} + \text{etc}$$

der einfacher ausgedruckten (1) vorgezogen habe.

16. Exempel. Der Dignität $p^m$ (15) ſiebendes Glied, oder $p^m]7 = p^m \varkappa 7 . z^{ms+6r}$ darzuſtellen.

Der Summenexponent der Ordnungen im Coefficienten eines verlangten Gliedes iſt (nach 15) allemal um 1 kleiner, als die Zahl des Gliedes. Folglich iſt der 7de Coefficient, oder

$$p^m \varkappa 7 = ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1}\, a^{m-*} \left({}^{6}\mathfrak{A} + {}^{6}\mathfrak{B} + {}^{6}\mathfrak{C} + {}^{6}\mathfrak{F}\right)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Daraus fließt folgende Vorſchrift: 1) Man entwerfe, nach dem hier beygefügten Zeiger, vermittelſt des Geſetzes (11, B), die Buchſtabeninvolution zur Summe 6, und ſetze 2) den einzelnen Complexionen derſelben, die Potenzen $a^{m-*}$ (wie in 14), und die Moivriſchen Unzen $({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1}$ vor (4, 15), indem man den Werth des Zeichens * bey beyden, für jede Complexion aus der Anzahl der Factoren b, c, d, e... die auf $a^{m-*}$ folgen (7) beſtimmt (15). So kommt für das Exempel, $p^m \varkappa 7 =$

$({}^{m}\mathfrak{F}\,f)\,a^{m-6}b^{6} + ({}^{m}\mathfrak{E}\,e)\,a^{m-5}b^{4}c + ({}^{m}\mathfrak{D}\,d)\,a^{m-4}b^{3}d$
$+ ({}^{m}\mathfrak{D}\,d)\,a^{m-4}b^{2}c^{2} + ({}^{m}\mathfrak{C}\,c)\,a^{m-3}b^{2}e + ({}^{m}\mathfrak{C}\,c)\,a^{m-3}bcd$
$+ ({}^{m}\mathfrak{B}\,b)\,a^{m-2}bf + ({}^{m}\mathfrak{C}\,c)\,a^{m-3}c^{3} + ({}^{m}\mathfrak{B}\,b)\,a^{m-2}ce$
$+ ({}^{m}\mathfrak{B}\,b)\,a^{m-2}d^{2} + ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)\,a^{m-1}g$

und daraus $p^{m} \times 7.\ z^{ms+6r} = p^{m}\,7$, das geforderte 7de Glied.

Ich habe hier, Kürze halber, die Zeichen der Moivriſchen Unzen ${}^{m}\mathfrak{A}\,a$, ${}^{m}\mathfrak{B}\,b$, u. ſ. w. beybehalten, weil die Beſtimmung ihrer Werthe für jede Complexion, aus der Anzahl und den Exponenten der in ihr vorkommenden Buchſtaben (4 und die dortigen Exempel) nicht die geringſte Schwierigkeit hat.

17. Die Moivriſche Reihe (1) ordnet die Producte von a, b, c, d... in den Coefficienten, nicht, wie es anfänglich ſcheinen könnte, nach der Folge der Potenzen von a; wie aus dem Gliede $({}^{m}\mathfrak{B}\,b)\,a^{m-2}bf$ des Exempels (16), das zwiſchen $({}^{m}\mathfrak{C}\,c)\,a^{m-3}bcd$ und $({}^{m}\mathfrak{C}\,c)\,a^{m-3}c^{3}$ eingeſchoben iſt, deutlich erhellet. Wie man aus der Moivriſchen Potenzreihe (1) und Formel (15) in die von mir (*Nov. Syſt. Perm. p.* LIV, 7) gegebene übergehen könne (mein Progr. §. 18).

## Bemerkungen, de Moivre's combinatoriſches Verfahren betreffend.

18. De Moivre hat von der Bezifferung der Buchſtaben (von ſeinen *Exponents of the Letters* [6]) den Nutzen bey weitem nicht gezogen, den er nach der Veranlaſſung der Aufgabe, wo er ſie brauchte, hätte ziehen können. In den *Philoſ. Tranſ.* a. a. O. giebt er für die Producte in den Coefficienten der Reihe $p^{m} = (az + bz^{2} + cz^{3}\ldots)^{m}$ folgende Regel: To have all the *Products* belonging to a certain Power of z (z. B. $z^{m+r}$, wo r jede poſitive ganze Zahl bedeuten kann) you muſt

muſt find all the Products, where *the Sum of the Exponents of the Letters which compoſe'em ſhall allways be the ſame with the Index of that Power* (d. i. m+r, im obigen Falle). In den *Miſc. Anal.* p. 87, wo er die Glieder für $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^n$ beſtimmt, wiederholt er das nämliche: De productis literalibus, id praeſertim eſt obſeruatu dignum, *exponentes* in ſingulis productis eidem poteſtati indeterminatae z annectendis, *eandem ſemper conficere ſummam*, quae quidem ſumma ſemper *aequalis eſt, alteri cuidam ſummae, quae colligitur ex additione indicis generalis* n, *et indicis eius poteſtatis indeterminatae* z, *cui producta haec literalia annectuntur*. Und ebendaſelbſt: Cum poteſtas quaelibet indeterminatae z, ad interuallum quodlibet datum l a primo ſeriei termino poſita ſit $z^l$, inde ſequitur *producta omnia literalia* poteſtati $z^l$ annectenda, adeoque ad interuallum l ponenda, obtineri poſſe, ſi ita *combinentur* literae ingredientes Multinomium datum, vt *ſumma Exponentium in productis ſingulis ſemper euadat* $n+l$, *numerus vero literarum ſit* n.

19. Nach ſolchen Aeußerungen über die Beſchaffenheit dieſer Producte ließe ſich nun wohl erwarten de Moivre werde die möglichen Arten, in welche ſich eine Zahl m+r oder n+l (wo m oder n unbeſtimmte, r oder l hinzugegebene Zahlen ſind) in Theile zerfällen läßt, deren Anzahl immer m oder n beträgt, in einer allgemeinen Aufgabe vortragen. An deren Stelle aller legt er (Ebend. p. 89) ſein Geſetz der Buchſtabenproducte vor, nach welchem er alle vorhergehende Producte der Coefficienten bis mit den erſten (3, und mein Programm p. VII, VIII) in Anſpruch nimmt; ob er ſchon, wenige Zeilen vorher (p. 88), ausdrücklich und ſehr wahr ſagt, dieſe Producte können, ſo wie die zugehörigen Unzen, *abs-*

*que*

*que vlla consideratione relationis, quam terminus ille haberet ad terminos anteriores*, bestimmt werden.

20. Noch mehr: Bey der speciellen Anwendung, die de Moivre (Ebend. p. 89) von seinem Satze auf die Potenz $(1 - bz - cz^2 - dz^3 \ldots)^{-1}$ für $a = 1$ und $n = -1$ macht, sagt er in dem darauf folgenden Corollario (p. 90): Si *Exponentes literarum* (diese fangen in seinem Hauptsatze mit a an, so, daß sich 1 auf a, 2 auf b, 3 auf c u. s. w. bezieht) omnes *Vnitate minuantur*, ita, vt *exponens literae* b *euadat* 1; *literae* c, 2; *literae* d, 3; *et sic deinceps*, tunc erit *summa Exponentium* in productis singulis sub eadem potestate $z^n$ ordinandis, *aequalis indici huius potestatis*. Hier hat also de Moivre, durch den speciellen Fall (für $a = 1$) veranlaßt, den Vortheil dieser Bezifferung vor jener (den Vortheil, bey einem unbestimmten Potenzexponenten n

nicht $\binom{1, 2, 3 \ldots}{a, b, c \ldots}$ sondern $\binom{1, 2, 3 \ldots}{b, c, d \ldots}$

zum Zeiger zu nehmen [6]) in so fern man hier nur auf die bestimmte Summe 1 *) nicht auf die unbestimmte $n+1$ zu sehen hat, selbst eingesehen. Und dennoch ist auch dieser Fingerzeig ohne Wirkung geblieben. Es ist merkwürdig, daß ein Mann, wie de Moivre, bey seinen großen combinatorischen Kenntnissen, die er theils in einzelnen Abhandlungen in den philosophischen Transactionen, theils in eigenen Schriften (*Doctrine of Chances*, *Annuities on Lives* und in den *Miscell. Anal.*) gezeigt hat, den höchst wichtigen Einfluß der combinatorischen Ope-

*) So gebt auch eine andere von de Moivre bey Umkehrung der Reihen (*Philos. Transf.* Vol. XX. *for* 1698. *No.* 240) gegebene Regel: Combine the Capital Letters (die angenommenen, ihrem Werthe nach, zu bestimmenden Coefficienten der zu findenden Reihe) as often, as you can make *the sum of their Exponents equal to the Index of the Power to which they belong*, nur auf bestimmte Summen 2, 3, 4, 5 ...

muſt ſind all the Products, where *the Sum of the Exponents of the Letters which compoſe'em ſhall allways be the ſame with the Index of that Power* (d. i. m+r, im obigen Falle). In den *Miſc. Anal.* p. 87, wo er die Glieder für $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^n$ beſtimmt, wiederholt er das nämliche: De productis literalibus, id praeſertim eſt obſeruatu dignum, *exponentes* in ſingulis productis eidem poteſtati indeterminatae z annectendis, *eandem ſemper conficere ſummam*, quae quidem ſumma ſemper *aequalis eſt, alteri cuidam ſummae, quae colligitur ex additione indicis generalis* n, *et indicis eius poteſtatis indeterminatae* z, *cui producta haec literalia annectuntur.* Und ebendaſelbſt: Cum poteſtas quaelibet indeterminatae z, ad interuallum quodlibet datum l a primo ſeriei termino poſita ſit $z^l$, inde ſequitur *producta omnia literalia* poteſtati $z^l$ annectenda, adeoque ad interuallum l ponenda, obtineri poſſe, ſi ita *combinentur* literae ingredientes Multinomium datum, vt *ſumma Exponentium in productis ſingulis ſemper euadat n+l, numerus vero literarum ſit* n.

19. Nach ſolchen Aeußerungen über die Beſchaffenheit dieſer Producte ließe ſich nun wohl erwarten De Moivre werde die möglichen Arten, in welche ſich eine Zahl m+r oder n+l (wo m oder n unbeſtimmte, r oder l hingegen gegebene Zahlen ſind) in Theile zerfällen läßt, deren Anzahl immer m oder n beträgt, in einer allgemeinen Aufgabe vortragen. An deren Stelle aller legt er (Ebend. p. 89) ſein Geſetz der Buchſtabenproducte vor, nach welchem er alle vorhergehende Producte der Coefficienten bis mit den erſten (3, und mein Programm p. VII, VIII) in Anſpruch nimmt; ob er ſchon, wenige Zeilen vorher (p. 88), ausdrücklich und ſehr wahr ſagt, dieſe Producte können, ſo wie die zugehörigen Unzen, *abs-*

*que*

ſchaffen folgende Glieder aus vorhergehenden; er aber ſey auf einen *Metodo aſſai elegante e curioſo* verfallen, nach welchem man das Geſuchte *con incredibile facilità* finde (*Giorn.* 1747. *p.* 313).

22. Boscovich ſetzt dabey das Problem voraus: Eine gegebene Zahl auf alle mögliche Arten aus ganzen Zahlen als Theilen zuſammen zu ſetzen; *Trovare tutte le maniere, nelle quali poſſa un numero dato eſſer formato di parti, che contengano numeri interi.* Darauf wird (*Giorn.* 1747 *p.* 394 die Regel dafür gegeben, und (p. 395) auf die Zahl 6 angewendet, deren Complexionen (nebſt denen der vorhergehenden Zahlen und der Zahl 7) in einer Tafel am Ende des Bandes dargeſtellt ſind. Und hierinn iſt Boscovich weiter gegangen als de Moivre, hat wenigſtens das, was de Moivre bereits wahrgenommen (18. 20) und indirecte ſchon benutzt hatte (3 und 10; 11, B) nach ſeiner Art ausgeführt.

23. Das Problem (22) aufzulöſen, giebt Boscovich eine doppelte Anweiſung. Die erſte ſchaft die einzelnen Complexionen der verlangten Summe, von der vorhergehenden ganz independent, die andere aber dependent. Beyde Verfahren ſollen hier an folgenden Darſtellungen deutlich gemacht und nachgewieſen werden:

## Complexionen zu beſtimmten Summen, nach Boſcovich.

(*Giorn.* 1747, am Ende, *tavola ſeconda*).

| a) für die Summe 6 | b) für die Summe 7 |
|---|---|
| 111111 | 1111111 |
| 11112 | 111112 |
| 1122 | 11122 |
| 222 | 1222 |
| 1113 | 11113 |
| 123 | 1123 |
| 33 | 223 |
| 114 | 133 |
| 24 | 1114 |
| 15 | 124 |
| 6 | 34 |
| | 115 |
| | 25 |
| | 16 |
| | 7 |

24. Die beyden **Boſcovichſchen** Aufgaben ſind folgende:

A. **Aufgabe 1. Die (gutgeordneten) Complexionen einer gegebenen Summe n, independent von der vorhergehenden Summe (n—1), zu finden** (*Giorn.* 1747. *p.* 394, 395).

**Auflöſung.** Man ſchreibe für die erſte Complexion ſo viel Einheiten (Einſen) in einer Reihe nach einander, als die Zahl, z. B. 6 oder 7 (23, a, b) enthält.

2) Darunter ſchreibe man für die zweyte Complexion eine 2 mit den übrigen Einheiten, und für die folgende zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. ſ. w. ſo lange ſich die gegebene Summe

auf

auf dieſe Art (durch Setzung von 2en und 1ſen) hervorbringen und darſtellen läßt.

3) Sind die 2en abgelaufen, ſo ſchreibe man für die folgenden Complexionen am Ende, eine 3 nebſt den übrigen Einheiten; dann eine 3 mit einer 2 und den übrigen Einheiten; dann eine 3 nebſt zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. ſ. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebſt einer 2.... und ſo geht es auf die 4 und 5 und 6 u. ſ. w. fort, nach Beſchaffenheit der Summe; ſo, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum erſtenmale am Ende vorkommt (von den niedrigſten Zahlen jedesmal anfangend) erſt lauter Einſen zur Ergänzung nimmt, dann für die folgenden Complexionen neben dieſer Endzahl eine 2, dann zwey, und ſo mehrere 2en beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einſen ergänzt; dann weiter eine, und ſo in der Folge mehrere 3en damit verbindet u. ſ. w. nur keine Zahl die größer wäre, als die Endzahl der Complexion, die man eben bearbeitet.

Exempel zu dieſer Aufgabe geben die Complexionen zur Summe 6 und 7 (in 23; a, b).

B. Aufgabe 2. Die (gutgeordneten) Complexionen einer gegebenen Summe n, aus den (gutgeordneten) Complexionen der nächſtvorhergehenden Summe n—1 zu finden (*Giorn.* 1748. *p.* 15. §. 8).

Auflöſung. 1) Man ſetze allen einzelnen Complexionen der nächſtvorhergehenden Summe (n—1) das Element 1 (die Einheit) vor.

2) Man vertauſche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe n—1 bey denen die beyden erſten Elemente nicht einerley, ſondern verſchieden ſind) das erſte Element ſolcher Complexionen, mit dem nächſtfol-

genden gröſsern Elemente, und füge solchem die übrigen Elemente der Complexion unverändert bey.

3) Die Complexionen (die Auflösung 1 und 2 geben) mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus 1, die aus 2 setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in 2 (wenn nämlich der Complexion zur Summe n — 1 erste beyde Elemente nicht verschieden sind) so setzt man blos die aus 1, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe n — 1 fort.

25. Exempel zu 24, B. Aus den Complexionen zur Summe 6 (23, a) die Complexionen zur Summe 7 (23, b) herzuleiten.

Aus (23, a) erhellet, daß die ersten 5 Complexionen der gegebenen Summe 6, die beyden ersten Elemente nicht verschieden haben; man kann sie also auch nur (nach Auflösung 1) durch Vorsetzung einer 1 zur Summe 7 umändern. Die 6te Complexion 123 hingegen, giebt 1123 und 223 (nach Auflösung 1, 2). Die beyden folgenden 33 und 114 geben nur 133 und 1114 (nach Auflösung 1) Aus den drey letzten 24; 15; 6 aber, können 124 und 34, ferner 115 und 25, endlich 16 und 7, als letzte Complexion zur Summe 7 (nach Auflösung 1, 2) abgeleitet werden.

26. Die Auflösung für 24, B findet sich in der dort angezeigten Stelle des *Giornale* nicht so ausführlich wie hier aus einander gesetzt. Sie kommt mit der (in 10) in Absicht auf die ersten beyden Theile überein, und ist blos durch den dritten Theil, der die Ordnung und Folge der Complexionen auf einander bestimmt, verschieden. Eine ähnlich ausgedrückte, nur auf Buchstaben (nicht auf Zahlen) bezogene Regel, wie man sie für die Buchstabenproducte bey dem Polynomialtheoreme (wie die Moivrische [3] nur bequemer) unmittelbar brauchen kann,

wird

wird (*Giorn.* 1748. *p.* 18. §. 18. und 1747. *p.* 402. §. 16.) angegeben.

27. Man könnte die Regel für die Complexionen einer gegebenen Summe (24, A, B) z. B. für die Summe 7 (23, b) auch so abfassen:

1) Man setze zu 1, die Complexion zur Summe 6 (des Complements für 1 zu der gegebenen Zahl) aus lauter Einsen geschrieben.

2) Man setze zu 2, die Complexionen der Zahl 5 aus 1, 2 geschrieben.

3) Man setze zu 3, die Complexionen der Zahl 4, aus 1, 2, 3 geschrieben.

4) Man setze zu 4, alle Complexionen der Zahl 3, und zu 5 die der Zahl 2, und zur 6 die 1, und zuletzt die Zahl 7 selbst. Die Summe aller der so gefundenen Complexionen, giebt die Complexionen der gegebenen Summe 7.

Anmerk. Hier braucht bey den Summen, deren Zahlen gleich oder kleiner sind, als die Zahlen, zu denen sie gesetzt werden sollen, nicht angegeben zu werden, aus welchen Zahlen man sie schreiben soll, weil von solchen Summen alle Complexionen beyzuschreiben sind.

28. Diese Regel macht, ihrer Form nach, die Complexionen einer verlangten Summe von allen vorhergehenden Summen, wie die Moivrische (3), abhängig. Da man aber die den Endzahlen 1, 2, 3, 4 ... beyzuschreibenden Complexionen (nach 24, A) independent von andern finden kann: so ist sie, so gut wie diese, ganz unabhängig, und man hat hier ein Verfahren, das auf immer kleinere Summen führt, deren Complexionen man, wie man will, dependent oder independent von andern (24, A, B) schreiben kann.

29. Die Complexionen (in 23) mit ihren Regeln (in 24, 27) zeigen eine neue Auflöſung des für die geſamte Analyſis ſo wichtigen Problems der Combinationen zu beſtimmten Summen (*Infin. Dign.* §. XXII. *p.* 73 *ſeq.*), die von der meinigen (a. a. O.) ſowohl der Form, als den Gründen nach, ganz verſchieden iſt, aber große Aehnlichkeit mit der (nach 10 in 11, B) aufgeſtellten lexikographiſchen Involution hat. Den Grund dieſer Aehnlichkeit zeigt die (in 26) angeführte Verſchiedenheit der beyden Auflöſungen (10 und 24, B).

30. Ein neues Beyſpiel der, durch blos abgeänderte Lage der Complexionen, beträchtlich abgeänderten Form (S. 323, 6; 335, 24) wird folgende Vergleichung der Anordnungen (in 11, B und 23, a, b) geben:

Die beyderſeits gut geordneten, nicht claſſenweiſe fortgehenden Complexionen, jener erſten (11, B) und dieſer zweyten (23) Darſtellung, ſind: jene, nach Anfangszahlen, dieſe nach Endzahlen rangirt, ſo, daß alle mit 1, 2, 3, 4... ſich anfangende oder ſich endende Complexionen beyſammen ſtehen; ſie geben, gut geordnete Complexionen nach gut geordneten Claſſen, wenn man die Unionen, Binionen, Ternionen u. ſ. w. bey jenen von oben herunter, bey dieſen von unten herauf ſteigend, nach der Ordnung ſammlet; jene gehen, wie ſie gegeben ſind, dieſe rückwärts geleſen (oder, um die verticale Colonne ihrer Endzahlen, wie um eine unbewegliche Axe gedreht [S. 186, b] und auf die andere Seite gelegt), beyde in directer lexikographiſcher, aber von einander verſchiedener, Ordnung fort; jene geben eine Involution in aller Form, die alle (gutgeordnete) Complexionen aller vorhergehenden kleinern Summen enthält (11, B); dieſe geben, nach den Durchſchnitten der Darſtellung

hier

| | | |
|---|---|---|
| $^7\mathfrak{A}=$ | 1 | 1111111 |
| | 2 | 11111 |
| $^7\mathfrak{B}=$ | 2 | 2111 |
| | 2 | 221 |
| | 3 | 1111 |
| $^7\mathfrak{C}=$ | 3 | 211 |
| | 3 | 22 |
| | 3 | 31 |
| | 4 | 111 |
| $^7\mathfrak{D}=$ | 4 | 21 |
| | 4 | 3 |
| $^7\mathfrak{E}=$ | 5 | 11 |
| | 5 | 2 |
| $^7\mathfrak{F}=$ | 6 | 1 |
| $^7\mathfrak{G}=$ | 7 | |

hier zur Seite, auch eine Involution, aber von besonderer Art, bey welcher, hinter der verticalen und zwischen den horizontalen Linien, von den vorhergehenden niedrigern Summen, anfänglich nur diejenigen (umgekehrt gutgeordneten) Complexionen, die keine größere Zahl, als die Seitenzahl vor dem Striche, enthalten, nachher aber alle Complexionen der weiter folgenden kleinern Summen, vorkommen (27).

31. Boscovich hat verschiedene Vergleichungen angestellt, Summen von Summen, folgende aus vorhergehenden und umgekehrt, abzuleiten, auch einige andere Betrachtungen beygefügt, dafür die Darstellung (11, B) theils eben so gut, theils besser, als die seinige (23) gebraucht werden kann. Dahin gehören: Aus der Summe t die Summe t—1 oder t—q zu schaffen (*Giorn.* 1748. p. 22. §. 24. und p. 23, 24. §. 27, 28), die man (in 11, B) durch bloße Winkel absondern und ausschneiden kann. Eben so, aus der Summe t die für t+1 zu finden (*Giorn.* 1748. p. 15. §. 8), kann man (nach 11, B) die Summe t unmittelbar für t+1 gebrauchen, nach Boscovich (24, B) aber, muß man, diese aus jener abzuleiten, die Summe t+1 nothwendig besonders absetzen. Nicht mit gleicher Leichtigkeit, erinnert Boscovich, könne man die Summe t+q aus der Summe t herleiten (*Giorn.* 1748. p. 21. §. 22); die Sache sey zu sehr zusammengesetzt, und die Vorschrift dafür würde in Weitläuftigkeit führen. Nach jener Involution (11, B) hingegen, hat die Forderung, durch bloßes Ansetzen und

Umtauſchen der Zahlen, an und bey t, bis die Summe t+q erreicht iſt, nicht die geringſte Schwierigkeit.

32. Ein Vorzug, der in ſeiner Art ſehr erheblich werden kann, kommt jedoch der Boscovichſchen Darſtellung (24, A) ausſchließlich vor andern und ganz weſentlich zu: wenn man nämlich die Complexionen einer Summe, für Elemente, die ſprungweiſe fortgehen, angeben ſoll (*Giorn.* 1748. p. 86, 87. §. 10).

Geſetzt, man brauchte die Complexionen zur Summe 20 blos aus den Elementen 1, 7, 10 geſchrieben, ſo käme:

$^{20}\mathfrak{A} =$ 1 1 1111111111111111111

$^{20}\mathfrak{G} = \begin{cases} 7\ 1\ 1111111111 \\ 7\ 7\ 1111 \end{cases}$

$^{20}\mathfrak{K} = \begin{cases} 10\ 1\ 111111111 \\ 10\ 7\ 111 \\ 10\ 10 \end{cases}$

Es werden nämlich die wenigen 6 brauchbaren (*viles*) Complexionen, der Ordnungen $^{20}\mathfrak{A}$, $^{20}\mathfrak{G}$, $^{20}\mathfrak{K}$, aus 617 nach der Regel (24, A) hier unmittelbar und mit der größten Leichtigkeit, beſtimmt.

33. Noch erinnert Boscovich (*Giorn.* 1748. *p.* 89. §. 15.), es können Fälle vorkommen, wo man nur diejenigen Zerlegungen einer Summe t brauche, deren Anzahl der Theile in jeder Complexion einer gegebenen Zahl m gleich ſey. Für m Theile giebt er folgende Regel:

„Für die erſte Complexion ſetze man die Zahl „t — m + 1 in die letzte Stelle, und (m — 1) Einheiten „daneben; für die folgenden Complexionen ſetze man „t — m, nachher t — m — 1, darauf t — m — 2, u. ſ. w. „t — m — q in die letzte Stelle, und dazu alle Combinationen nach (m — 1) Theilen für die Complemente jener „Zahlen

„Zahlen zu t, von denen aber kein Theil gröſſer iſt, als „die zuerſt geſetzte letzte Zahl.“

Hier nun iſt Boscovich's Vorſchrift mangelhaft, weil er nicht vorher gezeigt hat, wie man Verbindungen nach zwey, drey, vier ꝛc. Theilen zu beſtimmten Summen aus beſtimmten Zahlen geſchrieben, finden kann. Seine Regel kann nur dann befolgt werden, wenn man die einzelnen Complexionen aller niedrigern Summen nach der Reihe entwirft, und beſonders abſetzt, um das Vorhergehende zum unmittelbaren Gebrauche für das Folgende vor ſich zu haben; und das führt in groſſe Weitläuftigkeiten (S. 322, 4; 323, 6, a).

34. Ueberhaupt hat Boscovich die Aufgabe in dieſer Form (33), nach welcher ſie gleichwohl bey weiterer Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis überaus wichtig wird, ſehr flüchtig, und gleichſam nur im Vorbeygehen, behandelt. Sie ſtellt, wie ſogleich in die Augen fällt, die mte Claſſe meiner Discerptionsaufgabe für Combinationen zu beſtimmten Summen dar, aber ſo, daß die einzelnen Complexionen in ihr nach fallenden Endziffern fortgehen, nicht, wie bey mir, wie wachſende Zahlen überhaupt ſteigen. So hat Boscovich (*Giorn.* 1748. p. 91. §. 17) die Zahl 7 nach Claſſen zerlegt, vorgeſtellt. Die Uebereinſtimmung in der Folge ihrer Complexionen mit der bey mir, iſt nur zufällig, (denn bis mit der Zahl 8 iſt alles in allen Claſſen einerley) und in ſo fern iſt das Boscovichſche Exempel nicht das beſte, weil es das Unterſcheidende von andern Verfahren nicht mit darſtellt. Für höhere Summen über 8 wird die Abweichung in mehrern Claſſen oft ſehr beträchtlich; *).

Ein

*) Herr Euler erinnert irgendwo in den *Comment. Ac. Sc. Petrop.* (den Ort weiß ich itzt nicht beſtimmt anzugeben) man müſſe ſich in Acht nehmen, ein Geſetz, das man ſchon bey mehrern Gliedern einer Reihe wahrgenommen habe, ſogleich für das Geſetz der

Ein Exempel hierzu kann die von mir (*Infin. Dign.* p. 80, 81) dargeſtellte fünfte Claſſe zur Summe 15, oder $^{15}$E geben, wenn man aus ihr alle Complexionen gleicher Endzahlen, wie ſie da verſchiedentlich zerſtreut auf einander folgen, zuſammenſtellt, und nun dieſe Boscovichiſche Folge von Complexionen mit der meinigen, von der ſie abgeleitet worden, vergleicht.

35. Boscovich (*Giorn.* 1748. p. 93. §. 22) gedenkt noch eines andern Problems: „Die Anzahl aller mög„lichen Zerfällungen einer Summe überhaupt, und „für jede beſtimmte Claſſe insbeſondere zu finden.“ Er ſagt, er habe die Auflöſung der einen ſo wie der andern Aufgabe verſchiedentlich verſucht, habe mehrere Wege, ſie zu erleichtern, eingeſchlagen, auch gefunden, wie aus der gegebenen Anzahl für die Summe t, die für die Summe t+1, t+2, etc ſich beſtimmen laſſe; weil ſie aber zur Erleichterung der Darſtellung der Coefficienten des Polynomialtheorems nichts beytrage, und mehr ein Gegenſtand der bloßen Neugierde, als nützlich ſey: ſo wolle er die Zeit mit weiterm Nachforſchen darüber nicht verderben. — Zu merken: daß die Auflöſung dieſer Aufgabe zu den ſchwerſten, die es in der Combinationslehre giebt, gehört, wie ſchon aus dem erhellet, was Leibnitz davon (mehr als 30 Jahre nach Herausgabe ſeiner Artis combinatoriae) an Johann Bernoulli ſchreibt: *An unquam*

der ganzen Reihe anzunehmen; und führt ein Beyſpiel an, wo die zehn erſten Glieder einer Reihe ein Geſetz befolgen, und nur erſt beym eilften ſich ein Abſprung zeigt. Das, was man hier ſieht, iſt noch ungleich auffallender. Hier kommt die Folge der Complexionen aller Claſſen der Zahlen von 1 bis 8, und ſo auch die beyden erſten Claſſen der Zahl 9 (denn nur erſt in der dritten Claſſe für 9 zeigt ſich eine Verſchiedenheit bey der Folge der Complexionen 135; 144; 225) bey mir und B. mit einander überein. Ein hier beobachtetes gemeinſchaftliches Geſetz für die 38 erſten Claſſen, würde gleichwohl nicht durchgängig ſeyn; auch iſt mein involutoriſches Geſetz von dem Boscovichſchen Verfahren himmelweit unterſchieden.

*quam conſideraſti numerum diſcerptionum, vel diuulſionum numeri dati*, quot *ſcilicet* modis *diuelli poſſit in partes duas, tres* etc? Videtur mihi eius determinatio non facilis et tamen digna, quae habeatur. (*Comm. Ep. Leibn. et Bern. T.* I. *p.* 462. Auch hat Euler die Anzahl der Complexionen in den Combinationsclaſſen zu beſtimmten Summen nicht durch einen Formularausdruck gegeben, ſondern nur eine Tafel dafür geliefert. Seine hieher gehörigen Unterſuchungen (*Introd. in Anal. Inf.* C. XVI. und *Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. T.* III. *p.* 125. *ſeq.*) erſetzen gewiß das, was Boscovich über dieſen Gegenſtand mitzutheilen nicht für nöthig befunden hat; um ſo mehr, da letzterer, in ſeinem verbeſſerten Aufſatze (unten, 39) beym Luino (daſ. p. 264. §. 27, 28) des Euleriſchen Verfahrens (a. a. O. der Intr.) ausdrücklich gedenkt, ſeiner vormaligen Verſuche aber, das Problem zu löſen, mit keiner Sylbe weiter Erwähnung thut.

36. Boscovich hat (*Giorn.* 1747. *Tavola prima e ſeconda*, am Ende des Bandes) eine der Moiviſchen (1) ähnliche Darſtellung des Polynomialpotenztheorems gegeben, die er *formola dell' Infinitinomio elevato* nennt. Dabey ſind zu bemerken: dieſer Formel einzelne Glieder (*membri*); dieſer Glieder einzelne Theile (*termini*); Buchſtabenproducte und [Moiviſche] Unzen (*Coefficienti letterali e numerici* [2]); Zahlen auf Buchſtaben bezogen (*numeri corriſpondenti*); beyder Verbindung mit einander (*numeri e lettere corriſpondenti*); die [in den Tafeln, am Ende des Bandes für 1747, mit beygefügten] Zerlegungen gegebener Zahlen (*diviſioni de' numeri*). Die Boscovichſche *formola* ſtellt die Potenz m der Reihe $p = a z^n + b z^{n+r} + c z^{n+2r} + \text{etc}$ dar, nachdem vorher (*Giorn.* 1747. p. 395-397 von §. 4-8) gezeigt, und p. 397-402 von §. 8-15 erwieſen worden, was die Potenz dieſer Reihe: für Poten-

zen

zen von z; für Dignitäten von a; für Producte von b, c, d...; für Unzen $\frac{m.\ m-1.\ etc}{1.\ 2.\ etc}$ habe. In der Folge (*Giorn.* 1748. p. 88. §. 12) wird erinnert die Exponenten n und r könnten alles seyn, eben so auch m; aber der beygebrachte Beweis erstrecke sich nur auf den Fall, wenn m eine ganze positive Zahl ist, und würde für gebrochene und negative Zahlen zu weitläuftig ausfallen:

37. Noch will ich hier, zur endlichen Vollendung, die Boscovichsche Potenzformel (36) eben so wie die Moivrische (13; 15) ganz allgemein ausgedrückt, aufstellen.

Wenn $p = az^s + bz^{s+r} + cz^{s+2r} + dz^{s+3r} + \text{etc}$ so ist, für jeden Werth des Exponentens m,

$$p^m = a^m z^{ms}$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\ {}^{1}\mathfrak{A}\ z^{ms+r}$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\left({}^{2}\mathfrak{A} + {}^{2}\mathfrak{B}\right) z^{ms+2r}$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\left({}^{3}\mathfrak{A} + {}^{3}\mathfrak{B} + {}^{3}\mathfrak{C}\right) z^{ms+3r}$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\left({}^{4}\mathfrak{A} + {}^{4}\mathfrak{B} + {}^{4}\mathfrak{C} + {}^{4}\mathfrak{D}\right) z^{ms+4r}$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\left({}^{5}\mathfrak{A} + {}^{5}\mathfrak{B} + {}^{5}\mathfrak{C} + {}^{5}\mathfrak{D} + {}^{5}\mathfrak{E}\right) z^{ms+5r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \binom{m}{1}^{*-1} a^{m-*}\left({}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} \ldots + {}^{n}\mathfrak{N}\right) z^{ms+nr}$$
$$\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ldots}{b\ c\ d\ e\ f\ g\ \ldots}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit der in (15) zeigt augenscheinlich, daß das Boscovichsche Verfahren von dem Moivrischen blos in der Darstellung und Folge der Complexionen und ihrer Anordnung verschieden ist. Auch

hier

hier ſind ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{B}$, ${}^{n}\mathfrak{C}$... lexikographiſche erſte, zweyte, dritte ... Ordnungen zur Summe n (wie in 15) aber auf die Boscovichſche Darſtellungen (30, 32) bezogen. Der übrigen Zeichen, Bedeutung und Auslegung, erklärt (15). Zugleich bemerkt man ſehr leicht, daß es hier in der Formel keine Sprünge bey den Ordnungen giebt, wie in 15. Auch iſt hier das allgemeine (n+1)te Glied, oder

$$p^{m}\rceil(n+1)=\overset{*-1}{({}^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\left({}^{n}\mathfrak{A}+{}^{n}\mathfrak{B}+{}^{n}\mathfrak{C}\ldots+{}^{n}\mathfrak{N}\right)z^{ms+m}$$

Man kann füglich, wie hier geſchehen, beyderley Ordnungen (die nach 11, B und 15, ſo wie die nach 30 und 37) durch einerley Alphabet ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{B}$, ${}^{n}\mathfrak{C}$... bezeichnen. Beyde nämlich gehen in direkter lexikographiſcher Ordnung, jedoch die erſten nach gut geordneten, die letzten nach umgekehrt gut geordneten Complexionen fort. Man darf daher, Zweydeutigkeit zu vermeiden, nur die Darſtellung (11, B oder 30) mit angeben, die man bey der Entwickelung gebrauchen und befolgen will.

38. Exempel. Der Reihe $p^{m}$ (37) Coefficienten zu $z^{ms+20r}$ für den Index $\binom{b,\ h,\ l}{1,\ 7,\ 10}$ zu beſtimmen.

Nach (32, 37) iſt, für den geforderten Coefficienten und den gegebenen Zeiger,

$$p^{m}\varkappa\,21=\overset{*-1}{({}^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\left({}^{20}\mathfrak{A}+{}^{20}\mathfrak{G}+{}^{20}\mathfrak{K}\right),$$

und ſo kommt nach den dortigen Complexionen (32) und ihren Buchſtabenwerthen, das Glied

$$p^{m}\rceil 21=\left\{\begin{array}{l}({}^{m}\mathfrak{U}\,u)a^{m-20}\,b^{20}+({}^{m}\mathfrak{O}\,o)a^{m-14}\,b^{13}h\\ +({}^{m}\mathfrak{H}\,b)a^{m-8}\,b^{6}h^{2}+({}^{m}\mathfrak{L}\,l)a^{m-11}\,b^{10}l\\ +({}^{m}\mathfrak{E}\,e)a^{m-5}\,b^{3}hl+({}^{m}\mathfrak{B}\,b)a^{m-2}\,l^{2}\end{array}\right\}z^{ms+20r}$$

39. Es wird nicht überflüſſig ſeyn, das Reſultat einer allgemeinen Ueberſicht dieſes ſo höchſt wichtigen combinatoriſch behandelten polynomiſchen Satzes hier mitzutheilen:

a) Vergleicht man die für das Polynomialtheorem nach de Moivre und Boscovich, hier (15, 37) gegebenen allgemeinen Darſtellungen unter ſich, und mit jener vorlängſt von mir bekannt gemachten Formel (*Nov. Syſt. Perm. p.* LIV, §. 7), ſo wird man finden, daß ſie in Folgendem mit einander übereinkommen:

„Die Coefficienten der einzelnen Glieder von

$$p^m = (az^s + bz^{s+r} + cz^{s+2r} + dz^{s+3r} + \text{etc})^m$$

„vom zweyten an, nach der Ordnung, werden aus „Combinationscomplexionen mit Widerholungen zu „den beſtimmten Summen 1, 2, 3, 4 ... n zuſammengeſetzt; Jede ſolche Summe enthält die ihr zugehörigen „Complexionen vollſtändig, nach allen Elementen des „Zeigers, ſie mögen nun ordentlich, wie 1, 2, 3 ... ν, „oder ſprungweiſe, wie z. B. 3, 7, 9 ... ν fortgehen, wo „ν = oder < n ſeyn kann; Jede einzelne Complexion „wird mit der zugehörigen Potenz von a, und dem Binomial- und Polynomial-Coefficienten verſehen, die „von der Anzahl der Elemente (oder Factoren) überhaupt, und von der Widerholung der gleichen Factoren „insbeſondere, abhangen (7, 4)““

b) Bezeichnet man alſo die Combinationscomplexionen mit Widerholungen zur Summe n allgemein durch $^{n}[\text{CPL}]$ oder auch (wie in *Nov. Syſt. Perm. p.* XLI, 12)*) durch

*) Nur daß hier (wo die Darſtellung der ſämtlichen, zur Summe n gehörigen, Complexionen gefordert wird) das C in eine Klammer, mit beygefügtem Summenexponenten n, geſetzt wird. Eben ſo würden [P] und $^{n}[V]$ die Permutations- und Variationscomplexionen $\binom{1,2,3,4}{1,2,3\ldots}$ aus den beygefügten Elementen des Zeigers bedeuten; doch pflege ich im letzten Falle gewöhnlicher $^{n}[C]$ mit Beyfügung des Zeigers, wie vorher, zu ſchreiben, weil näm-

durch $^{n}[C]$, und gebraucht man für die Verbindung der Binomial- mit den Polynomialcoefficienten die Moivriſchen Unzen (4), ſo laſſen ſich obige drey, und ſo auch andere (durch dergleichen Complexionen überhaupt gegebene) Darſtellungen, in nachſtehende Univerſalformel zuſammenfaſſen:

$$p^m = a^m z^{ms}$$
$$+ ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}\, {}^{1}[C]\, z^{ms+r} + ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}\, {}^{2}[C] z^{ms+2r}$$
$$+ ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}\, {}^{3}[C] z^{ms+3r} \ldots + ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}\, {}^{n}[C] z^{ms+nr} \ldots$$
$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

wo man auch $({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}$, wie gemeinſchaftliche, nur aber nach Beſchaffenheit der einzelnen Complexionen weiter zu beſtimmende Factoren (S. 397) den $^{1}[C]$, $^{2}[C]$ u. ſ. w. ein für allemal voranſetzen kann.

c) Hier wäre alſo (nach b)

$$p^m * (n+1) = ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1} a^{m-*}\, {}^{n}[C]$$

und die Formel für $p^m$ läßt, wie ſie hier (und in b) gegeben iſt, unentſchieden, nach welchem combinatoriſchen Geſetze man die Complexionen für $^{n}[C]$ ſuchen, und ob das Geſetz involutoriſch oder jedes andere ſeyn ſoll? Um nun involutoriſche Darſtellungen von andern deutlich zu unterſcheiden, darf man nur J ſtatt C in die Klammer ſetzen, und

nämlich die ſchlieſſtehenden Buchſtaben bereits für die einzelnen Claſſen und Ordnungen der Variationscomplexionen eingeführt ſind (*Nov. Syſt. Perm.* p. XVI, 23 und hier 15 Anmerk). Wo keine beſtimmten Summen vorkommen, verwechſelt man n mit dem Accent (') und wo bey den Complexionen Widerholungen nicht mit in Betrachtung zu ziehen, ſetzt man ſtatt des Neut'n (') den Gravis (`), aber rechter Hand der Klammer (Rothe *Diſſ. de. Ser. Reverſ.* p. 31, *not.* f).

39. Es wird nicht überflüſſig ſeyn, das Reſultat einer allgemeinen Ueberſicht dieſes ſo höchſt wichtigen combinatoriſch behandelten polynomiſchen Satzes hier mitzutheilen:

a) Vergleicht man die für das Polynomialtheorem nach de Moivre und Boscovich, hier (15, 37) gegebenen allgemeinen Darſtellungen unter ſich, und mit jener vorlängſt von mir bekannt gemachten Formel (*Nov. Syſt. Perm. p.* LIV, §. 7), ſo wird man finden, daß ſie in Folgendem mit einander übereinkommen:

„Die Coefficienten der einzelnen Glieder von

$$p^m=(az^s+bz^{s+r}+cz^{s+2r}+dz^{s+3r}+\text{etc})^m$$

„vom zweyten an, nach der Ordnung, werden aus „Combinationscomplexionen mit Widerholungen zu „den beſtimmten Summen 1, 2, 3, 4 ... n zuſammengeſetzt; Jede ſolche Summe enthält die ihr zugehörigen „Complexionen vollſtändig, nach allen Elementen des „Zeigers, ſie mögen nun ordentlich, wie 1, 2, 3 ... ν, „oder ſprungweiſe, wie z. B. 3, 7, 9 ... ν fortgehen, wo „ν = oder < n ſeyn kann; Jede einzelne Complexion „wird mit der zugehörigen Potenz von a, und dem Bi„nomial- und Polynomial-Coefficienten verſehen, die „von der Anzahl der Elemente (oder Factoren) überhaupt, und von der Widerholung der gleichen Factoren „insbeſondere, abhangen (7, 4)“

b) Bezeichnet man alſo die Combinationscomplexionen mit Widerholungen zur Summe n allgemein durch $^{n}[\text{CPL}]$ oder auch (wie in *Nov. Syſt. Perm. p.* XLI, 12)*) durch

*) Nur daß hier (wo die Darſtellung der ſämtlichen, zur Summe n gehörigen, Complexionen gefordert wird) das C in eine Klammer, mit beygefügtem Summenexponenten n, geſetzt wird. Eben ſo würden [P] und $^{n}[V]$ die Permutations- und Variationscomplexionen $\overset{(1,2,3,4)}{}$ $\overset{(1,2,3\ldots)}{}$ aus den beygefügten Elementen des Zeigers bedeuten; doch pflege ich im letzten Falle gewöhnlicher $^{n}[C]$, mit Beyfügung des Zeigers, wie vorher, zu ſchreiben, weil nämlich

durch $^{n}[C]$, und gebraucht man für die Verbindung der Binomial- mit den Polynomialcoefficienten die Moivrischen Unzen (4), so lassen sich obige drey, und so auch andere (durch dergleichen Complexionen überhaupt gegebene) Darstellungen, in nachstehende Universalformel zusammenfassen:

$$p^m = a^m z^{ms}$$
$$+ ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}\,{}^{1}[C]\,z^{ms+r} + ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}\,{}^{2}[C] z^{ms+2r}$$
$$+ ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}\,{}^{3}[C] z^{ms+3r} \ldots + ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}\,{}^{n}[C] z^{ms+nr} \ldots$$
$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

wo man auch $({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}$, wie gemeinschaftliche, nur aber nach Beschaffenheit der einzelnen Complexionen weiter zu bestimmende Factoren (S. 397) den $^{1}[C]$, $^{2}[C]$ u. s. w. ein für allemal voransetzen kann.

c) Hier wäre also (nach b)

$$p^m \times (n+1) = ({}^{m}\mathfrak{A}\,a)^{*-1} a^{m-*}\,{}^{n}[C]$$

und die Formel für $p^m$ läßt, wie sie hier (und in b) gegeben ist, unentschieden, nach welchem combinatorischen Gesetze man die Complexionen für $^{n}[C]$ suchen, und ob das Gesetz involutorisch oder jedes andere seyn soll? Um nun involutorische Darstellungen von andern deutlich zu unterscheiden, darf man nur J statt C in die Klammer setzen, und

nämlich die schiefstehenden Buchstaben bereits für die einzelnen Classen und Ordnungen der Variationscomplexionen eingeführt sind (*Nov. Syst. Perm.* p. XVI, 23 und hier 15 Anmerk). Wo keine bestimmten Summen vorkommen, verwechselt man n mit dem Accent (′) und wo bey den Complexionen Widerholungen nicht mit in Betrachtung zu ziehen, setzt man statt des Neut's (′) den Gravis (`), aber rechter Hand der Klammer (*Rothe Diss. de. Ser. Reversi.* §. 31, *not.* f).

und ſo $^{n}[J]$ für Involutionen zur Summe n überhaupt, und $^{n}[J_L]$, $^{n}[J_S]$ für lexikographiſche (nach Ordnungen) oder Syſtem-Involutionen (nach Claſſen) zur Summe n insbeſondere, gebrauchen. Durch dieſe dreyfache Subſtitution für $^{n}[C]$ in die obige Formel, erhält man:

$$1)\quad p^{m}\varkappa(n+1)=\overset{*-1}{(^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\,{}^{*}[J]$$

$$2)\quad p^{m}\varkappa(n+1)=\overset{*-1}{(^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\,{}^{*}[J_L]$$

$$3)\quad p^{m}\varkappa(n+1)=\overset{*-1}{(^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\,{}^{*}[J_S]$$

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 2 & 3 & \dots \\ a & b & c & d & \dots \end{pmatrix}$$

Für die $^{n}[J_L]$ in 2, die Involutionen (11, B oder 30. S. 409) gebraucht, kommen die Formeln (15 oder 37); die $^{n}[J_S]$ in (3) nach dem Discerptionsverfahren (*Inv. Dign. p.* 73 ſeq.) angeordnet, wird:

$$\overset{*-1}{(^{m}\mathfrak{A}\,a)}\,a^{m-*}\,{}^{*}[J_S]$$

$$=$$

$$^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,a^{n}A+{}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,b^{n}B\dots.+{}^{m}\mathfrak{M}\,a^{m-n}\,n^{n}\mathcal{N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ b & c & d & e & \dots \end{pmatrix}$$

und die Formel (b) für $p^{m}$ verwandelt ſich in die bekannte (*Nov. Syſt. Perm. p.* LIV, 7).

d) Die Darſtellung (30, S. 409) mit der Regel in (27), giebt ferner folgende Relation für die Involutionen, z. B. für die Summe 7 aus lexikographiſchen Complexionen (die Factoren 1, 2, 3 ... ſind hier Lokalzeichen)

$$^{7}[J_L] = 1^{6}[J_L]+2^{5}[J_L]+3^{4}[J_L]+4^{3}[J_L]$$
$$(1,2,3,\dots 7)\quad (1)\quad (1,2)\quad (1,2,3)\quad (1,2,3)$$
$$+5^{2}[J_L]+6^{1}[J_L]+7$$
$$(1,2)\quad (1)$$

daß

daß man alſo höhere Involutionen in niedrigere zerlegen, und umgekehrt, aus dieſen jene wieder zuſammenſetzen kann. Die höchſte Zahl des Zeigers kommt immer mit der niedrigſten der beyden Zahlen außer der Klammer (dem vorgeſetzten combinatoriſchen Elemente oder Lokalzeichen, und dem Summenexponenten) überein; auch dann, wenn beyde Zahlen gleich, folglich keine kleiner iſt, als die andere. Zerlegungen und Zuſammenſetzungen von Involutionen kommen bereits oben (S. 43-45; 58; auch S. 160, IV und 187, e) vor.

e) Die Formeln nach de Moivre und Boscovich (15, 37) gelten zwar für jeden Werth des Exponentens m, doch führen ſie, für den Fall, wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt, auf unnöthige Weitläuftigkeit, und bedürfen alſo in dieſer Rückſicht einer Verbeſſerung (Mein Progr. §. 12, 2°). Daher meine beyden combinatoriſch-analytiſchen Formeln (*Nov. Syſt. Perm.* p. LIV, 7, 8). Wenn nämlich m eine poſitive ganze Zahl iſt, ſo läßt ſich die obige 3te Formel (in c) mit Aenderung des Zeigers ſehr verkürzen, und ſo kommt das $(n+1)$te Glied, d. i.

$$p^m](n+1) = n^{m+n}\mathcal{N}\,z^{ms+ur}_{\binom{1\ 2\ 3\ 4\ \dots}{a\ b\ c\ d\ \dots}}$$

wo hier (wie in c) $\mathcal{N}$ die nte Combinationsclaſſe zu der beygeſetzten Summe (hier $m+n$, dort n) bedeutet.

f) Hier zeigt ſich deutlich, daß der Fall, wo man die Complexionen claſſenweiſe geordnet haben muß, ſehr frühzeitig eintritt; ja, daß er ſogar der erſte und ſimpelſte iſt, ſo wie er bey weiterer Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis am häufigſten vorkommt, und auch daher vorzügliche Aufmerkſamkeit verdient. Es iſt in der That zu verwundern, daß Boscovich die Wichtigkeit der nach Claſſen fortgehenden Com-

plexionen nicht eingeſehen, und auch das, was er dabey verſucht, ſo unvollſtändig und mangelhaft gelaſſen hat (33, 34). Vermuthlich hat ihn, die ſo große Leichtigkeit ſeiner erſten (lexikographiſchen) Darſtellung (24, A) abgehalten, die zweyte (vornehmlich nach ſeinem Verfahren bey weitem) nicht ſo leichte Claſſenordnung (33) weiter zu verfolgen. Wie wenig wichtig er aber dieſe letzte Anordnung in Vergleichung mit jener erſten Darſtellung muß gehalten haben, läßt ſich ſchon daraus abnehmen, daß er ihrer gleichſam nur gelegentlich gedenkt, und ihren Gebrauch blos mit den Worten: *viene l' occaſione* (*Giorn.* 1748. *p.* 89, §. 15) ankündiget.

40. *Francesco Luino* hat in einem Anhange zu ſeinem Werke: *Delle Progreſſioni e Serie*, *Libri due* (in Milano 1767) zwey damals noch ungedruckte Abhandlungen von Boscovich beygefügt, von welchen die zweyte ſeinen *Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita* (daſ. p. 257 ſeqq.) enthält. Dieſen Aufſatz lernte ich, bald nach der Ausgabe meines Buchs, *Infinitin. Dignit. Hiſt. Leges ac Formulae*, durch den hieſigen gelehrten und verdienten Privatdocenten der Mathematik, Herrn Witzleben, als einen ſchätzbaren Beytrag und eine ſcharfſinnige Erweiterung der Moivriſchen Methode kennen, von welcher ich in jenem Buche (*Infin. Dign.* §. XVI) gehandelt hatte. Am Ende dieſes Aufſatzes (§. 29. *Scol.* 2) ſagt Boscovich ausdrücklich, er habe darinn ſeine ſchon vorlängſt (20 Jahre früher) im *Giorn. de' Lett. di Roma* (1747), bekannt gemachte Methode, auf eine ſehr viel einfachere und directere, aus der Natur des Gegenſtandes ſelbſt und den combinatoriſchen Formeln abgeleitete Art, demonſtrirt; welcher Aeußerung auch Luino (p. 140 in der Note) beyſtimmt, und hier eine *dimoſtrazione, e più diretta, ed incomparabilmente più ſemplice* findet. Das iſt wahr; auch ſind die

in

in dieſem Aufſatze (p. 258) als Beyſpiel aufgeführten Complexionen der Zerfällung der Zahl 6, nicht, wie im *Giornale* durchgängig und auch hier (in 23), ſondern wie hier (in 30, 32), die gröſsern Zahlen voran, geſtellt, wie ſie zuſammen eine in directer lexikographiſcher Folge, nach umgekehrt gutgeordneten Complexionen fortſchreitende Darſtellung geben; obſchon übrigens Boscovich, ſo wenig als de Moivre (9), an Involution und lexikographiſche Ordnung gedacht hat. Nach ſolchen Aeuſserungen des Verfaſſers und Herausgebers jenes einzelnen verbeſſerten Aufſatzes, konnte es mir nun ziemlich gleichgültig ſeyn, die bereits ſelten gewordene Sammlung des *Giornale*, zu verſchiedenen Zeiten und an verſchiedenen Orten, ſelbſt in den hieſigen beyden öffentlichen Bibliotheken, vergeblich geſucht zu haben. Nur der neuerlich gefaſste Entſchluſs, über die von mir wahrgenommene lexikographiſche Ordnung bey den Coefficienten des Moiviſchen Polynomialtheorems, einige Bemerkungen in einem akademiſchen Programm (S. 385 Anm.) vorzulegen, lieſs mich noch einen Verſuch wagen, um die Vergleichung nachzuſehen, die Boscovich (wie in jenem Aufſatze p. 205 nur mit zween Worten berichtet wird) zwiſchen ſeinem und dem Moiviſchen Verfahren ſelbſt angeſtellt hat. Ich fand endlich jene Zeitſchrift in der Churfürſtlichen Bibliothek zu Dresden, und erhielt, um den Anfang dieſes Jahres (1795) die beyden Jahrgänge (1747, 1748) durch die Gefälligkeit des Herrn Bibliothekar Dasdorfs, auf kurze Zeit zum Gebrauch *), wo ich denn mit Vergnü-



*) Dieſe Zeitſchrift fängt mit dem Jahre 1742 an, und führt in den erſten drey Jahrgängen den Titel: *Giornale de' Letterati, publicato col titolo di Novelle Letterarie Oltramontane.* Im Jahre 1745 bekam ſie eine andere Einrichtung (davon die Vorrede zu d. J.) unter dem Namen *Giornale de' Letterati*, und mit Weglaſſung der Worte: *publicato* etc. Es iſt alle Jahre nur ein Band

gen wahrnahm, was ich nicht erwartet hätte, daß jene neuere Abhandlung beym Luino die Aufsätze des *Giornale* gar nicht entbehrlich macht. Jene enthält blos eine abgekürzte, und in Absicht auf den Beweis einfachere Darstellung der Boscovichschen Sätze und deren Anwendung auf das Polynomialtheorem; diese hingegen breiten sich über den Gegenstand viel weiter aus; auch sind in den beygefügten *Riflessioni* und sonst, über die Methode selbst und das Verhalten der einzelnen Glieder der Reihe gegeneinander, schätzbare Bemerkungen beygebracht worden, von denen, in jener verkürzten Abhandlung auch nicht die geringste Spur sich zeigt, oder etwas davon nachgewiesen wird.

Das aus dem *Giornale* hier Excerpirte wird hoffentlich die Vorzüge jener ältern Boscovichschen Aufsätze (selbst bey aller Weitschweifigkeit im Beweisen) von dem neuern beym Luino, außer Zweifel setzen; die sonst, wenigstens für Leser des letztern, leicht verlohren gehen, und das unverdiente Schicksal erfahren möchten, das nicht selten Originalschriften betroffen hat: durch die abkürzende Darstellung fremder Epitomatoren, auch wohl (wie hier) der Verfasser selbst — in Vergessenheit zu gerathen. Noch will ich, zum Beschluß, die merkwürdige Stelle von Boscovich, am Ende seines Aufsatzes beym Luino, hier anführen: *Succede quasi sempre anche in Geometria, e nel cal-*

Band (*Tomo*) erschienen, die Bände von 1743 und 1744 enthalten jeder zwey Theile, und mit 1748 hörte das *Giornale* schon ganz auf. Ob Boscovich die (*Giorn.* 1748. §. 31. p. 99) versprochene Anwendung combinatorischer Hülfsmittel auf die Umkehrung der Reihen, wo ihm de Moivre gleichfalls vorgegangen war, und welche aus jenen molto facilmente sich ergeben, irgendwo anders ausgeführt und aufgestellt hat, ist mir bey aller Bemühung, die ich, wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes, mir deshalb gegeben habe, bis jetzt noch unbekannt geblieben.

*calcolo, che le vie più dirittе, e più ſemplici per arrivare ad un termine naſcoſtò ſono le ultime a diſcuoprirſi* *).

Eine auffallende Beſtätigung dieſer, durch ſo häufige Erfahrungen anerkannten, wichtigen Wahrheit, hat neuerlich die ſo ſpät erſt aufgefundene und zu Stande gebrachte — combinatoriſche Analyſis — gegeben; dieſe allgemeine Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis, wo, bey der Aufſuchung und dem Vortrage der Formeln, bey der Entwickelung ihrer Reſultate, überall combinatoriſche Begriffe und Sätze angewendet, Verfahren und Zeichen gebraucht, ſtatt der algebraiſchen und tranſcendentiſchen (oft ſehr verwickelten und ſchweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatoriſchen geſetzt und benutzt werden.

*) Einen lehrreichen Commentar über dieſe Worte findet man in jener ſchönen Beſchreibung deſſelben Verfaſſers, wo es zweifelhaft iſt, ob man mehr den eindringenden Geiſt des Geometers, oder die lebendige Darſtellung des Dichters, bewundern ſoll. — Saepe mihi videor per ſylvam quandam vagari denſiſſimam, dum veritatem quampiam inquiro, ſpinis herbisque obrutam, et virgultis contectam. Longo ambitu per implexas, et intricatiſſimas ambages circumferor, ſignis per totum iter diſpoſitis, quae extent, et facile deprehendi poſſint. Vbi demum in eam incurro, inde trans tenues ramusculos frondesque tranſpiciens, agnoſco per ea ipſa relicta indicia vel illum locum, unde primo diſceſſeram, vel aliquem ex iis, quae in via offenderam, ad quem breui exſecto tramite, per ipſum eo alios adduco, labore breuiſſimo, omiſſis omnibus illis tortuoſis, atque ſpinoſis anfractibus, per quos primo ineeſſeram, quorum quidem me demum pudet; *quaſi vero non illa eſſet methodorum ſimpliciſſimarum ratio, atque natura, vt poſtremae in mentem veniant, et, niſi aliquanto obſtinatiore quaerantur animo, ne veniant quidem.* Boscov. Opp. pert. ad Opt. et Aſtron. T. II. p. 221. §. 83. Darauf folgen verſchiedene Belege zu jener Beſchreibung, und zum Beſchluß (p. 232. §. 116) eine der oben angeführten ganz ähnliche Stelle.

## II.

## Druck einer flüßigen Kugelſchale, auf die von ihr umgebene Kugelfläche.

Eine Kugel, deren Halbmeſſer SD = b, ſey von einer concentriſchen Kugelſchale flüßiger Materie, deren Halbmeſſer = a umgeben. Jeder Theil der flüßigen Materie werde gegen den Mittelpunkt von einer Kraft getrieben, die ſich wie eine Potenz der Entfernung vom Mittelpunkte verhält. Man ſucht:

I. Das Gewicht der flüßigen Materie.

II. Ihren Druck auf die Fläche der Kugel, deren Halbmeſſer = b.

1) Es ſey SP = x. Eine Kugelfläche, deren Halbmeſſer = x, iſt = $4x^2.\pi$; Alſo die Kugelſchale, deren Dicke dx iſt, = $4\pi.x^2.dx$ = wie gehörig dem Differentiale von $\frac{4\pi.x^3}{3}$, dem Inhalte der Kugel, die x zum Halbmeſſer hat.

2) In A ſey die Schwere gegen den Mittelpunkt = 1; ſo iſt ſie $\frac{x^n}{a^n}$ in P; Alſo das Gewicht der Kugelſchale (1) = $\frac{4.\pi}{a^n}.x^{n+2}dx$.

3) Folglich der Kugelſchale, die ſich von D bis P erſtreckt,

$$\text{Gewicht} = \frac{4.\pi}{(n+3).a^n}.(x^{n+3} - b^{n+3})$$

weil es für x = b verſchwindet.

4) Und

4) Und, der Kugelschale von D bis A

$$\text{Gewicht} = \frac{4\pi}{n+3} \cdot \frac{(a^{n+3} - b^{n+3})}{a^n}$$

$$= \frac{4\pi}{n+3}\left(a^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^n b^3\right)$$

5) Exempel $n = -2$; So ist das Gewicht (4) $= 4.\pi.(a^3 - a^2 b) = 4.\pi.a^2.(a - b)$.

6) Zur Erläuterung: Bey A habe eine Masse von einer gegebenen Dichte, und vom Raume $= e^3$, das Gewicht $= G$, so ist das Gewicht (4)

$$= \frac{4\pi}{n+3} \cdot \frac{a^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^n . b^3}{e^3} . G.$$

## Für II.

7) Der Druck ist so groß, als das Gewicht eines Prisma, voll der angezeigten flüßigen Materie, dessen Grundfläche eine Ebene wäre, so groß als die Kugelfläche, deren Halbmesser $= b$, und seine Höhe $= a - b$.

Das ist nur eine Anwendung des bekannten Satzes: Wie eine flüßige Materie auf den Boden des Gefäßes drückt, das sie enthält.

Hier ist kein Gefäß, aber die runde Gestalt der flüssigen Materie verursacht, daß sie sich durch ihren gegenseitigen Druck ringsherum eben so erhält, wie wenn sie in einem Gefäße eingeschlossen wäre. (Meine Aerometr. §. 26).

8. Von einem Prisma, dessen Grundfläche $= 4\,b^2.\pi$, die Höhe $= x$, ist das Element $= 4\,b^2\pi.\,dx$, und des Elements Gewicht $= 4\,b^2\pi.\frac{x^n}{a^n}.\,dx$; Also des Prisma

Gewicht $= \frac{4\pi}{n+1} \cdot \frac{b^2}{a^n} \cdot (x^{n+1} - b^{n+1})$

weil es für $x = b$ verſchwindet.

9) Folglich, für das Prisma, wo $x = a$; das Gewicht $\frac{4\pi}{n+1} \cdot b^2 \cdot \left(a - \left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot b\right) =$ dem Drucke (7).

Eben durch (6) zu erläutern, wie das Gewicht der Kugelſchale.

10) Für $n = -2$ kömmt in (9)

$-4\pi \cdot b^2 \cdot \left(a - \frac{a^2}{b}\right) = +4\pi \cdot b^2 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{b} - 1\right)$.

11) aus (4; 9) iſt

$$\frac{\text{Gewicht}}{\text{Druck}} = \frac{(n+1)}{(n+3)} \cdot \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{b^2 \cdot (a^{n+1} - b^{n+1})} = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{a^{n+1} \cdot b^2 - b^{n+3}}.$$

12) Für $n = -2$ iſt dieſer Quotient $= \frac{a^2 - ab}{ab - b^2}$.

13) Giebt es Fälle, wo der Druck (9) am größten oder kleinſten wird?

14) Man ſetze $b = a \cdot w$, ſo iſt

der Druck $= \frac{4\pi}{n+1} \cdot a^3 \cdot (w^2 - w^{n+3})$.

15) Der Druck iſt $= 0$, wenn $1 = w^{n+1}$ oder $w = 1$, wie ſich ſo verſteht.

16) Man ſetze $2 \cdot w \cdot dw - (n+3) w^{n+2} dw = 0$

alſo $\frac{2}{n+3} = w^{n+1}$; $\sqrt[n+1]{\frac{2}{n+3}} = w$.

17) Für

17) Für $n = 0$ oder unveränderliche Schwere iſt der Druck (14) $= 4\pi a^3 w^2 (1 - w)$ am größten (16) für $\frac{2}{3} = w$.

18) Für $n = -2$, der Druck (14) $= \frac{4\pi}{-1} . a^3 . w^2 . \left(1 - \frac{1}{w}\right)$; Aber $\frac{1}{w}$ iſt größer als 1; alſo der Druck $= 4\pi . a^3 . w^2 . \frac{1-w}{w} = 4\pi . a^3 . w . (1 - w)$

Am größten (16) für $2 = w^{-1}$ oder $w = \frac{1}{2}$.

19) Für $n = -1$, beruht die Integration auf Logarithmen; Da iſt in (8) das Element des Druckes $4 . b^2 . \pi . a . \frac{dx}{x}$, der Druck $= 4 . b^2 . a . \pi . \log x + \log$ Conſt oder $= 4 . b^2 . a . \pi . \log \frac{x}{b}$, und für $x = a$, der Druck $4\pi b^2 . a . \log \frac{a}{b}$.

20) Alſo verhält ſich der Druck wie $a^3 . w^2 . \log \frac{1}{w}$ oder wie $-w^2 . \log w$.

Iſt alſo am größten, wo

$-2 w dw . \log w = \frac{w^2 . dw}{w}$, oder $-\log w = \frac{1}{2}$.

Alſo wenn $\log e = 1$, wo $\log \frac{1}{w} = \frac{1}{2} . \log e$ und $\frac{1}{w} = e^{\frac{1}{2}}$ oder $w = \frac{1}{\sqrt{e}}$ alſo $b = \frac{a}{\sqrt{e}}$.

21) Wäre

21) Wäre die Dichte veränderlich, in $A = 1$ in $P = u$, so wäre in (8)
das Element $= \frac{4\pi . b^2}{a^n} . x^n . u . dx$.

22) Verhielte sich u wie $x^m$, oder wäre $u = \frac{x^m}{a^m}$,
so käme das Element $\frac{4.\pi . b^2}{a^{n+m}} . x^{n+m} . dx$.

23) Also setze man in (9) nur $n+m$ statt n, so hat man des ganzen Prisma Druck
$= \frac{4.\pi . b^2}{(n+m+1) . a^{n+m}} . (a^{n+m+1} - b^{n+m+1})$.

24) Logarithmen braucht man hie, wo $n+m = -1$

25) Ich hatte im Februar 1788 Abschriften von Briefen zwischen Bilfinger und Joh. Bernoulli in Händen, inaleichen von Briefen Dan. Bernoulli's und Goldbachs, sie gehörten einem Wirtenberger, Herrn M. Paulus (itzt Professor zu Jena) der sie mir bey seinem hiesigen Aufenthalte auf einer gelehrten Reise mittheilte.

26. Darunter war einer von J. Bern. an Bilfinger, vom 13. März 1723, aus dem erhellt, daß Bilfinger über den Satz Newtons Princ. L. II. Sect. V. Prop. XX. pag. ed. primae 292; 293; Zweifel gehabt. Es ist hie (7) nur noch die Dichte der flüßigen Materie veränderlich gesetzt (21).

27. Ich sehe, daß da N. die Schwere unveränderlich nimmt: gravitatis... aequales esse actiones in aequales partes Superficierum omnium.

28. Bernoulli gesteht, N. Beweis sey dunkel; und setzt statt dessen, folgenden:

Con-

Concipe totum fluidum quod comprehensum inter duas, superficies sphaericas AEJ et DHM, distingui in cylindrulos, superficiei interiori DHM perpendiculariter insistentes, *liaf*, *dabc*, *ebgh*,... habentes suas bases in *ia*, *ab*, *bg*... infinite parvas et in interstitia mixtilinea *fad*, *cbe*,...

Da meynt nun Bernoulli, die Kugelfläche, deren Halbmesser SD, trage nur die Cylinder, die Spacia mixtilinea werden von den anliegenden Cylindern gehalten, und erläutert dadurch auch Newton's Cor. 1.

29. Bernoulli zeichnet nur zweene concentrische Kreise in einer Ebene, wie die Figur darstellt.

Enthält der Ring zwischen ihnen Materie gegen den Mittelpunkt schwer, so müßte man wohl durch jeden Punct des äußern Umfangs, gerade Linien gegen den Mittelpunct ziehn, die theilten die ganze Kreisfläche, in Ausschnitte und den Ring in Trapezien, deren jedes ein Element des äußern Kreises, und ein ähnliches des innern, zu Grundlinien hätte, jede Seite aber allemal an einer Seite des nächsten Trapezium anliegend.

Da fielen die Spacia mixtilinea völlig weg.

Bey dem eigentlichen Gegenstande gegenwärtiger Untersuchungen concentrischer Kugelflächen, könnte man sich einen Theil der äußern Kugelfläche, als Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels vorstellen, dessen Spitze im Mittelpuncte wäre; dieser Theil wäre krumm, und gäbe eine Pyramide in der Bedeutung, in welcher Ausschnitt eines Kreises ein Dreyeck ist. Die innere Kugelfläche würde von dieser Pyramide in einer krummen Fläche geschnitten, welche der Grundfläche ähnlich wäre, und sich zu ihr verhielte, wie das Quadrat des kleinen Halbmessers SD zum Quadrate des großen SA.

Wählte

21) Wäre die Dichte veränderlich, in A = 1 in P = u, ſo wäre in (8)
das Element $= \frac{4\pi . b^2}{a^n} . x^n . u . dx$.

22) Verhielte ſich u wie $x^m$, oder wäre $u = \frac{x^m}{a^m}$, ſo käme das Element $\frac{4.\pi . b^2}{a^{n+m}} . x^{n+m} . dx$.

23) Alſo ſetze man in (9) nur n + m ſtatt n, ſo hat man des ganzen Prisma Druck
$= \frac{4.\pi . b^2}{(n+m+1) . a^{n+m}} . (a^{n+m+1} - b^{n+m+1})$.

24) Logarithmen braucht man hie, wo n + m = − 1

25) Ich hatte im Februar 1788 Abſchriften von Briefen zwiſchen Bilfinger und Joh. Bernoulli in Händen, inaleichen von Briefen Dan. Bernoulli's und Goldbachs, ſie gehörten einem Wirtenberger, Herrn M. Paulus (itzt Profeſſor zu Jena) der ſie mir bey ſeinem hieſigen Aufenthalte auf einer gelehrten Reiſe mittheilte.

26. Darunter war einer von J. Bern. an Bilfinger, vom 13. März 1723, aus dem erhellt, daß Bilfinger über den Satz Newtons Princ. L. II. Sect. V. Prop. XX. pag. ed. primae 292; 293; Zweifel gehabt. Es iſt hie (7) nur noch die Dichte der flüßigen Materie veränderlich geſetzt (21).

27. Ich ſehe, daß da N. die Schwere unveränderlich nimmt: gravitatis... aequales eſſe actiones in aequales partes Superficierum omnium.

28. Bernoulli geſteht, N. Beweis ſey dunkel; und ſetzt ſtatt deſſen, folgenden:

Con-

Concipe totum fluidum quod comprehenſum inter duas, ſuperficies ſphaericas AEJ et DHM, diſtingui in cylindrulos, ſuperficiei interiori DHM perpendiculariter inſiſtentes, *liaf*, *dabc*, *ebgh*,... habentes ſuas baſes in *ia*, *ab*, *bg*... infinite parvas et in interſtitia mixtilinea *fad*, *cbe*,...

Da meynt nun Bernoulli, die Kugelfläche, deren Halbmeſſer SD, trage nur die Cylinder, die Spacia mixtilinea werden von den anliegenden Cylindern gehalten, und erläutert dadurch auch Newton's Cor. 1.

29. Bernoulli zeichnet nur zweene concentriſche Kreiſe in einer Ebene, wie die Figur darſtellt.

Enthält der Ring zwiſchen ihnen Materie gegen den Mittelpunkt ſchwer, ſo müßte man wohl durch jeden Punct des äußern Umfangs, gerade Linien gegen den Mittelpunct ziehn, die theilten die ganze Kreisfläche, in Ausſchnitte und den Ring in Trapezien, deren jedes ein Element des äußern Kreiſes, und ein ähnliches des innern, zu Grundlinien hätte, jede Seite aber allemal an einer Seite des nächſten Trapezium anliegend.

Da fielen die Spacia mixtilinea völlig weg.

Bey dem eigentlichen Gegenſtande gegenwärtiger Unterſuchungen concentriſcher Kugelflächen, könnte man ſich einen Theil der äußern Kugelfläche, als Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels vorſtellen, deſſen Spitze im Mittelpuncte wäre; dieſer Theil wäre krumm, und gäbe eine Pyramide in der Bedeutung, in welcher Ausſchnitt eines Kreiſes ein Dreyeck iſt. Die innere Kugelfläche würde von dieſer Pyramide in einer krummen Fläche geſchnitten, welche der Grundfläche ähnlich wäre, und ſich zu ihr verhielte, wie das Quadrat des kleinen Halbmeſſers SD zum Quadrate des großen SA.

Wählte

Wählte man zur Grundfläche ſolcher Pyramiden die ſphäriſchen Vielecke, die ordentlichen Körpern gehören, oder auch andere, welche die Kugelfläche genau ausfüllen, dergleichen genug Körper geben, wie ich in den Commentat. Soc. Sc. Gott. 1785 u. f. J. gezeigt habe, ſo läßt ſich die Kugelſchale aus lauter an einanderliegenden Pyramidenſtücken zuſammenſetzen, deren Seitenflächen lothrecht ſind, und es giebt keine Zwiſchenräume.

Mit Regeln u. a. willkührlichen Geſtalten möchte es nicht ſo angehn.

Cylinder aber finden gar nicht einmal ſtatt, weil ſie nicht auf die Kugelflächen ſenkrecht ſtehen können.

Räume zwiſchen Flächen, welche Körper begränzen heißen nicht wohl Spacia mixtilinea.

Alſo ſcheint mir Joh. Bernoulli die Sache nicht recht geometriſch dargeſtellt zu haben.

30) Uebrigens giebt Joh Bernoulli für den größten Druck einer gleichartigen flüßigen Materie am Ende ſeines Briefs an, was ich (17) fand; ſetzt alſo die Schwere unveränderlich. Die Rechnung theilt er nicht mit.

31. Bilfinger hatte ſich nämlich gewundert, daß eine Kugelfläche, für die SD kleiner iſt, weniger Druck leiden ſollte, und für SD = o gar kein ſolcher Druck ſtatt finde. Das führt J. Bernoulli auf die Unterſuchung des größten Drucks. Reichte das Meer, ſagt er, überall gleich tief bis an $\frac{1}{3}$ des Halbmeſſers der obern Kugelfläche, ſo litte des Meeres Boden den größten Druck von den aufliegenden Waſſern.

A. G. Käſtner.

---

## III.

# Lokal- und combinatoriſch-analytiſche Formeln für höhere Differenziale; von Herrn Magiſter Rothe.

(Fortſetzung von Abh. VIII. im 2ten Hefte, S. 228/232).

---

11. Aus den obigen Lokalformeln (S. 229, 230) für höhere Differenziale von Producten, Potenzen, und Producten von Potenzen der Reihen, deren Entwickelung, durch Anwendung combinatoriſcher Begriffe, Zeichen und Sätze, außerordentlich leicht iſt, und wodurch man in den Stand geſetzt wird, jedes höhere Differenzial außer der Ordnung, von den vorhergehenden unabhängig, mithin ohne ſchwierige Differenziirung, ſogleich, auf die einfachſte Art ausgedrückt, zu finden; aus dem Gebrauche ſolcher Lokalausdrücke läßt ſich nun ſchon überſehen, welchen Vortheil die combinatoriſche Analyſis auch bey ſolchen Formeln und Reihen gewähren müſſe, bey welchen die Entwickelung mehrerer höhern Differenziale, wie z. E. bey Anwendung der Lagrangiſchen Auflöſungsreihe (S. 84, 5) und andern, erfordert wird. Dieſes durch Beyſpiele zu erläutern und zu beſtätigen, iſt vornehmlich die Abſicht von gegenwärtigem Zuſatze zu obiger Hauptlokalformel (S. 229, 230). Zuvor aber muß ich noch ein Paar wichtige combinatoriſch-analytiſche Formeln für die Entwickelung höherer Differenziale, in den nun ſchon genugſam bekannten combinatoriſchen Zeichen ausgedrückt, vorausſchicken.

12. Aufgabe. Das nte Differenzial des natürlichen Logarithmen von x, oder $d^n(\log x)$, auſ-

ſer

ſer der Ordnung, und von vorhergehenden Differenziirungen unabhängig, zu finden, ſo, daß alle höhere Differenziale von x beybehalten werden.

Auflöſung. Sie iſt in nachſtehender Formel mit ihrem Zeiger enthalten:

$$\frac{d^n(\log x)}{1.2.3....n} = \frac{a^n A}{x} - \frac{b^n B}{2x^2} + \frac{c^n C}{3x^3} - \ldots + \frac{n^n \mathcal{N}}{n x^n}$$

$$\left[ \frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \frac{d^4x}{1.2.3.4}, \ldots \right]$$
$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \quad \ldots$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n.

Beweis. Für die Scale und den Zeiger

$$p \left[ x, \frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots \right] \text{ iſt (S. 230, 7)}$$
$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

$$\frac{d^n(x^m)}{1.2.3\ldots n} = \frac{d^{n-1}(m x^{m-1} dx)}{1.2.3\ldots n} = \frac{m\, d^{n-1}(x^{m-1} dx)}{1.2.3\ldots n}$$
$$= p^m x\,(n+1) = {}^m\mathfrak{A}\, x^{m-1} a^n A + {}^m\mathfrak{B}\, x^{m-2} b^n B + {}^m\mathfrak{C}\, x^{m-3} c^n C + \ldots + {}^m\mathfrak{N}\, x^{m-n} n^n \mathcal{N} = m x^{m-1} a^n A + \frac{m^{m-1}\mathfrak{A}}{2} x^{m-2} b^n B + \frac{m^{m-1}\mathfrak{B}}{3} x^{m-3} c^n C + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{m^{m-1}\mathfrak{N}}{n} x^{m-n} n^n \mathcal{N};$$

folglich, wenn man durch m dividirt

$$\frac{d^{n-1}(x^{m-1} dx)}{1.2.3\ldots n} = x^{m-1} a^n A + \frac{{}^{m-1}\mathfrak{A}}{2} x^{m-2} b^n B + \ldots\ldots + \frac{{}^{m-1}\mathfrak{N}}{n} x^{m-n} n^n \mathcal{N}.$$

In

In dieser Gleichung setze man m = o, so erhält man

$$\frac{d^{n-1}(x^{-1}dx)}{1.2.3\ldots n} = \frac{d^n(\log x)}{1.2.3\ldots n} = \frac{a^n A}{x} - \frac{b^n B}{2x^2} + \frac{c^n C}{3x^3} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{n^n \mathcal{N}}{n x^n};$$ die obige Formel.

13. Beyspiel. Man sucht $d^5(\log x)$.

Hier ist n = 5, also nach der Auflösungsformel (12)

$$\frac{d^5(\log x)}{120} = \frac{a^5 A}{x} - \frac{b^5 B}{2x^2} + \frac{c^5 C}{3x^3} - \frac{b^5 D}{4x^4} + \frac{e^5 E}{5x^5}$$

$$= \frac{d^5 x}{120x} - \frac{dx\,d^4x}{24x^2} - \frac{d^2x\,d^3x}{12x^2} + \frac{dx^2 d^3x}{6x^3}$$

$$+ \frac{dx(d^2x)^2}{4x^3} - \frac{dx^3 d^2x}{2x^4} + \frac{dx^5}{5x^5}$$ oder:

$$d^5(\log x) = \frac{d^5x}{x} - \frac{5\,dx\,d^4x}{x^2} - \frac{10\,d^2x\,d^3x}{x^2}$$

$$+ \frac{20\,dx^2 d^3x}{x^3} + \frac{30\,dx(d^2x)^2}{x^3} - \frac{60\,dx^3 d^2x}{x^4} + \frac{24\,dx^5}{x^5}$$

14. Aufgabe. Das nte Differenzial von z, oder $d^n z$, durch höhere Differenziale von log z, außer der Ordnung, auszudrücken.

Auflösung. Sie ist in folgender Formel mit ihrem Zeiger enthalten:

$$\frac{d^n z}{1.2.3\ldots n} = z\left[a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots \frac{n^n \mathcal{N}}{1.2.3\ldots n}\right]$$

$$\left[\frac{d(\log z)}{1}_1, \frac{d^2(\log z)}{1.2}_2, \frac{d^3(\log z)}{1.2.3}_3, \ldots\right]$$

Beweis. Es sey $\varphi y$ eine Funktion von y, so ist

$$\varphi(y+z) = \varphi y + \frac{d\varphi y}{1\,dy} z + \frac{d^2\varphi y}{1.2\,dy^2} z^2 + \frac{d^3\varphi y}{1.2.3\,dy^3} z^3 + \ldots + \frac{d^n\varphi y}{1.2.3\ldots n\,dy^n} z^n + \ldots \quad (A)$$

Nun sey $\log\left[\frac{\varphi(y+z)}{\varphi y}\right] = v$, so ist bekanntlich:

$$\frac{\varphi(y+z)}{\varphi y} = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^3}{1.2.3} + \ldots . \quad (B)$$

Es ist aber $v = \log\varphi(y+z) - \log\varphi y$, oder

$$v = \frac{d(\log\varphi y)}{1.dy} z + \frac{d^2(\log\varphi y)}{1.2.dy^2} z^2 + \frac{d^3(\log\varphi y)}{1.2.3\,dy^3} z^3 + \ldots$$

Demnach ist, für den Zeiger:

$$\left[\frac{d(\log\varphi y)}{1}, \frac{d^2(\log\varphi y)}{1.2}, \frac{d^3(\log\varphi y}{1.2.3}, \ldots\right]$$

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots$$

$$v = \frac{a^1 A}{dy} z + \frac{a^2 A}{dy^2} z^2 + \frac{a^3 A}{dy^3} z^3 + \ldots .$$

$$v^2 = \frac{b^2 B}{dy^2} z^2 + \frac{b^3 B}{dy^3} z^3 + \frac{b^4 B}{dy^4} z^4 + \ldots .$$

$$v^3 = \frac{c^3 C}{dy^3} z^3 + \frac{c^4 C}{dy^4} z^4 + \ldots .$$

$$v^4 = \frac{b^4 D}{dy^4} z^4 + \ldots .$$

u. s. w.

Diese Werthe in (B) substituirt, geben

$$\frac{\varphi(y+z)}{\varphi y} = 1 + \left[\frac{a^1 A}{1}\right]\frac{z}{dy} + \left[\frac{a^2 A}{1} + \frac{b^2 B}{1.2}\right]\frac{z^2}{dy^2} + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{a^n A}{1} + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{n^n \mathcal{N}}{1.2..n}\right]\frac{z^n}{dy^n} + \ldots$$

Wer-

Vergleicht man dieſe Formel mit der Formel (A), ſo ergiebt ſich folgende Relation:

$$\frac{d^n \varphi y}{1.2\ldots n} = \varphi y \left[\frac{a^n A}{1} + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{n^n \mathcal{N}}{1.2\ldots n}\right]$$

für obigen Zeiger. Setzt man nun $\varphi y = z$, ſo kommt die Formel der obigen Auflöſung mit ihrem Zeiger:

$$\frac{d^n z}{1.2\ldots n} = z \left[\frac{a^n A}{1} + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{n^n \mathcal{N}}{1.2\ldots n}\right]$$
$$\left[\begin{matrix}\frac{d(\log z)}{1}, & \frac{d^2(\log z)}{1.2}, & \frac{d^3(\log z)}{1.2.3}, \ldots \\ 1, & 2, & 3, \ldots\end{matrix}\right]$$

15. Dieſe Formel kann man mit großem Vortheil gebrauchen, wenn man höhere Differenziale von Exponentialgrößen entwickeln ſoll; ſo wie die bekannte Formel $dz = z\,d(\log z)$, als ein beſonderer Fall von dieſer (nämlich wenn $n = 1$), für die erſten Differenziale von Exponentialgrößen gewöhnlich gebraucht wird.

16. Beyſpiel. Man ſucht das nte Differenzial von $y^{my}$ außer der Ordnung, jedoch ſo, daß $dy$ conſtant, mithin $d^2 y = d^3 y = d^4 y$ u. ſ. w. $= 0$ geſetzt wird.

Da hier $z = y^{my}$, ſo iſt $\log z = my \log y$, alſo:

$$d(\log z) = m(1 + \log y)\,dy; \quad \frac{d^2(\log z)}{1.2} = \frac{m\,dy^2}{1.2\,y};$$

$$\frac{d^3(\log z)}{1.2.3} = -\frac{m\,dy^3}{2.3\,y^2}; \quad \frac{d^4(\log z)}{1.2.3.4} = +\frac{m\,dy^4}{3.4\,y^3} \text{ u. ſ. w.}$$

Folglich das nte Differenzial, d. i. $\frac{d^n(y^{my})}{1.2.3\ldots n}$

$$= y^{my}\left\{\frac{a^nA}{1}+\frac{b^nB}{1.2}+\frac{c^nC}{1.2.3}+\ldots+\frac{n^n\mathcal{N}}{1.2.3\ldots n}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} m[1+\log y], & +\frac{m\,dy^2}{1.2y}, & -\frac{m\,dy^3}{2.3y^2}\ldots \\ 1, & 2, & 3, \ldots \end{matrix}\right\}$$

oder, zum Gebrauche noch bequemer,

$$= y^{my}\,dy^n\left\{\frac{m\,a^nA}{1\,y^{n-1}}+\frac{m^2b^nB}{1.2\,y^{n-2}}+\frac{m^3c^nC}{1.2.3\,y^{n-3}}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{m^nn^n\mathcal{N}}{1.2.3\ldots n}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1+\log y, & +\frac{1}{1.2}, & -\frac{1}{2.3}, & +\frac{1}{3.4}, & -\frac{1}{4.5}, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \end{matrix}\right\}$$

17. Wenn man die Werthe einiger Combinationsclaſſen für dieſen Zeiger berechnet, und dabey zur Abkürzung $1+\log y = w$ ſetzt, ſo findet man:

$$a^1A = w;\quad a^2A = \frac{1}{2};\quad a^3A = -\frac{1}{6};\quad a^4A = +\frac{1}{12};$$

$$a^5A = -\frac{1}{20};\quad a^6A = +\frac{1}{30};\quad a^7A = -\frac{1}{42};$$

$$a^8A = +\frac{1}{56};\quad a^9A = -\frac{1}{72};\quad a^{10}A = +\frac{1}{90}.$$

$$b^2B = w^2;\quad b^3B = w;\quad b^4B = -\frac{w}{3}+\frac{1}{4};$$

$$b^5B = +\frac{w}{6}-\frac{1}{6};\quad b^6B = -\frac{w}{10}+\frac{1}{9};$$

$b^7B$

$$\mathfrak{b}^{7}B = +\frac{w}{15} - \frac{7}{90}; \quad \mathfrak{b}^{8}B = -\frac{w}{21} + \frac{41}{720};$$

$$\mathfrak{b}^{9}B = +\frac{w}{28} - \frac{109}{2520}; \quad \mathfrak{b}^{10}B = -\frac{w}{36} + \frac{853}{25200}$$

$$\mathfrak{c}^{3}C = w^{3}; \quad \mathfrak{c}^{4}C = \frac{3w^{2}}{2}; \quad \mathfrak{c}^{5}C = -\frac{w^{2}}{2} + \frac{3w}{4};$$

$$\mathfrak{c}^{6}C = \frac{w^{2}}{4} - \frac{w}{2} + \frac{1}{8}; \quad \mathfrak{c}^{7}C = -\frac{3w^{2}}{20} + \frac{w}{3} - \frac{1}{8};$$

$$\mathfrak{c}^{8}C = +\frac{w^{2}}{10} - \frac{7w}{30} + \frac{5}{48};$$

$$\mathfrak{c}^{9}C = -\frac{w^{2}}{14} + \frac{41w}{240} - \frac{181}{2160};$$

$$\mathfrak{c}^{10}C = +\frac{3w^{2}}{56} - \frac{109w}{840} + \frac{97}{1440}.$$

$$\mathfrak{b}^{4}D = w^{4}; \quad \mathfrak{b}^{5}D = 2w^{3}; \quad \mathfrak{b}^{6}D = -\frac{2w^{3}}{3} + \frac{3w^{2}}{2};$$

$$\mathfrak{b}^{7}D = +\frac{w^{3}}{3} - w^{2} + \frac{w}{2};$$

$$\mathfrak{b}^{8}D = -\frac{w^{3}}{5} + \frac{2w^{2}}{3} - \frac{w}{2} + \frac{1}{16};$$

$$\mathfrak{b}^{9}D = +\frac{2w^{3}}{15} - \frac{7w^{2}}{15} + \frac{5w}{12} - \frac{1}{12};$$

$$\mathfrak{b}^{10}D = -\frac{2w^{3}}{21} + \frac{41w^{2}}{120} - \frac{181w}{540} + \frac{1}{12}.$$

$$\mathfrak{e}^{5}E = w^{5}; \quad \mathfrak{e}^{6}E = \frac{5w^{4}}{2}; \quad \mathfrak{e}^{7}E = -\frac{5w^{4}}{6} + \frac{5w^{3}}{2};$$

$$\mathfrak{e}^{8}E = +\frac{5w^{4}}{12} - \frac{5w^{3}}{3} + \frac{5w^{2}}{4};$$

$$e^{9}E = -\frac{w^4}{4} + \frac{10\,w^3}{9} - \frac{5\,w^2}{4} + \frac{5\,w}{16};$$

$$e^{10}E = +\frac{w^4}{6} - \frac{7\,w^3}{9} + \frac{25\,w^2}{24} - \frac{5\,w}{12} + \frac{1}{32}.$$

$$f^{6}F = w^6;\quad f^{7}F = 3\,w^5;\quad f^{8}F = -w^5 + \frac{15\,w^4}{4};$$

$$f^{9}F = +\frac{w^5}{2} - \frac{5\,w^4}{2} + \frac{5\,w^3}{2};$$

$$f^{10}F = -\frac{3\,w^5}{10} + \frac{5\,w^4}{3} - \frac{5\,w^3}{2} + \frac{15\,w^2}{16}.$$

$$g^{7}G = w^7;\quad g^{8}G = \frac{7\,w^6}{2};\quad g^{9}G = -\frac{7\,w^6}{6} + \frac{21\,w^5}{4};$$

$$g^{10}G = +\frac{7\,w^6}{12} - \frac{7\,w^5}{2} + \frac{35\,w^4}{8}.$$

$$\mathfrak{h}^{8}H = w^8;\quad \mathfrak{h}^{9}H = 4\,w^7;\quad \mathfrak{h}^{10}H = -\frac{4\,w^7}{3} + 7\,w^6.$$

$$i^{9}I = w^9;\quad i^{10}I = \frac{9w^8}{2}.$$

$$f^{10}K = w^{10}.$$

folglich iſt:

$$d\,(y^{my}) = y^{my}\,dy\,m\,w$$

$$\frac{d^2(y^{my})}{1.2} = y^{my}\,dy^2\left[\frac{m}{2y} + \frac{m^2w^2}{2}\right]$$

$$\frac{d^3(y^{my})}{1.2.3} = y^{my}\,dy^3\left[-\frac{m}{6y^2} + \frac{m^2w}{2y} + \frac{m^3w^3}{6}\right]$$

$$\frac{d^4(y^{my})}{1.2.3.4} = y^{my}\,dy^4\left[\frac{m}{12\,y^3} + \frac{m^2}{y^2}\left(-\frac{w}{6} + \frac{1}{8}\right) + \frac{m^3w^2}{4y} + \frac{m^4w^4}{24}\right]$$

$$\frac{d^5(y^{my})}{1.2.3.4.5} = y^{my} dy^5 \left[ -\frac{m}{20y^4} + \frac{m^2}{y^3}\left(\frac{w}{12} - \frac{1}{12}\right) + \frac{m^3}{y^2}\left(-\frac{w^2}{12} + \frac{w}{8}\right) + \frac{m^4 w^3}{12y} + \frac{m^5 w^5}{120}\right]$$

u. s. w.

18. Nach dem Taylorschen Satze, ist also:

$$(y+c)^{m(y+c)} = y^{my} + y^{my} m w c + y^{my}\left[\frac{m}{2y} + \frac{m^2 w^2}{2}\right] c^2$$
$$+ y^{my}\left[-\frac{m}{6y^2} + \frac{m^2 w}{2y} + \frac{m^3 w^3}{6}\right] c^3$$
$$+ y^{my}\left[\frac{m}{12y^3} + \frac{m^3}{y^2}\left(-\frac{w}{6} + \frac{1}{8}\right) + \frac{m^3 w^2}{4y} + \frac{m^4 w^4}{24}\right] c^4$$
$$+ y^{my}\left[-\frac{m}{20y^4} + \frac{m^2}{y^3}\left(\frac{w^2}{12} - \frac{1}{12}\right) + \frac{m^3}{y^2}\left(-\frac{w^2}{12} + \frac{w}{8}\right) + \frac{m^4 w^3}{12y} + \frac{m^5 w^5}{120}\right] c^5 + \text{etc.}$$

Und wenn man in dieser Formel $y = 1$, folglich auch $w = 1 + \log y = 1$ setzt, so kommt:

$$(1+c)^{m(1+c)} = 1 + mc + \left(\frac{m}{2} + \frac{m^2}{2}\right) c^2$$
$$+ \left(-\frac{m}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}\right) c^3 + \left(\frac{m}{12} - \frac{m^2}{24} + \frac{m^3}{4} + \frac{m^4}{24}\right) c^4$$
$$+ \left(-\frac{m}{20} + \frac{m^3}{24} + \frac{m^4}{12} + \frac{m^5}{120}\right) c^5 + \text{etc.}$$

Und endlich, auch $m = 1$ gesetzt:

$$(1+c)^{1+c} = 1 + c + c^2 + \frac{1}{2} c^3 + \frac{1}{3} c^4 + \frac{1}{12} + c^5 + \text{etc.}$$

19. Herr Hofr. Käſtner (Anal. des Unendlichen 237) und de Moivre (*Animadv. in D. G. Cheynaei.* Tract. etc. pag. 12. beſtimmen die in dieſer letzten Reihe vorkommenden Coefficienten durch Umkehrung der Reihen. Setzt man nämlich $(1+y)^{1+y} = 1+v$, ſo iſt:

$$(1+y)\log(1+y) = (1+y)\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \ldots\right)$$

$$= \log(1+v) \text{ oder } y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{3.4}y^4 - \ldots$$

$$= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 \ldots.$$

Hieraus läßt ſich, durch Umkehrung der Reihen, v durch eine nach Potenzen von y geordnete Reihe von folgender Form, beſtimmen:

$$v = \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \text{etc}.$$

Folglich findet man:

$$(1+y)^{1+y} = 1+v = 1 + \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \ldots.$$

20. Die Coefficienten $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, u. ſ. w. (19) laſſen ſich auch ſehr leicht auf folgendem Wege finden:

für $(1+y)^{1+y} = 1 + \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \ldots.$
iſt, beyderſeits differenziirt, und durch $dy$ dividirt:

$$(1+y)^{(1+y)}[1+\log(1+y)] = \dot{A} + 2\dot{B}y + 3\dot{C}y^2 + \ldots$$

Subſtituirt man hier, ſtatt $(1+y)^{1+y}$ die angenommene, und ſtatt $\log(1+y)$ die bekannte Reihe, ſo findet man:

$$\left(1 + \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \ldots.\right)\left(1 + y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \ldots\right)$$

$$= \dot{A} + 2\dot{B}y + \ldots$$

oder, wenn man wirklich multiplicirt:

$$\left.\begin{matrix}1+\dot{A}\\+1\end{matrix}\right\} y+\left.\begin{matrix}\dot{B}\\+\dot{A}\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\} y^2+\left.\begin{matrix}\dot{C}\\+\dot{B}\\-\frac{1}{2}\dot{A}\\+\frac{1}{3}\end{matrix}\right\} y^3+\text{etc}=\begin{matrix}\dot{A}\\+2\dot{B}y\\+3\dot{C}y^2\\+4\dot{D}y^3\\+\text{etc}\end{matrix}$$

wo das Fortgangsgesetz der beyderseitigen Coefficienten deutlich in die Augen fällt; und so ist:

$$\dot{A}=1; \qquad 3\dot{C}=\dot{B}+\dot{A}-\frac{1}{2};$$

$$2\dot{B}=\dot{A}+1; \qquad 4\dot{D}=\dot{C}+\dot{B}-\frac{1}{2}\dot{A}+\frac{1}{3};$$

$$5\dot{E}=\dot{D}+\dot{C}-\frac{1}{2}\dot{B}+\frac{1}{3}\dot{A}-\frac{1}{4}; \text{ etc}$$

So habe ich gefunden, daß:

$$(1+y)^{(1+y)}=1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5$$
$$+\frac{3}{40}y^6-\frac{1}{120}y^7+\frac{59}{2520}y^8-\frac{71}{5040}y^9+\frac{131}{10080}y^{10}$$
$$-\frac{53}{5040}y^{11}+\frac{179063}{19958400}y^{12}-\frac{152587}{19958400}y^{13}$$
$$+\frac{1711379}{259459200}y^{14} \text{ etc} \ldots$$

21. Auf eben die Art kann man auch die Coefficienten der Reihe $(1+y)^{m(1+y)}$ bestimmen.

Ich will noch ein Paar Beyspiele beyfügen, welche den Nutzen der Lokal- und Combinatorisch-analytischen Formeln, auch in andern verwickelten Fällen, überflüssig bewähren werden.

**22. Aufgabe. Die Lagrangiſche allgemeine Auflöſungsreihe, aus der Lokalformel für die Reverſion der Reihen abzuleiten.**

**Erläuterung.** Die Forderung der Aufgabe iſt: Wenn $y = x - z\varphi x$ gegeben (S. 81), den Werth von $\psi x$, wie ſolcher S. 84, 5 ausgedrückt befindlich iſt, aus dem Werthe für $x^s\rceil(n+1)$ auf S. 87, herzuleiten *). Die hieſigen Zeichen und Buchſtaben werden durchaus in der Bedeutung der dortigen gebraucht.

**Auflöſung.** I. In $x = y + z\varphi x$ ſetze man $x = y + v$, wo alſo $v$ noch unbekannt, ſo iſt demnach $y + v = y + z\varphi(y+v)$ oder $v = z\varphi(y+v)$ und $\frac{1}{z} = \frac{\varphi(y+v)}{v}$, d. i. (S. 204)

$$z^{-1} = \varphi y \cdot v^{-1} + \frac{d\varphi y}{1\,dy} \cdot v^0 + \frac{d^2\varphi y}{1.2\,dy^2} v^1 + \frac{d^3\varphi y}{1.2.3\,dy^3} v^2 + \text{etc}$$

II. Wenn man dieſe Reihe umkehrt, um allgemein $v^s$ durch eine Reihe nach Potenzen von z auszudrücken, ſo findet man in der Lokalformel

$$x^s\rceil(n+1) = \frac{s}{s+nd} q^{-\frac{s+nd}{r}} x(n+1) \cdot y^{\frac{1(s+nd)}{r}}$$

| anſtatt | d; | r; | 1; | x; | y |
|---|---|---|---|---|---|
| hier geſetzt | 1; | −1; | −1; | v; | z |

der geſuchten Reihe für $v^s$ allgemeines Glied, oder

$v^s$.

*) Ich werde in der Folge (hier in II) den etwas allgemeiner ausgedrückten Werth für $x^s\rceil(n+1)$ gebrauchen, wie ihn meine *Ser. Rev. Dem. vniuerſ.* p. 11. und *Hindenb. ad Ser. Rev. — Paralip. p.* XIX, C darſtellt.

$$v^s \nabla (n+1) = \frac{s}{s+n} q^{s+n} \varkappa (n+1) . z^{s+n}$$

$$q\left[\varphi y, \frac{d\varphi y}{1\,dy}, \frac{d^2\varphi y}{1.2\,dy^2}, \frac{d^3\varphi y}{1.2.3\,dy^3}, \ldots\right]$$

III. Für diese Scale ist aber (S. 230, 7; statt der dortigen p, z hier q, $\varphi y$ gesetzt, mit gehöriger Rücksicht auf $dy^n$)

$$q^m \varkappa (n+1) = \frac{d^n (\varphi^m y)}{1.2.3 \ldots n\,dy^n}$$

folglich $v^s \nabla (n+1) = \frac{s}{s+n} \cdot \frac{d^n (\varphi^{s+n} y)\, z^{s+n}}{1.2.3 \ldots n\,dy^n}$

und daraus, durch successive Bestimmung der Buchstaben s und n,

$$v^1 = \frac{1}{1} \varphi y . z^1 + \frac{1}{2} \frac{d(\varphi^2 y) z^2}{1.dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2 (\varphi^3 y) z^3}{1.2\,dy^2} + \ldots\ldots$$

$$v^2 = \frac{2}{2} \varphi^2 y . z^2 + \frac{2}{3} \frac{d(\varphi^3 y) z^3}{1.dy} + \ldots\ldots$$

$$v^3 = \frac{3}{3} \varphi^3 y . z^3 + \ldots\ldots$$

etc etc etc etc

die Glieder, wie sie hier unter einander stehen, haben sämtlich einerley Potenzen von z, und schreiten durch alle Potenzen von v sehr regelmäßig fort. Es hat also keine Schwierigkeit (was die beschränkte Breite des Octavformats hier nicht verstattete), die Glieder, die $z^n$ enthalten, besonders anzugeben, und zugleich nachzuweisen, wohin sie, als einzelne Glieder bestimmter Potenzen von v, gehören. Die sämtlichen Glieder, die $z^n$ enthalten, sind demnach folgende:

$$\left.\begin{aligned} v^1 \rceil n &= \frac{1}{n}\frac{d^{n-1}(\varphi^n y)}{1.2.3\ldots(n-1)\,dy^{n-1}} \\ v^2 \rceil (n-1) &= \frac{2}{n}\frac{d^{n-2}(\varphi^n y)}{1.2.3\ldots(n-2)\,dy^{n-2}} \\ v^3 \rceil (n-2) &= \frac{3}{n}\frac{d^{n-3}(\varphi^n y)}{1.2.3\ldots(n-3)\,dy^{n-3}} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v^{n-1} \rceil 2 &= \frac{n-1}{n}\frac{d^1(\varphi^n y)}{1.dy^1} \\ v^n \rceil 1 &= \frac{n}{n}\varphi^n y \end{aligned}\right\} z^n$$

IV. Da nun $x = y+v$, also $\psi x = \psi(y+v)$, so ist

$$\psi x = \psi y + v\frac{d\psi y}{1\,dy} + v^2\frac{d^2\psi y}{1.2\,dy^2} + v^3\frac{d^3\psi y}{1.2.3\,dy^3} + \ldots.$$

Substituirt man sodann in diese Reihe, statt $v^1, v^2, v^3 \ldots v^n$ die so eben (in III) gefundenen Werthe, nach dem *Methodo Potentiarum* (Infin. Dign. §. XXIV.) so erhält man:

$$\psi x = \psi y + \left.\begin{aligned} &\frac{1}{1}\frac{\varphi y\, d\psi y}{1\,dy}z^1 + \frac{1}{2}\frac{d(\varphi^2 y)\,d\psi y}{1\times 1\,dy^2} \\ &+\frac{2}{2}\frac{\varphi^2 y\, d^2\psi y}{1.2\,dy^2} \end{aligned}\right\} z^2$$

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{1}{3}\frac{d^2(\varphi^3 y)\,d\psi y}{1.2\times 1\,dy^3} \\ &+\frac{2}{3}\frac{d(\varphi^3 y)\,d^2\psi y}{1\times 1.2\,dy^3} \\ &+\frac{3}{3}\frac{\varphi^3 y\, d^3\psi y}{1.2.3\,dy^3} \end{aligned}\right\} z^3 \quad \cdots + \left.\begin{aligned} &\frac{1}{n}\frac{d^{n-1}(\varphi^n y)\,d\psi y}{1.2.3\ldots(n-1)\times 1\,dy^n} \\ &+\frac{2}{n}\frac{d^{n-2}(\varphi^n y)\,d^2\psi y}{1.2.3\ldots(n-2)\times 1.2\,dy^n} \\ &+\frac{3}{n}\frac{d^{n-3}(\varphi^n y)\,d^3\psi y}{1.2\ldots(n-3)\times 1.2.3\,dy^n} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &+\frac{n}{n}\frac{\varphi^n y\, d^n\psi y}{1.2.3\ldots n\,dy^n} \end{aligned}\right\} z^n$$

V.

V. Den ſo eben gefundenen, durch n ausgedrückten, Coefficienten von $z^n$, beziehe man auf ſeinen gemeinſchaftlichen Diviſor $d\,y^n$, und ſetze den ganzen Ausdruck $= \psi x \varkappa(n+1)$. Multiplicirt man nun von beyden Seiten mit $1.2.3.4\ldots n$, ſo erhält man

$$1.2.3.4\ldots n.\ \psi x \varkappa(n+1)$$
$$=$$
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n}{}^{n}\mathfrak{A}\,d^{n-1}(\varphi^n y)d\psi y \quad +\frac{2}{n}{}^{n}\mathfrak{B}d^{n-2}(\varphi^n y)d^2\psi y \\ +\frac{3}{n}{}^{n}\mathfrak{C}\,d^{n-3}(\varphi^n y)d^3\psi y\ldots+\frac{n}{n}{}^{n}\mathfrak{N}\,\varphi^n y\,d^n\psi y \end{array}\right\}:dy^n$$
$$=$$
$$\left\{\begin{array}{l} d^{n-1}(\varphi^n y)\,d\psi y \quad +{}^{n-1}\mathfrak{A}\,d^{n-2}(\varphi^n y)d^2\psi y \\ +{}^{n}\mathfrak{B}\,d^{n-3}(\varphi^n y)d^3\psi y\ldots+{}^{n-1}\mathfrak{N}\,\varphi^n y\,d^n\psi y \end{array}\right\}:dy^n$$

welcher letztere Ausdruck $= \dfrac{d^{n-1}(\varphi^n y\,d\psi y)}{dy^n}$.

VI. Folglich iſt $\psi x \varkappa(n+1) = \dfrac{d^{n-1}(\varphi^n y\,d\psi y)}{1.2.3\ldots n\,dy^n}$

alſo $\psi x = \psi y + \dfrac{\varphi y\,d\psi y}{1.dy}z + \dfrac{d(\varphi^2 y\,d\psi y)}{1.2\,dy^2}z^2$
$$+\frac{d^2(\varphi^3 y\,d\psi y)}{1.2.3\,dy^3}z^3\ldots+\frac{d^{n-1}(\varphi^n y\,d\psi y)}{1.2.3..n\,dy^n}z^n+\text{etc}$$

wo alſo hier der Werth von $\psi x$ vollkommen ſo wie S. 84, 5 gefunden wird, weil hier $\varphi^n y$ mit dem dortigen $\varphi y^n$ gleichgültig iſt (S. 89, Anm.).

23. Das iſt die (S. 91) von Herrn Prof. Hindenburg bereits erwähnte Ableitung der Lagrangiſchen allgemeinen Auflöſungsreihe aus der Reverſionsformel für die Reihen; alſo das umgekehrte Verfahren von dem, was Herr Prof. Pfaff (S. 85-87) befolgt hat. Beyde Auflöſungen ſind gleichwohl ganz verſchieden

ſchieden von einander; und da bey der hier beygebrachten mehrere analytiſche Operationen vorkommen: **Umkehrung der Reihen, Umſetzung von Lokalformeln** für höhere Differenziale von Potenzen in die zugehörigen Differenzialausdrücke, **Subſtitution der Reihen in Reihen**; Operationen, die durch die combinatoriſche Behandlung und Handgriffe, nicht nur unglaublich erleichtert, ſondern allererſt dadurch recht praktiſch brauchbar werden — ſo wird man es um ſo weniger überflüßig finden, den Zuſammenhang beyder Sätze (S. 81-88) aufs neue hier dargethan und erwieſen zu haben.

24. Noch will ich den Lagrangiſchen Satz, in Verbindung mit combinatoriſchen Hülfsmitteln, weiter anwenden:

Man ſetze (in 22, VI) Kürze halber $\frac{d\psi y}{dy} = \psi' y$, ſo kommt

$$\psi x = \psi y + \varphi y . \psi' y . z + \frac{d(\varphi^2 y . \psi' y)}{1.2\,dy} z^2 + \frac{d^2(\varphi^3 y . \psi' y)}{1.2.3\,dy^2} z^3 + \text{etc}$$

Aus dem Tayloriſchen Satze aber erhellet, daß man dieſe Auflöſungsreihe auch ſo ausdrücken kann:

$$\psi x = \psi y + [\varphi(y+c)\,\psi'(y+c)] \times 1\, z + \frac{1}{2}[\varphi^2(y+c)\,\psi'(y+c)] \times 2\, z^2 + \frac{1}{3}[\varphi^3(y+c)\,\psi'(y+c)] \times 3\, z^3 + \ldots$$

wo die Ausdrücke $\varphi(y+c)\,\psi'(y+c)$; $\varphi^2(y+c)\,\psi'(y+c)$ u. ſ. w. in Reihen, nach Potenzen von c geordnet, verwandelt werden müſſen, um die **Lokalausdrücke** richtig zu verſtehen.

25. Es

25. Es ſey nun $\varphi x = x^{mx}$ und $\psi x = \operatorname{Sin} x$, ſo iſt $\psi' x = \operatorname{Cof} x$, alſo

$$\psi x = \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} y + [(y+c)^{m(y+c)} \operatorname{Cof}(y+c)] \times 1 z$$
$$+ \frac{1}{2}[(y+c)^{2m(y+c)} \operatorname{Cof}(y+c)] \times 2 z^2$$
$$+ \frac{1}{3}[(y+c)^{3m(y+c)} \operatorname{Cof}(y+c)] \times 3 z^3 + \ldots.$$

Da nun

$$\operatorname{Cof}(y+c) = \operatorname{Cof} y - \operatorname{Sin} y . c - \frac{\operatorname{Cof} y . c^2}{1.2} + \frac{\operatorname{Sin} y . c^3}{1.2.3} + \frac{\operatorname{Cof} y . c^4}{1.2.3.4} - \text{etc}$$

ſo iſt (18)

$$(y+c)^{m(y+c)} \times \operatorname{Cof}(y+c) = y^{my} \operatorname{Cof} y + y^{my}[m w \operatorname{Cof} y - \operatorname{Sin} y]c$$
$$+ y^{my}\left[\left[\frac{m}{2y} + \frac{m^2 w^2}{2}\right]\operatorname{Cof} y - m w \operatorname{Sin} y - \frac{\operatorname{Cof} y}{1.2}\right] c^2$$
$$+ y^{my}\left[\left[-\frac{m}{6y^2} + \frac{m^2 w}{2y} + \frac{m^3 w^3}{6}\right]\operatorname{Cof} y - \left[\frac{m}{2y} + \frac{m^2 w^2}{2}\right]\operatorname{Sin} y - \frac{m w \operatorname{Cof} y}{1.2} + \frac{\operatorname{Sin} y}{1.2.3}\right] c^3 + \text{etc}$$

Eben ſo erhält man $(y+c)^{2m(y+c)} \times \operatorname{Cof}(y+c)$; $(y+c)^{3m(y+c)} \times \operatorname{Cof}(y+c)$ u. ſ. w., wenn man ſtatt m, reſpectiue 2 m, 3 m, u. ſ. w. ſetzt.

26. Für

26. Für $y = x - z x^{mx}$ iſt alſo

$$\text{Sin } x = \text{Sin } y + y^{my} \text{Cof } y . z + y^{2my} \left[ m w \text{Cof } y - \frac{\text{Sin } y}{1.2} \right] z^2$$

$$+ y^{3my} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{m}{2y} + \frac{3 m^2 w^2}{2} \right] \text{Cof } y \\ - m w \text{ Sin } y \\ - \frac{\text{Cof } y}{1.2.3} \end{array} \right\} z^3$$

$$+ y^{4my} \left\{ \begin{array}{l} \left[ - \frac{m}{6y^2} + \frac{4 m^2 w}{2y} + \frac{4^2 m^3 w^3}{6} \right] \text{Cof } y \\ - \left\{ \frac{m}{2y} + \frac{4 m^2 w^2}{2} \right\} \text{Sin } y \\ - \frac{m w \text{ Cof } y}{1.2} \\ + \frac{\text{Sin } y}{1.2.3.4} \end{array} \right\} z^4 + \text{etc}$$

27. Da die hier vorkommenden Coefficienten ſchon ſehr zuſammengeſetzt ſind, und weiterhin es noch mehr werden *), ſo würde die Berechnung derſelben, ohne Zuthun combinatoriſcher Hülfsmittel, bloß durch wiederholte Differenziirungen, mit noch weit größern, und in der Folge faſt unüberſehbaren Schwierigkeiten verknüpft geweſen ſeyn. Hieraus erhellet, welchen Nutzen die Combinationslehre auch bey Anwendung ſolcher Formeln, die höhere Differenziale enthalten (dahin z. B. der Tayloriſche Satz (S. 201 f.) oder die Lagrangiſche Auflöſungs-

*) Herr Magiſter Rothe hatte von den Reihen, für $(y+c)^{m(y+c)} \times \text{Cof}(y+c)$ in (25) und für Sin x in (26) mehrere Glieder angegeben, die man (aus 17, 18, 25) leicht ſchaffen kann; ich habe ſie aber, weil ſie zu weitläuftig für den Druck ausfielen, hier weggelaſſen.

ſungsreihe (22) und andere gehören) auf beſondere Beyſpiele gewährt, und daß letztere die erſteren (die combinatoriſch-analytiſchen Formeln) keinesweges entbehrlich machen, ſondern jene vielmehr ohne dieſe, wegen der oft ungemein ſtarken Verwickelung beym Differentiiren, und der dadurch nicht ſelten veranlaßten beſchwerlichen Reduction in vielen Fällen ganz unbrauchbar ſeyn würden. Man vergleiche hiermit Herrn Prof. Hindenburgs Erinnerung (S. 92, 209, 212). Die Verwickelung, mit den daraus erwachſenden Schwierigkeiten, wenn man die Lagrangiſche Formel auf das Exempel (26) anwendet, und ſo den gewöhnlichen Weg der ſucceſſiven Differenziation einſchlägt, zeigt ſich dann beſonders groß. Der Gebrauch der Lokal- und combinatoriſch-analytiſchen Formeln ebnet auch hier, wie in unzählig andern Fällen (wo folgende Glieder durch vorhergehende, ganz oder zum Theil, ausgedrückt werden) dieſen Weg und verkürzt ihn ſehr beträchtlich. *Hindenb. ad Ser. Rev. Paralip. p.* VI, XXIII.

## IV.

## Ueber die Bordaiſchen oder Lenpiriſchen ganzen Kreiſe mit zwey beweglichen Fernröhren, und von ihrem geodätiſchen und aſtronomiſchen Gebrauche; von Hrn. O. W. M. von Zach.

Im dritten Hefte des Archivs habe ich zu Ende meines Anhangs zu des Herrn Grafen von Brühls vortreflichen Abhandlung: „Ueber die Unterſuchung aſtronomiſcher Kreiſe“ S. 307 erwähnet, wie mannichfaltig oft der mechaniſche Bau ganzer Kreiſe, und wie weſentlich verſchieden dadurch der Gebrauch und die Vortheile dieſer Werkzeuge werden. Meinem daſelbſt gethanen Verſprechen gemäß, werde ich hier kürzlich etwas von den Bordaiſchen oder Lenoiriſchen Cercles à deux lunettes mobiles ſagen, und vorzüglich nur davon das auszeichnen, was dieſem Inſtrumente eigen iſt, und wodurch ein gewiſſer, beſonders vortheilhafter, Zweck beabſichtiget wird.

Die erſte Grundidee einer ſolchen Anordnung und Einrichtung iſt weder neu noch eine franzöſiſche Erfindung; ſie gehört dem unſterblich verdienten, ſowohl in der Theorie als Praxis großen, deutſchen Aſtronomen, Tobias Mayer, und beſtehet in wenig Worten darinn, daß man Winkel durch Wiederholung meſſe, wodurch man ein Vielfaches des zu beobachtenden Winkels erhält, und dadurch den Vortheil erreicht, die Größe deſſelben äußerſt genau zu finden, wenn gleich die Theilung des Gradbogens fehlerhaft wäre; ja, es hängt bloß von der Geduld des Be-

Beobachters ab, dieſe Fehler auch ganz und gar verſchwinden zu machen.

Mayer hat dieſe Methode zuerſt in den älteren Commentarien der königlichen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften in Göttingen 1752, Tom. II. p. 325 *) beym Gebrauche eines von ihm erfundenen goniometriſchen Inſtruments, das viel Aehnlichkeit mit einem ſogenannten Récipiangle hat, vorgetragen; ſein verdienſtvoller Sohn hat dieſe Methode ſeines Vaters, in ſeinem gründlichen und ausführlichen Unterrichte zur praktiſchen Geometrie, S. 508 des erſten Theils der 2ten Auflage ſehr deutlich auseinander geſetzt, und ihre Anwendung auf ganze getheilte Kreiſe gezeigt.

Viel ähnliches damit hat des Kaiſer Rudolphs Mathematici, Fabricii Mordente, Verfahren, kleine Theile einer Größe anzugeben, deſſen ſein Bruder Gabriel in einem 1584 zu Antwerpen gedruckten Tractate in italieniſcher Sprache **) erwähnt; wie uns Herr Hofrath Käſtner in ſeinen aſtronomiſchen Abhandlungen, zweyte Sammlung, S. 178 berichtet, und davon bey Clavius *Fabr. et uſus Inſtrum. ad Deſcript. horolog. Cap. ult.* eine Anwendung auf gerade Linien, und bey Guido Ubaldo *Problem. aſtronom. Libri* VII. *Venet.* 1609. *Lib.* I. *Probl.* 1, 2, 3, eine Anwendung auf Kreisbögen vorkommt.

Mayer hat nachher, für dieſe neue Methode von Winkelmeſſung, ſeinen neu erfundenen Spiegel- oder Reflexionskreis eingerichtet, den er ſchon im Jahre 1754 dem engliſchen Admiralitätscollegio eingeſchickt ***), und



*) Nova Methodus perficiendi inſtrumenta geometrica, et novum inſtrumentum goniometricum, auctore *Tobia Mayer.*

**) Il Compaſſo del Signor *Fabricio Mordente*, con altri iſtromenti matematici, ritrovati da Gasparo, ſuo fratello.

***) Literariſcher Briefwechſel von J. D. Michaelis, geordnet und herausgegeben von J. G. Buhle, I. Theil. S. 271 u. f.

deſſen Beſchreibung erſt 1770 bey Herausgabe ſeiner *Tab. mot. Solis et Lunae. Londini. pag.* 21 erſchienen iſt. Nach 33 Jahren beſchrieb daſſelbe Inſtrument der königliche Schiffscapitain Chevalier de Borda, in einer 1787 bey Didot zu Paris herausgekommenen kleinen Schrift *), verbeſſerte aber vieles an dem Mayeriſchen Spiegelkreiſe, und gab ihm eine ſolche Einrichtung, daß man die Winkel zu beyden Seiten des Nullpunkts, ſowohl rechts als links, meſſen kann, wodurch nicht unbeträchtliche Vortheile erzielet werden. Solche Reflexionskreiſe werden jetzt häufig in Frankreich verfertiget, und ſind daſelbſt allgemein bey der Marine eingeführt; daher ich ſie die Mayer-Bordaiſche Spiegelkreiſe nenne.

Herr Hofrath Käſtner hat ſchon am angeführten Orte erinnert, daß bey dem Mayerſchen Recipiangle, wo Winkel durchs Multiplum deſſelben, oder durch ganze Umkreiſe, das iſt durch 360° und ihren Ueberſchuß gemeſſen werden, und das Werkzeug nur ein Fernrohr hat, kein ſicheres Merkmahl vorhanden ſey, wodurch man erkennen könne, ob bey den verſchiedenen Stellungen, die man dem Fernrohre zu dieſer Abſicht nothwendig geben muß, nicht auch eine Veränderung in der Stellung, ſelbſt des ganzen Inſtruments, das unverrückt hätte bleiben ſollen, vorgegangen ſey. Herr Hofrath Mayer ſagt daher, l. c. S. 517. §. 136, daß, wenn man etwas genaues leiſten wolle, man an das Werkzeug ein Verſicherungs-Fernrohr anbringen müſſe, um dadurch den jedesmaligen Stand des Winkelmeſſers prüfen, und die etwa vorgefallenen Verrückungen deſſelben wieder verbeſſern zu können. Bey allen Quadranten, die zu horizontalen Winkelmeſſungen auf der Erde gebraucht werden, und

*) Déſcription et uſage du Cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les Obſervations nautiques.

und wo folglich das Loth nicht angebracht werden kann, befinden sich solche Versicherungs-Fernröhre, die parallel mit dem durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Halbmesser auf dergleichen Quadranten befestiget werden, wie z. B. jene, die zu Gradmessungen gedient haben, und bey Maupertuis, Bouguer, Condamine, Don Ulloa, Boscovich, Liesganig, Beccaria u. s. f. beschrieben sind. Auch sogar gute Meßtischgen werden mit festen Versicherungsdioptern versehen, und so müssen auch ganze Kreise, die zu terrestrischen Winkelmessungen gebraucht werden, ein dergleichen Fernrohr haben, wie es bey englischen Theodoliten durchgängig üblich ist, wie auch bey größern Kreisen, die zu astronomischer Vermessung ganzer Provinzen gebraucht werden; dergleichen z. B. der Kreis ist, den Herr Ekström, mathematischer Instrumentmacher, zuerst 1750, in dem 12ten Bande der schwedischen Abhandlungen der königl. Akad. der W. S. 27 der deutschen Uebersetzung, beschrieben hat, oder der zweyfüßige Kreis, dessen sich Herr Bugge zu der trigonometrischen Operation in Seeland bedient *) hat, oder der vierfüßige der königl. Sternwarte in Kopenhagen, dessen Beschreibung S. LIV. des Buggeschen Werks: *Observ. astronom. Havniae* 1784 zu finden ist.

Allein, bey allen diesen Kreisen ist das Versicherungs-Fernrohr nicht beweglich, sondern unmittelbar am Instrumente selbst befestiget. Bey keinem derselben kann alsdann bey einer solchen Anordnung, die Mayerische Messungsmethode bey Höhenwinkeln, oder wenn dieses Werkzeug überhaupt astronomisch gebraucht werden soll, angewendet werden. Diese, und noch andere Vor-



*) Beskrivelse over den Opmaalings Maade, som er brugt ved de Danske geographiske Korter. Kiobenhavn 1779. Oder Hrn. Marcus deutsche Uebersetzung, mit des Herrn Obristlieutenants Aster's Anmerkungen und Erläuterungen. Dresden 1787.

theile vereinigen aber die aſtrononomiſchen Kreiſe, die Herr Le Noir *), jetzt in Paris verfertiget, und folgende Eigenſchaften haben, die ich hier ſo kurz und gut, als es ſich ohne ausführliche Zeichnungen thun läßt, beſchreiben will.

Der

*) Herr Lenoir iſt dermalen, ſeithem Herr Meuſnier ſich 1787 nach Spanien geflüchtet hat, der geſchickteſte mathematiſche Inſtrumentmacher, und Herr Carrochez der geſchickteſte Optiker in Frankreich. Herr Lenoir vollendete im Jahr 1787 einen ganzen Kreis, nach Bordaiſcher Angabe, von 1 Fuß im Durchmeſſer, deſſen ſich die franzöſiſchen Akademiker, Caſſini, Mechain und Le Gendre zur Vereinigung der Triangelreihe bedienten, die zur Verbindung der beyden königl. Sternwarten von Paris und Greenwich, einerſeits bis Calais, und anderſeits von dem ſeel. General Roy bis Dover fortgeführt wurde. Die Genauigkeit, mit welcher die Winkel mit dieſem Kreiſe gemeſſen worden, übertrift faſt allen Glauben, wie man in dem Werke, welches oberwähnte drey Akademiker 1790 herausgegeben, erſehen kann, und den Titel führt: *Expoſé des Opérations faites en France en* 1787 *pour la Jonction des Obſervatoires de Paris, et de Greenwich.* Auch Hr. de Lambre bedient ſich, bey der jetzigen franzöſiſchen Gradmeſſung eines ſolchen Kreiſes. Unterm 12ten April 1792 ſchrieb mir Herr Caſſini, daß Lenoir auch 10zöllige, ja ſogar 6zöllige Kreiſe verfertige, bey welchen der Theilungsfehler nicht über 10 bis 15 Sekunden gienge. „*Vous aurez vû,*“ ſchreibt er, „*l'uſage avantageux, que je fais d'un nouvel Inſtrument,* „*qu'en verité l'on peut apeller miraculeux. Oui, Monſieur,* „*avec un Cercle de 8 pouces de rayon, on peut actuellement obte-* „*nir à une ſeconde prés, la meſure des hauteurs des aſtres, et* „*d'un angle quelconque tant ſur terre que dans le Ciel. C'eſt* „*avec ces petits cercles que je verifie actuellement les quarts de* „*cercle de 6 pieds de Rayon.*“ Daſſelbe rühmt Herr Le Gendre in ſeinem Mémoire ſur les opérations trigonométriques, dont les réſultats dependent de la figure de la terre (*Mem. de l'Ac. R. d. S.* 1787. p. 377) wo er einen Verſuch anführet, den er mit einem 10zölligen, dem Herzog von Angoûleme zugehörigen Kreiſe gemacht, und damit die Polhöhe der Pariſer Sternwarte bis auf 1″, und die Entfernung des Polarſterns vom Pol bis auf 2 Sekunden genau herausgebracht hat. Seithem hat ſich Herr Caſſini (vor ſeiner Verhaftnehmung) eines 15zölligen Kreiſes bedient, womit er die Abweichung von 29 der vorzüglichſten Sterne beſtimmt hat, und bey welchem er für einen Fehler von einer Sekunde haften zu können verſichert. Dieſes kleine Declinationsverzeichniß ſteht in der *Connoiſſance des temps* für 1795. S. 211 des Anhangs. Hr. Lenoir verfertigte nachher für die Nationalſternwarte einen Kreis von 3 Fuß im Durchmeſſer, unter Herrn Borda's Aufſicht, und die Herrn Nouet, Perny und Villeneuve beſtimmten damit die wahre Polhöhe dieſer Sterne

Der Le Noiriſche Kreis hat zwey bewegliche Fernröhre, davon das obere zwey gegenüberſtehende Verniere trägt, die ſich ſamt dem Fernrohr auf dem getheilten Gradbogen des Kreiſes fortſchieben, und zur unmittelbaren Winkelmeſſung dienen. Das zweyte bewegliche untere Fernrohr hat keine Verniere, läßt ſich aber eben ſo, wie das obere auf dem untern nicht eingetheilten Kreiſe um deſſen Mittelpunkt herumdrehen. Ferner hat dieſer Kreis eine allgemeine Azimuthalbewegung, das iſt, er dreht ſich auf ſeinem Fuß um ſeine Axe mit ſeinem Gradbogen und ſeinen zwey Fernröhren, gemeinſchaftlich herum; dann hat er noch eine dritte Bewegung, wo ſich der Kreis ſamt den Fernröhren gemeinſchaftlich um den Mittelpunkt des Kreiſes ſelbſt beweget. Dieſe drey Arten von Bewegungen, die man langſam und ſanft, aber vermittelſt der Auslöſungen, auch ſehr geſchwind hervorbringen kann, ſind wohl zu unterſcheiden und zu bemerken. Denn 1°. Jedes der beyden Fernröhre, ſowohl das obere als das untere, kann vor ſich auf dem Kreiſe um deſſen Mittelpunkt herum bewegt werden, und bey dieſer Art von Bewegung ſind alle



Sternwarte auf 48° 50′ 11″, drey Sekunden kleiner als bisher angenommen worden (Man ſehe das Archiv, III. Heft, S. 383 in der Note). Gegenwärtig hat ſich Herr de la Lande einen von 18 Zolle für ſeine Sternwarte à l'école militaire verfertigen laſſen. Er ſchreibt mir unterm 15ten May 1795: „*Je viens de faire faire un Cercle de 18 pouces, plus beau qu'aucun de ceux qu'on avoit faits jusqu'ici, afin de verifier les Erreurs de mon Mural en divers points. Ramsden ne donne pas encore dans l'uſage des Cercles pour multiplier les obſervations ſur les divers points du Limbe, cependant la premiere idée ésans de Mayer, cela ne devroit pas couter tant à un Anglois.*“ Herr Lenoir iſt auch der Verfertiger der 33füßigen achromatiſchen Paſſageninſtrumente, die er für die Herrn de Lambre und Duc la Chapelle gemacht (I. Supplem. Band zu den Berl. Aſtr. J. B. S. 106). Dermalen iſt er Mitglied in der phyſiſchen Klaſſe bey der *Commiſſion temporaire des arts*, welche dem *Comité d'Inſtruction publique* beygegeben iſt; und Herr Carrochez iſt Mitglied des neu errichteten *Bureau de Longitude*.

übrige Theile des Werkzeuges in Ruhe. 2°. Der ganze Kreis ſamt Fernröhren kann um die Axe des Fußes oder Stativs herumbewegt werden, dabey iſt nichts in Ruhe als der untere Azimuthalkreis, auf welchem ein Zeiger mit einem Vernier durch dieſe Bewegung herumgeführt wird, die Fernröhre verändern auch ihren Platz nicht, in Anſehung des Theilkreiſes; wir wollen ſie künftig die Azimuthalbewegung nennen. 3°. Bey der dritten Art von Bewegung geht nur der Theilkreis mit den darauf unverrückten Fernröhren herum, daß alſo hier die Axe, und der Vernier des Azimuthalkreiſes ruhig bleiben. Dieſe Bewegung ſoll zur Unterſcheidung die Centralbewegung heißen.

Wer die beyden letzten Arten von Bewegungen wohl gefaßt hat, wird ſogleich erkennen, daß, wenn ein Kreis in einer gewiſſen Ebene oder Neigung gegen den Horizont liegt, er durch die dritte Art von Bewegung, die man dem Kreiſe mittheilen kann, die Lage ſeiner Ebene nicht verändere, ſondern vollkommen bey der ganzen Herumdrehung des Theilkreiſes um ſeinen Mittelpunkt, darinn verharre; dagegen ein Kreis, der nach der zweyten Art um die Axe des Stativs bewegt wird, die Lage ſeiner Ebene gegen einen beſtimmten Punkt des Horizonts in jedem Augenblicke verändert, und nicht wieder in dieſelbe kommt, bis er nach einer ganzen Umdrehung wieder an ſeine vorige Stellung gelangt. In dieſer dreyfachen Bewegung liegt der ganze Geiſt der Beobachtungsmethode mit Lenoiriſchen Kreiſen.

Um den Gebrauch eines ſolchen Kreiſes bey Meſſung des Vielfachen eines Winkels zu erklären, ſo wollen wir in den Figuren annehmen, der doppelt geſtrichene Durchmeſſer bey den Kreiſen bedeute das obere Fernrohr = m, der einfache Durchmeſſer das untere = n. Wir ſetzen auch voraus, das ganze Inſtrument ſey in die gehörige

Ebene

Ebene des zu messenden Winkels gestellt. Man stelle 1) das obere Fernrohr mit seinem Vernier auf den Nullpunkt des Theilkreises. Vermittelst der Centralbewegung bringe man dieses also gestellte Fernrohr, durch Herumdrehung des ganzen Kreises, auf das zur rechten Hand liegende Object A (Fig. 1); hier stelle man den Kreis fest, und drehe nun das untere Fernrohr für sich nach dem zweyten Gegenstande B. Diese ist nun die erste Stellung des Kreises; sie giebt noch kein Maaß des Winkels an, denn das auf dem ersten Theilungs- oder Nullpunkt eingerichtete obere Fernrohr, womit nach dem Object A visirt worden, kann noch keinen Bogen auf dem Theilkreise abschneiden. Die Lage der beyden Fernröhre determinirt zwar den Winkel ACB, der gemessen werden soll, da aber der untere Kreis keine Theilung hat, so kann auch das Maaß dieses Winkels nicht abgelesen werden. Um dieses zu erhalten, so lasse man 2) diese beyde Fernröhre in der Lage des determinirten Winkels, unverrückt auf dem Kreise stehen, und bringe durch die ausgelöste Centralbewegung des ganzen Kreises, das untere Fernrohr auf den ersten Gegenstand A (Fig. 2). Hier mache man den Kreis wieder feste, und drehe das obere Fernrohr allein und für sich nach dem zweyten Objekte B, so ist klar, daß der von o bis m' vom oberen Fernrohr durchlaufene Bogen, auf dem Theilkreise den gedoppelten Winkel von ACB (wir wollen ihn $\varphi$ nennen), das ist $2ACB = oCm' = 2\varphi$ angeben wird. Seine Hälfte wird also der wahre Winkel seyn, den beyde Gegenstände A und B im Mittelpunkt C des Kreises bilden, und hiermit wäre die erste Messung vermittelst des gedoppelten Winkels geschehen.

Um nun die zweyte Messung zu machen, so bleiben 3) die beyden Fernröhre abermal in ihrer jetzigen Lage, und nur der Kreis allein wird für sich, durch seine Centralbewegung, und mit ihm die Fernröhre her-

des Winkels fällt, ſtünde um 20 Sekunden falſch, ſo wird nach einer 10maligen Operation der Fehler auf 1 Sekunde heruntergebracht, und in jedem andern Punkt wäre er 0 geweſen. Es hängt alſo blos von dem Willen und der Geduld des Beobachters ab, alle Theilungsfehler ganz zu vernichten, welches der Beobachter dadurch gewahr wird, wenn die zuletzt herauskommenden Winkel anfangen, ſich gleich zu bleiben. So hat Herr Caſſini zu Watten den Winkel von Calais mit Caſſel, nach einer 9maligen Operation, wie folget, gemeſſen.

| Operat. | Vielfache beobachtete Winkel. | Einfacher Winkel daraus |
|---|---|---|
| 1 | 320° 52′ 5″,0 | 160° 26′ 2″,5 |
| 2 | 641 44 15, 0 | 3, 7 |
| 3 | 962 36 15, 0 | 2, 5 |
| 4 | 1283 28 22, 0 | 2, 2 |
| 5 | 1604 20 37, 0 | 3, 7 |
| 6 | 1925 12 52, 5 | 4, 3 |
| 7 | 2246 5 15, 0 | 5, 3 |
| 8 | 2566 57 20, 0 | 5, 0 |
| 9 | 2887 49 30, 0 | 5, 0 |

Hier ſieht man, wie ſich die Sekunden dieſes Winkels anfänglich verändern, bis ſie ſich endlich in den drey letzten Meſſungen auf 5 fixiren.

Mayers Methode iſt von der gegenwärtigen noch hierin verſchieden, daß man nach ſeinem Verfahren, den einfachen, doppelten, dreyfachen, vierfachen ... Winkel in arithmetiſcher Ordnung der Anzahl der Operationen erhält; dagegen mit dem Lenoiriſchen Kreiſe, und zwey beweglichen Fernröhren, die vielfachen Winkel der geraden Zahlen nach der arithmetiſchen Progreßion 2, 4, 6, 8 .... erhalten werden. Daraus folgt, daß nach derſel-

derselben Anzahl von Operationen, nach der Bordaischen Manier, der Fehler doppelt geringer als nach dem Mayerischen Verfahren wird. Nach Mayer vermindert sich der Fehler $\partial\omega$ nach n Operationen nur um $\frac{\partial\omega}{n}$, dagegen nach Borda um $\frac{\partial\omega}{2n}$.

Bey dieser Messungsart muß man hauptsächlich Acht haben, daß man sich in den verschiedenen zu machenden Bewegungen nicht verirre; nicht etwa die Fernröhre bewege, wenn der ganze Kreis bewegt werden sollte, oder umgekehrt. Denn, wenn sich ein solcher Mißgriff ereignet, so gehen alle vorhergegangene Messungen verlohren, und man muß wieder ganz von vorn anfangen. Man mag sich daher beym Gebrauche dieser Methode folgende Vorsichtsregeln wohl merken:

1°. Die Centralbewegung des Kreises, und jene der Fernröhre, sind immer abwechselnd, das ist, dieselbe Bewegung darf nie zweymal hinter einander geschehen, sondern allemal eine um die andere.

2°. Wenn eines der Fernröhre sich außerhalb des zu messenden Winkels befindet, so ist allemal die Reihe an diesem Fernrohr, bewegt zu werden, es muß daher das andere durchkreuzen, bevor es auf den zweyten Gegenstand gerichtet wird.

3°. Wenn beyde Fernröhre, jedes nach seinen Gegenstand, gerichtet sind, so kommt die Reihe an den Kreis, central herumbewegt zu werden.

4°. Die Messung eines Winkels ist jedesmal vollbracht, wenn das obere Fernrohr nach dem zweyten Gegenstand B, der zur Linken liegt, eingestellt worden.

Nach

Nach dieſen vier Vorſchriften, und ein wenig Uebung in der Handhabung des Inſtruments, wird man ſich nicht leicht confundiren und in den vorzunehmenden Bewegungen irren.

Das bisher Erklärte kommt, bis auf eine kleine Abänderung, mit Mayers Verfahren überein, und iſt im weſentlichen mit dem Bordaiſchen einerley. Allein der Gedanke, dieſe Methode bey Höhenmeſſungen, und zu aſtronomiſchem Gebrauche überhaupt zuerſt angewendet zu haben, gebührt Herrn Borda allein; obgleich ſich auch hier dieſe Anwendung urſprünglich auf das Mayeriſche Princip gründet. Ich werde nun dieſes Verfahren ſo deutlich als möglich vortragen.

Um ſich ganzer Kreiſe in der vertikalen Stellung zu Höhenmeſſungen zu bedienen, braucht man blos ein gutes Niveau à bulle d'air an das untere Fernrohr anbringen zu laſſen. Dieſes Fernrohr iſt alsdann für nichts anders als einen beweglichen Träger dieſes Niveau's anzuſehen, und wir wollen es künftig, der Deutlichkeit wegen, auch ſo nennen. Das obere Fernrohr dient allein zur Beobachtung, und aus der wechſelſeitigen Bewegung, dieſes Fernrohrs auf dem Theilkreiſe, und des ganzen Zirkels auf ſeinem eigenen Zentralzapfen, werden die Meſſungen des vielfachen Höhenwinkels vollbracht. Es gehören aber hiezu zwey Beobachter, davon der eine blos damit beſchäftiget iſt, das obere Fernrohr nach dem himmliſchen Gegenſtand zu richten, mittlerweile der zweyte das Niveau in Acht nimmt, und es zu gleicher Zeit einſpielen laſſen muß, wenn der erſte Beobachter die Höhe nimmt.

Mißt man Meridianhöhen culminirender Geſtirne, wie ſolches in der praktiſchen Aſtronomie am meiſten gebräuchlich iſt, ſo wird doch einige Zeit dazu erfordert, um denſelben Höhenwinkel im Mittagskreiſe mehrmalen

zu

zu messen. Der culminirende Gegenstand rückt inzwischen fort; es müssen folglich diese Winkel nahe an dem Meridian, mit Zuziehung der jedesmal beobachteten wahren Zeit gemessen, daraus die Höhenveränderungen nach bekannten Formeln berechnet, und auf solche Art jede beobachtete einzelne Höhe auf die Meridianhöhe reducirt werden. Herr Cassini macht mit seinem 15zölligen Kreise gewöhnlich 10 Beobachtungen in einem Zeitraume von 12 Minuten, davon fünf vor, und fünf nach der Kulmination des Gestirns; daher sind die Beobachtungen nicht über 6 Minuten von der Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis entfernt; die Reduktionen sind alsdann noch sehr genau, und man hat eine gleiche Anzahl von Beobachtungen zu beyden Seiten des Meridians liegen.

Will man nun die Meridianhöhe eines Sterns beobachten, so stelle man (Fig. 7) 1°. den Vernier des obern Fernrohrs AB auf o feste, und richte es nunmehr durch die Centralbewegung des ganzen Kreises nach dem zu beobachtenden Stern S in Süden; mittlerweile macht der zweyte Beobachter den Niveau-träger DE los, dreht ihn so, daß die Luftblase dieses Niveau's horizontal einspielt. Durch die angebrachten sanften Bewegungen, bringt nun der erste Beobachter den Stern genau auf den Horizontalfaden im Fernrohr; der zweyte Beobachter bringt die dadurch gestörte Luftblase wieder in die gehörige Lage. Sobald nun beydes eintrifft (wovon sich die Beobachter Nachricht geben), so ist die erste Beobachtung (nicht Messung) gemacht, und es wird in demselben Augenblicke die Stunde, Minute und Sekunde nach der wohl berichtigten Pendeluhr aufgeschrieben. Von Graden ist hier nicht die Rede; denn, obgleich eine Beobachtung gemacht ist, so giebt das Fernrohr doch keine Höhe an, da es unverrückt auf dem o Punkte der Theilung, auf den es anfänglich ist gestellt worden, stehen geblieben, und das Fernrohr bloß durch die Centralbewegung gemeinschaft-

ſchaftlich mit dem ganzen Kreiſe nach dem Stern iſt gerichtet worden.

2°. Wenn die erſte Operation geſchehen iſt, ſo dreht der erſte Beobachter den ganzen Kreis auf ſeiner ſenkrechten Axe genau 180° im Azimuth herum. Der Theilkreis, der nach Oſten gekehrt war, wird nun nach Weſten zu ſtehen kommen, und das oberſte Fernrohr AB (Fig. 8), das vorher nach Süden ſtand, wird jetzt nach Norden ſtehn. Darauf dreht der erſte Beobachter das Fernrohr AB für ſich allein nach dem Stern S ohne den Kreis zu bewegen. Der zweyte Beobachter beobachtet das Niveau, und erhält es mittelſt der Zentralbewegung des Kreiſes, in der richtigen Lage, hütet ſich aber wohl, den Niveauträger zu verrücken, der jetzt unverändert in ſeiner vorigen Lage bleiben muß. In dem Augenblicke aber, wo der erſte Beobachter den Faden ſeines Fernrohrs durch die Bewegung des Fernrohrs ſelbſt, an den Stern bringt, muß der zweyte Beobachter, durch die Zentralbewegung des ganzen Kreiſes, das Niveau zum einſpielen bringen. Durch dieſes Zuſammentreffen iſt die erſte Meſſung geſchehen, und man bemerkt, wie vorher, die Zeit der Uhr, aber nunmehr auch die Grade, Minuten, Sekunden auf dem Kreiſe; und dies wird folglich die doppelte Zenithdiſtanz ACS geben, davon die Hälfte der beobachtete einfache Scheitelabſtand ZCS ſeyn wird.

Um nun den vierfachen Winkel zu beobachten, ſo bringt 3°. der erſte Beobachter durch die Azimuthalbewegung den ganzen Kreis wieder in ſeine vorige Azimuthallage, das iſt, der Theilkreis ſteht nun wieder nach Oſten. Das bey der letzten Beobachtung feſtgeſtellte obere Fernrohr bleibt jetzt unbewegt ſtehn, und nur der ganze Kreis wird durch ſeine Zentralbewegung in Bewegung geſetzt, und dadurch das Fernrohr abermals nach dem Stern ge-

gerichtet; der zweyte Beobachter setzet seiner Seits den Niveauträger in Bewegung, und bringt ihn in die horizontale Lage, aus der er durch die Umdrehung des Kreises herausgekommen. Treffen die beyden Beobachter nun wieder zusammen, der eine in der Stellung des Fadens auf dem Stern durch die Centralbewegung, der andere in der Stellung des Niveau's durch den Träger, so wird wieder in demselben Augenblick die Zeit der Uhr bemerkt; Grade, Minuten, Sekunden, werden auf dieser Seite nie abgelesen, weil das Fernrohr immer auf dem Theilpunkt unverrückt da stehen bleibt, wo es in der vorhergehenden Beobachtung gestellt worden.

4°. Hierauf dreht der erste Beobachter den Kreis, wie zuvor, 180° im Azimuth herum, das Fernrohr kommt wieder nach Norden zu stehen, es wird für sich allein, nach dem Stern in Süden gedrehet, indem es durch das Zenith passirt, mittlerweile der zweyte Beobachter das Niveau durch die Centralbewegung des Kreises einstellt. Sind beyde Beobachter einig, so werden, Zeit der Uhr, aber nun auch die Grade des Theilkreises bemerkt und aufgeschrieben, welches begreiflich den vierfachen Bogen des zu beobachtenden Scheitelabstands geben wird.

Auf diese Art kann man diese Operation, so oft man will, wiederholen, und so, wie bey Horizontalwinkeln, der 6fache, 8fache, oder 2nfache Höhenwinkel gemessen werden. Nur muß man sich in Acht nehmen, die Bewegungen der Fernröhre, mit jener des ganzen Kreises, während der Operation nicht zu verwechseln, sonst geht alle gehabte Mühe und Arbeit verlohren, und man muß von vorne anfangen. Folgende vier Regeln können bey diesem Verfahren zur Vorschrift und zum Leitfaden dienen.

1°. Allemal wenn der Theilkreis nach Osten gekehrt stehet, bleibt das Fernrohr für sich fest und unver-

rückt in Anſehung des Theilkreiſes, und es darf nur durch die gemeinſchaftliche Centralbewegung des ganzen Kreiſes bewegt und gerichtet werden.

2°. Steht die Eintheilung des Kreiſes hingegen nach Weſten, ſo muß das Fernrohr für ſich allein bewegt werden.

3°. Die Bewegung des Niveau's mit ſeinem beweglichen Träger geſchieht allemal in einer, der Bewegung des Fehrnrohrs entgegengeſetzten, Richtung.

4°. Iſt das Fernrohr beweglich, ſo muß das Niveau mit ſeinem Träger feſt bleiben, und nur durch die Centralbewegung des ganzen Kreiſes eingeſtellt werden.

Durch wenig Uebung und Aufmerkſamkeit, wird dies Verfahren gar bald in eine mechaniſche Fertigkeit übergehen. Man kann ſich auch die Arbeit noch dadurch erleichtern, und beträchtlich abkürzen, wenn man bloß die Zeit der Uhr bey jeder Operation beobachtet und aufſchreibt, die Grade, Minuten und Sekunden aber nur am Ende der ganzen Meſſung erſt ablieſt. Dieſe durch die ganze Anzahl der Operationen dividirt, giebt alsdann den beobachteten Scheitelabſtand; denn hier, wo nach zwey Operationen, erſt ein Winkel abgeleſen wird, wird ein beobachteter Vertikalwinkel $\phi$ allemal gleich ſeyn $\frac{m.360° + \omega}{n}$, alſo nur durch die ganze Anzahl, und nicht, wie bey terreſtriſchen Winkeln, durch die doppelte Anzahl der Operationen dividirt. Da aber die n Operationen zu verſchiedenen Zeiten gemacht und bemerkt werden, ſo kann man, wie bekannt, aus der Zeit einer jeden einzelnen Beobachtung die Höhenveränderung $\partial x$ berechnen. Die Summe aller dieſer berechneten Höhenveränderungen ſey $= \gamma$, ſo wird der wahre beobachtete Scheitelabſtand alsdann ſeyn $\frac{m.360° + \omega - \gamma}{n}$.

Man

Man hat auf diese Art gar nicht nöthig, alle das zwischen liegende einzelne Höhen insbesondere zu kennen und abzulesen, welches auch in der ganzen Operation den größten Aufenthalt machen würde.

Um hievon ein erläuterndes Beyspiel zu geben, so setze ich eine Beobachtung des Sterns β im Adler her, dessen Mittagshöhe Herr Cassini mit seinem Kreise den 22sten August 1790 auf der National-Sternwarte in Paris gemacht hat *). Das Beyspiel habe ich zwar, der größern Verständlichkeit willen, etwas anders als am angezeigten Orte vorgestellt, allein das Verfahren sowohl als das Resultat läuft auf dasselbe hinaus.

Meridianhöhen β Aquilae, den 22sten August 1790.

| Anzahl der Operationen | Entfernung in Zeit von der Kulminazion | | der auf dem Kreis durchlaufene Bogen | | | berechnete Höhenveränderung. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Min. | Sec. | Grad. | Min. | Sec. | Sec. |
| 1 | — 6 | 49,4 | 0 | 0 | 0 | — 88,93 |
| 2 | 5 | 26,4 | | | | 56,50 |
| 3 | 3 | 40,4 | | | | 25,77 |
| 4 | 2 | 30,4 | | | | 12,00 |
| 5 | 1 | 11,4 | | | | 2,70 |
| 6 | + 0 | 13,6 | | | | 0,10 |
| 7 | 1 | 33,6 | | | | 4,64 |
| 8 | 2 | 49,6 | | | | 15,28 |
| 9 | 4 | 27,6 | | | | 38,01 |
| 10 | 5 | 50,6 | 429 | 17 | 22,5 | 65,19 |
| Das Mittel, | | | 42 | 55 | 44,2 | — 30,91 |
| Hievon | | | | — | 30,9 | |
| Beobachtete Zenithdistanz β Aquilae | | | 42° | 55′ | 13″3 | |



*) Exposé des Opérations faites en France en 1787 pour la Jonction des Observ. etc. pag. 77.

Es iſt nicht unbedingt nothwendig, daß das Fernrohr beym Anfang einer Beobachtung auf dem Nullpunkt der Theilung eingeſtellt ſey; jeder andere beliebige Punkt, jede andere Stellung des Fernrohrs, kann eben ſo gut dienen, da es hier lediglich auf den Unterſchied des durchbeobachteten Bogens ankommt. Nur muß man dieſen Punkt, von welchem man ausgeht, genau bemerken. So hat z. B. Herr Caſſini die oben angeführte Beobachtung des Sterns β im Adler den 25ſten Auguſt weiter fortgeſetzt, und daher das Fernrohr auf dem letzten Beobachtungsſtand, das iſt, auf 429° 17′ 22″,5 ſtehen laſſen, und nun von neuem fortgefahren, zehn Operationen wie am 22ſten Auguſt zu machen; bey der zehnten Operation ward der durchlaufene Bogen abgeleſen = 858° 35′ 30″,0, folglich iſt der an dieſem Tage durchbeobachtete Bogen gleich geweſen 858° 35′ 30″,0 — 429° 17′ 22″,5 = 429° 18′ 7″,5 wovon der 10te Theil = 42° 55′ 48″,7 der an dieſem Tage beobachtete Scheitelabſtand dieſes Sterns war. Den 30ten Auguſt wiederhohlte er daſſelbe, der Anfangspunkt war jetzt 858° 35′ 30″,0; am Ende der zehnten Operation ward gefunden 1287° 52′ 4″, demnach war hier abermals die beobachtete Zenithdiſtanz

$$\frac{1287^\circ\,52'\,4'' - 858^\circ\,35'\,30''}{10} = \frac{429^\circ\,16'\,34''}{10}$$

= 42° 55′ 45″,4. Auf dieſe Art kann es bis ins Unendliche fortgetrieben werden. Daß man in der Zwiſchenzeit von mehreren Tagen von den Veränderungen der Vorrückung der Nachtgleichen, der Lichtsabirrung, und Erdſchwankung Rechnung tragen müſſe, verſtehet ſich von ſelbſt.

Man kann auch, ſtatt des Reſultats von 10 zu 10 Operationen, das von 20 zu 20 Operationen, oder alle 30 zuſammen nehmen. Wenn ich z. B. die 20 Operationen von zwey Tagen nehme, ſo wird der beobachtete

Winkel

Winkel $\frac{858° 35' 30''}{20}$ = 42° 55' 46'',5 und alle 30 Operationen geben $\frac{1287° 52' 4''}{30}$ = 42° 55' 46'',1.

Man ersieht zugleich hieraus, welche Genauigkeit diese verschiedenen Resultate unter sich geben, welche desto größer seyn wird, je größer der Divisor des durch die Beobachtungen durchgelaufenen Bogens ist.

Beobachtet man Sonnenhöhen, so kann man bey jedesmaliger Operation, wechselsweise erst den obern, und dann den untern Sonnenrand nehmen, solchergestalt erhält man unmittelbar die Höhe ihres Mittelpunkts.

Es könnte wohl zur Noth, auch ein einziger Beobachter nach dieser Methode beobachten, allein es ist nicht zu verhehlen, daß die Schwierigkeiten ungleich größer, und die Operationen von sehr langer Dauer seyn würden. Ich mache daher folgenden Vorschlag, wobey nicht nur ein einzelner Beobachter für sich allein fertig würde, sondern vielleicht auch wohl besser als mit einem Gehülfen zurechte käme. Das Bild des an dem Kreise befindlichen beweglichen Niveau's dürfte nur durch eine geschickt angebrachte Spiegelreflexion vor das Okular geschickt werden, so, daß der Beobachter mit dem einen Auge ins Fernrohr sehen, und mit der einem Hand den Faden auf den Stern bringen könnte, mittlerweilen er mit dem andern Auge das Niveau im Spiegel sähe, und es mit der anderm Hand zum einspielen brächte. Daß ein Beobachter das gar wohl zu leisten vermag, und dabey nichts unmögliches, auch nichts ungewöhnliches, vorausgesetzt werde, das beweist der tägliche Gebrauch der Herschelschen Lampenmikrometer, wo gerade dasselbe statt findet. Ich pflege, wenn ich mit Hadleyschen Sextanten korrespondirende Sonnenhöhen nehme, den Chronometer in der lin-

ken Hand, gerade unter dem Okular des Fernrohrs zu halten; mit dem rechten Auge sehe ich ins Fernrohr, und beobachte die Berührung oder Trennung der beyden Sonnenränder, mit dem linken sehe ich zugleich den Secundenzeiger des Chronometers, und bemerke in demselben Moment die Zeiten der Beobachtungen. Durch Handles mit Hook's Joints läßt sich die sanfte Bewegung des Niveauträgers (jene des Fernrohrs ist ohnehin zur Hand) sehr leicht vor das Okular des Fernrohrs bringen, und einem Künstler dürfte es nicht schwer werden, durch eine ganz einfache Vorrichtung, das Bild des Niveau's vor das Ocular zu schicken; etwa so wie Ramsden an dem 6fußigen Mauerquadranten des Herzogs von Marlborough in Blenheim, den obern Anhänge- und den untern Einspielpunkt des Loths, vermittelst eines Spiegels, zusammen bringt.

## V.

## Ueber die Lehre von den entgegengesetzten Größen; von G. S. Klügel, der Mathem. und Phys. Professor zu Halle.

(Fortsetzung von Abh. III. im 3ten Hefte, S. 309–319.)

17. Wenn in der Rechnung der Unterschied zweyer Größen vorkommt, von welchen die eine oder die andere die abzuziehende seyn kann, so bestimme man nach Gutdünken, welche von beyden die größere, und welche die kleinere sey, und richte darnach die Rechnung ein. In dem Falle, da das Entgegengesetzte Statt hat, wird der Unter-

Unterschied negativ, und ändert das Vorzeichen. Cagnoli in seiner Trigonometrie gebraucht hier anstatt des gewöhnlichen Zeichens eines Unterschiedes ein anderes, welches man auch von den Engländern gebraucht findet, wenn nicht bestimmt wird, welche Größe von der andern abzuziehen ist; als in den Philos. Transact. Vol. 51. pag. 927 f. Das neue Zeichen ist bey der synthetischen Methode brauchbar, bey der analytischen ist es ganz unnöthig. Denn wenn nicht besondere Umstände es hindern, ist a — b sowohl positiv als negativ zu verstehen; positiv in dem Falle, welcher der Rechnung untergelegt wird, negativ in einem andern, worin a kleiner als b ist. Herr Prof. Nieuwland in Leyden hat sich auch jenes neuen Zeichens bedient (Supplementband zu Bode's astron. Jahrb. I. S. 47), daher ich es nöthig finde, dieser Neuerung zu widersprechen, und zu verhindern, daß deutsche Analytiker ihr nicht beyfallen. Das Zeichen — thut völlig die Dienste, welche das andere leisten soll.

18. Wenn eine Größe in einer Verbindung von Größen ihr Vorzeichen nicht durchaus, sondern nur in einigen Gliedern der Gleichungen ändert, so entsteht daraus keine mit jener gleichartige Verbindung. Z. B. die Verbindungen $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = A$, und $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = B$, sind ungleichartig.

Oder es sey I. $x + y = a$; II. $x^3 + y^3 = b^3$; so sind x und y die Wurzeln der quadratischen Gleichung, $x^2 - ax + \frac{a^3 - b^3}{3a} = o$. Setzt man aber I. $x + y = a$; II. $x^3 - y^3 = b^3$, so ist x die einzige Wurzel der Gleichung, $2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x = a^3 + b^3$, und y die einzige Wurzel der Gleichung, $2y^3 - 3ay^2 + 3a^2y = a^3 - b^3$. Beyde Größen lassen sich aus einer einzi-

gen Gleichung mittelbar finden, wenn man ſetzet $x-y=z$, wodurch man erhält, $z^3+3a^2z=4b^3$.

Iſt I. $x+y=a$, und II. $x^2+y^2=b^2$, ſo ſind x und y die Wurzeln der Gleichung, $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$. Setzt man aber I. $x+y=a$; II. $x^2-y^2=b^2$, ſo iſt $2ax=a^2+b^2$, und $2ay=a^2-b^2$.

19. Wolf bringt in ſeinen *Elementis Analyſeos*, §. 163, die Aufgabe vor: Zwey Zahlen x und y zu finden, ſo, daß $x^2-y^2=xy$, und auch $x+y=xy$. Seine Auflöſung iſt ſehr weitſchweifig, weil er nicht bemerkt, daß der erſte Theil jener Gleichung ſich durch den erſten Theil der andern theilen läßt. Durch die Diviſion erhält man gleich $x-y=1$, alſo

$x^2-3x+1=0$ und $y^2-y-1=0$.

Die Wurzeln der erſtern Gleichung ſind $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; der zweyten, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Die zweyte dieſer letztern iſt negativ. Wolf nennt ſie, nach einem bis auf ſeine Zeit noch üblichen Ausdrucke, eine falſche Wurzel, und wirft ſie ganz weg. Auch die zweyte Wurzel der Gleichung für x zieht er nicht in Betrachtung. Er ſagt nur von ihr, daß ſie nicht die kleinere Zahl y ſeyn könne, weil man dieſe durch eine andere Gleichung finde. Er hätte ſagen ſollen, weil y auf eine andere Art in den Bedingungen der Aufgabe vorkommt, als x. Die beyden weggeworfenen Wurzeln gelten für einen andern verwandten Fall der Aufgabe, nämlich dieſen: I. $y^2-x^2=xy$; II. $y-x=yx$, in welchem y das entgegengeſetzte Vorzeichen bekommen hat. Die Gleichungen für x und y ſind:

$x^2-3x+1=0$ und $y^2+y-1=0$.

Die

Die erste ist völlig dieselbe, wie in dem erstern Falle; die zweyte hat dieselben, nur entgegengesetzten, Wurzeln mit der Gleichung für y in jenem Falle, so, daß die dort unbrauchbare Wurzel, entgegengesetzt genommen, hier die brauchbare, oder der nach dem eigentlichen Sinn der Aufgabe geforderte Werth von y ist.

20. Man sieht aus diesem Beyspiele, wie die alten Algebraisten auf die unbequeme und leicht zu mißdeutende Benennung, **falsche Wurzeln**, gekommen sind. Sie bemerkten nicht, daß diese, positiv genommen, für einen andern Fall der Aufgabe brauchbar waren, und daß die Algebra zwey Fälle in eine Gleichung begreifen kann, wenn dieselbe Größe in zweyerley Beziehung genommen wird, und diesem zufolge die Vorzeichen ihrer ungeraden Potenzen eine doppelte Bedeutung erhalten. Oder sie wußten nicht, wie sie die Verbindung der negativen Wurzeln mit den gegebenen Größen erklären sollten, wenn die Frage von der Beschaffenheit war, daß mehrere Größen eine ähnliche, aber doch in Absicht auf Addition und Subtraction verschiedene Relation gegen einander, und gegen gegebene Größen hatten. Z. B. werde folgende Aufgabe vorgelegt: Eine Gesellschaft verzehrte in einem Wirthshause 175 Gr. Zwey wurden frey gehalten, daher die Zeche der übrigen 10 Groschen mehr betrug, als wenn alle bezahlt hätten; wie stark war die Gesellschaft? Die Gleichung für die gesuchte Anzahl x ist, $x^2 - 2x = 35$, also $x = +7$ und $-5$. Hier könnte man leicht die negative Wurzel als unbrauchbar verwerfen. Sie ist aber, absolut betrachtet, die Anzahl der Bezahlenden. Hätte man diese gesucht und x genannt, so wäre $x^2 + 2x = 35$.

Bey der geometrischen Verzeichnung der Wurzeln einer Gleichung war es deutlicher, was die negativen Wurzeln bedeuten, und zugleich völlig offenbar, daß sie so gut als die positiven Wurzeln zu der vollständigen Auf-

lösung gehörten. Daher sagt auch Descartes, daß die Ordinaten für die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Parabel an einer Seite der Abscissenlinie der letztern die wahren Wurzeln der construirten Gleichung sind, an der andern die falschen (Geometria. L. III. p. 88). Sein Commentator, van Schooten, sagt bey einer andern Stelle, daß in der Geometrie die wahren Wurzeln überhaupt (communiter) diejenigen Linien bezeichnen, die in dem Sinne genommen werden, wie sie der Aufgabe zufolge gefunden werden sollen, die falschen Wurzeln aber die in dem gegenseitigen Sinne (Comment. p. 310).

21. Wenn die gesuchten Größen in den Gleichungen, welche die Bedingungen einer Aufgabe enthalten, alle auf einerley Art enthalten sind, so muß die Gleichung, welche die Verbindung einer der gesuchten Größen mit den gegebenen enthält, für alle übrigen auch gelten. Diese Gleichung enthält also so viele positive Wurzeln, als gesuchte Größen sind, es wäre denn, daß in Absicht auf die gesuchten Größen selbst noch eine oder andere allgemeine Bedingung nicht erfüllt wäre, dergleichen ist, daß das Product zweyer Zahlen allemal kleiner ist, als das Quadrat ihrer halben Summe. Die Wurzeln der gemeinschaftlichen Gleichung für die unbekannten Größen sind nur dann alle negativ, wenn die Rechnung auf einen Fall übergetragen wird, der dem zum Grunde gelegten in allen Stücken entgegengesetzt ist.

Z. B. Es sey I. $x+y=a$; II. $x^2+y^2=b^2$; so ist $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$, und $2y^2-2ay+a^2-b=0$.

Oder es sey I. $x+y+z=a$, II. $xy+xz+yz=b$, III. $xyz=c$, so ist $x^3-ax^2+bx-c=0$, eine Gleichung die ebenfalls für y und z gilt.

22. Sind die gesuchten Größen in den Bedingungsgleichungen zwar auf eine ähnliche Art, aber ein Theil

mit

mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rücksicht auf die übrigen enthalten, so muß man auf zwey gemeinschaftliche Gleichungen für jene und für diese kommen, die aber so beschaffen sind, daß die Vertauschung der Vorzeichen + und — bey den ungeraden Potenzen, die eine Gleichung in die andere verwandelt, daher beyde unter einer Gleichung begriffen werden können, wenn man neben den positiven Wurzeln auch negative nimmt. Die letztern sind diejenigen, bey denen ungeraden Potenzen die Vorzeichen + und — ihre Bedeutung ändern.

Z. B. Es sey I $x-y=a$; II. $x^2+y^2=b^2$; so ist $2x^2-2ax=b^2-a^2$ und $2y^2+2ay=b^2-a^2$. Die negative Wurzel der einen Gleichung, entgegesetzt genommen, ist die positive Wurzel der andern.

Es sey I. $p+q-r=a$; II. $pq-pr-qr=b$; III. $pqr=c$. Die Gleichungen für p, q, r zu finden, setze man $q-r=\alpha$; $qr=\beta$ so ist

$$p+\alpha=a \quad \text{oder} \quad p^3+p^2\alpha=ap^2$$
$$p\alpha-\beta=b \quad \cdot \quad p^2\alpha-p\beta=bp$$
$$p\beta=c \quad \cdot \quad p\beta=c$$

folglich

$p^3=ap^2-bp-c$ oder $p^3-ap^2+bp+c=0$.

dieselbe Gleichung gilt nothwendig auch für q.

Um die Gleichung für r zu erhalten, setze man

$p+q=\alpha$; $pq=\beta$ so ist

$r^3+ar^2+br-c=0$.

Beyde Gleichungen verwandeln sich eine in die andere, wenn die Vorzeichen der ungeraden Potenzen, die hier beyde + sind, mit — vertauscht, und darauf alle Vorzeichen geändert werden. Die positive Wurzel der zweyten Gleichung, negativ genommen, ist die negative Wurzel der ersten; so wie die beyden positiven Wurzeln der ersten, negativ genommen, die negativen Wurzeln der

zwey-

gen Gleichung mittelbar finden, wenn man ſetzet $x-y=z$, wodurch man erhält, $z^3+3a^2z=4b^3$.

Iſt I. $x+y=a$, und II. $x^2+y^2=b^2$, ſo ſind x und y die Wurzeln der Gleichung, $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$. Setzt man aber I. $x+y=a$; II. $x^2-y^2=b^2$, ſo iſt $2ax=a^2+b^2$, und $2ay=a^2-b^2$.

19. Wolf bringt in ſeinen *Elementis Analyſeos*, §. 163, die Aufgabe vor: Zwey Zahlen x und y zu finden, ſo, daß $x^2-y^2=xy$, und auch $x+y=xy$. Seine Auflöſung iſt ſehr weitſchweifig, weil er nicht bemerkt, daß der erſte Theil jener Gleichung ſich durch den erſten Theil der andern theilen läßt. Durch die Diviſion erhält man gleich $x-y=1$, alſo

$x^2-3x+1=0$ und $y^2-y-1=0$.

Die Wurzeln der erſtern Gleichung ſind $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; der zweyten, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Die zweyte dieſer letztern iſt negativ. Wolf nennt ſie, nach einem bis auf ſeine Zeit noch üblichen Ausdrucke, eine falſche Wurzel, und wirft ſie ganz weg. Auch die zweyte Wurzel der Gleichung für x zieht er nicht in Betrachtung. Er ſagt nur von ihr, daß ſie nicht die kleinere Zahl y ſeyn könne, weil man dieſe durch eine andere Gleichung finde. Er hätte ſagen ſollen, weil y auf eine andere Art in den Bedingungen der Aufgabe vorkommt, als x. Die beyden weggeworfenen Wurzeln gelten für einen andern verwandten Fall der Aufgabe, nämlich dieſen: I. $y^2-x^2=xy$; II. $y-x=yx$, in welchem y das entgegengeſetzte Vorzeichen bekommen hat. Die Gleichungen für x und y ſind:

$x^2-3x+1=0$ und $y^2+y-1=0$.

Die

Die erste ist völlig dieselbe, wie in dem erstern Falle; die zweyte hat dieselben, nur entgegengesetzten, Wurzeln mit der Gleichung für y in jenem Falle, so, daß die dort unbrauchbare Wurzel, entgegengesetzt genommen, hier die brauchbare, oder der nach dem eigentlichen Sinn der Aufgabe geforderte Werth von y ist.

20. Man sieht aus diesem Beyspiele, wie die alten Algebraisten auf die unbequeme und leicht zu mißdeutende Benennung, falsche Wurzeln, gekommen sind. Sie bemerkten nicht, daß diese, positiv genommen, für einen andern Fall der Aufgabe brauchbar waren, und daß die Algebra zwey Fälle in eine Gleichung begreifen kann, wenn dieselbe Größe in zweyerley Beziehung genommen wird, und diesem zufolge die Vorzeichen ihrer ungeraden Potenzen eine doppelte Bedeutung erhalten. Oder sie wußten nicht, wie sie die Verbindung der negativen Wurzeln mit den gegebenen Größen erklären sollten, wenn die Frage von der Beschaffenheit war, daß mehrere Größen eine ähnliche, aber doch in Absicht auf Addition und Subtraction verschiedene Relation gegen einander, und gegen gegebene Größen hatten. Z. B. werde folgende Aufgabe vorgelegt: Eine Gesellschaft verzehrte in einem Wirthshause 175 Gr. Zwey wurden frey gehalten, daher die Zeche der übrigen 10 Groschen mehr betrug, als wenn alle bezahlt hätten; wie stark war die Gesellschaft? Die Gleichung für die gesuchte Anzahl x ist, $x^2 - 2x = 35$, also $x = +7$ und $-5$. Hier könnte man leicht die negative Wurzel als unbrauchbar verwerfen. Sie ist aber, absolut betrachtet, die Anzahl der Bezahlenden. Hätte man diese gesucht und x genannt, so wäre $x^2 + 2x = 35$.

Bey der geometrischen Verzeichnung der Wurzeln einer Gleichung war es deutlicher, was die negativen Wurzeln bedeuten, und zugleich völlig offenbar, daß sie so gut als die positiven Wurzeln zu der vollständigen Auf-

lösung gehörten. Daher sagt auch Descartes, daß die Ordinaten für die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Parabel an einer Seite der Abscissenlinie der letztern die wahren Wurzeln der construirten Gleichung sind, an der andern die falschen (Geometria. L. III. p. 88). Sein Commentator, van Schooten, sagt bey einer andern Stelle, daß in der Geometrie die wahren Wurzeln überhaupt (communiter) diejenigen Linien bezeichnen, die in dem Sinne genommen werden, wie sie der Aufgabe zufolge gefunden werden sollen, die falschen Wurzeln aber die in dem gegenseitigen Sinne (Comment. p. 310).

21. Wenn die gesuchten Größen in den Gleichungen, welche die Bedingungen einer Aufgabe enthalten, alle auf einerley Art enthalten sind, so muß die Gleichung, welche die Verbindung einer der gesuchten Größen mit den gegebenen enthält, für alle übrigen auch gelten. Diese Gleichung enthält also so viele positive Wurzeln, als gesuchte Größen sind, es wäre denn, daß in Absicht auf die gesuchten Größen selbst noch eine oder andere allgemeine Bedingung nicht erfüllt wäre, dergleichen ist, daß das Product zweyer Zahlen allemal kleiner ist, als das Quadrat ihrer halben Summe. Die Wurzeln der gemeinschaftlichen Gleichung für die unbekannten Größen sind nur dann alle negativ, wenn die Rechnung auf einen Fall übergetragen wird, der dem zum Grunde gelegten in allen Stücken entgegengesetzt ist.

Z. B. Es sey I. $x+y=a$; II. $x^2+y^2=b^2$; so ist $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$, und $2y^2-2ay+a^2-b=0$.

Oder es sey I. $x+y+z=a$, II. $xy+xz+yz=b$, III. $xyz=c$, so ist $x^3-ax^2+bx-c=0$, eine Gleichung die ebenfalls für y und z gilt.

22. Sind die gesuchten Größen in den Bedingungsgleichungen zwar auf eine ähnliche Art, aber ein Theil

mit

kann nur zwey mögliche Wurzeln haben, und die cubische Gleichung für y nur eine, da hier nur drey gesuchte Größen sind. Jene Gleichung hat aber nothwendig zwey mögliche Wurzeln, weil $x - z = a - y$ und $xz = \frac{c}{y}$, woraus sich, da y eine mögliche Größe ist, immer mögliche Werthe für x und z ergeben.

25. Die Unmöglichkeit zweyer Wurzeln der cubischen Gleichung in (§. 24.) rührt daher, daß der Coefficient b nicht das Aggregat der Produkte aus je zwey der drey Wurzeln, mit gehöriger Beobachtung der Vorzeichen ist, wenn a und c aus möglichen Größen entstehen sollen. Soll b aber die bey cubischen Gleichungen erforderliche Form haben, so bringt dieses unmögliche Größen mit sich. In andern Fällen rührt die Unmöglichkeit zweyer Wurzeln von der Beschaffenheit ihrer arithmetischen Summe und ihres Products her.

26. Entgegengesetzte Größen kommen übrigens häufig bey Reihen vor. Wenn die Formel, welche das Glied einer Reihe darstellt, der Unterschied zweyer Größen ist, so würde man zwey Reihen haben, nachdem die eine oder die andere jener Größen die größere oder die kleinere ist. Allein man sieht, wegen der gleichen Form der Glieder, beyde Reihen nur als eine einzige an, welche durch das gemeinschaftliche Glied o verbunden werden. Wenn die Glieder in einer stetigen Folge, ohne Sprünge, gedacht werden, so kommt o nothwendig in der Reihe vor. Ist die Formel für die Glieder der Reihe selbst eine Reihe, die nach den Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet ist, es sey nun, daß die Anzahl der Glieder endlich oder unendlich ist, so muß man, um jene Reihe vollständig zu haben, für die veränderliche Größe sowohl negative als positive Werthe setzen, und diejenigen Theile der

Reihe

Reihe, welche negative Glieder enthalten, mit denen, welche aus positiven Gliedern bestehen, zusammennehmen. Die ganze Reihe der Werthe einer Gleichung kann solchergestalt aus mehrern Theilen, die abwechselnd positive und negative Glieder enthalten, zusammengesetzt seyn.

27. Man gebraucht für negative Größen bisweilen den Ausdruck, weniger oder kleiner als Nichts. Diese Redensart läßt sich bey den Gliedern einer Reihe, die durch beständige Verminderung Null und dann negativ werden, gut gebrauchen. So wie man ganz richtig sagt, $a - b$ ist kleiner als $a$, wenn $a > b$ ist, so sagt man auch analogisch richtig, $a - (a + b)$ ist kleiner als $a$, wenn gleich $-b$ der Quantität nach größer seyn kann als $a$. So ist auch beziehungsweise $-(a+b)$ kleiner als $-a$.

28. Wenn man auf diese Art die negativen Maxima in den Werthen einer Gleichung relativ als Minima betrachtet, so hat man den allgemeinen Satz, daß die Maxima und Minima in den Werthen der Gleichung mit einander abwechseln, die Minima mögen es nun absolut oder relativ seyn.

29. Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung sind, wenn sie theils positive, theils negative Wurzeln hat, zwey entgegengesetzte Größen, und zwar ganze Zahlen. Die positive Gränze ist größer, als die größte positive Wurzel, die negative größer als die größte negative Wurzel. Um aber diesen Fall als gleichartig mit demjenigen zu betrachten, da alle Wurzeln positiv sind, und die kleinere Gränze kleiner ist, als die kleinste positive Wurzel, sehe man eine negative Größe für kleiner an, als jede positive, und auch für kleiner als eine negative, die von ihr an absoluter Größe übertroffen wird. Solchergestalt ist in allen Fällen eine der Gränzen größer als jede Wurzel, die andere Gränze kleiner als jede Wurzel.

30.

30. Die Vorschriften für die gemeinen Operationen der Buchstabenrechnung gehören zwar zu den allererſten Lehren der Analyſis; es mag aber doch nicht überflüßig ſeyn, zu zeigen, daß ſie der Begriffe von entgegengeſetzten Größen gar nicht bedürfen. — Die Buchſtabenzeichen bedeuten in dem Folgenden bloß die abſolute Quantität.

I. $a+(b-c)=a+b-c$, für ſich klar.

II. $a-(b+c)=a-b-c$, gleichfalls.

III. $a-(b-c)=a-b+c$. Denn man ſetze $a-(b-c)=u$, ſo iſt $a=u+(b-c)=u+b-c$, folglich $a-b+c=u$.

IV. $a(b+c)=ab+ac$.

V. $a(b-c)=ab-ac$.

VI. $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

VII. $(a+b)(c-d)=a(c-d)+b(c-d)=ac-ad+bc-bd$.

VIII. $(a-b)(c-d)=a(c-d)-b(c-d)=ac-ad-(bc-bd)=ac-ad-bc+bd$.

Es wird hier vorausgeſetzt, daß der Subtrahendus kleiner iſt, als die Größe, von welcher der Abzug geſchieht, oder, daß der Subtrahendus den Theil, nicht das Ganze bedeutet. Wenn der Subtrahendus größer iſt, ſo iſt es ein anderer Fall, als derjenige, auf welchen die Rechnung angelegt iſt. Jeder Quotient iſt daher urſprünglich poſitiv. Aendert aber der Dividendus oder der Diviſor in einem Falle das Vorzeichen, ſo muß es der Quotient auch ändern, weil aus VII und VIII erhellet, daß ein Product aus zwey Factoren das Zeichen

— ete.

— erhält, wenn die Factoren verschiedne Zeichen haben; aber das Zeichen + wenn beyde Factoren das Zeichen — vor sich haben. Aendern beyde, Dividendus und Divisor das Vorzeichen, so bleibt das Vorzeichen des Quotienten, damit das Product aus demselben in den negativen Divisor das Vorzeichen — erhalte.

31. Es erhellet hieraus, daß eine Veränderung der Vorzeichen, die in den anfänglichen Gleichungen für die Verbindung mehrerer Größen, bey einer dieser Größen durchgehends vorgenommen wird, sich durch die ganze Rechnung erstreckt. Geschieht die Veränderung bey zwey Größen, so behält das Product derselben sein Zeichen; geschieht sie bey drey Größen, so ändert das Produkt aller drey sein Vorzeichen; bey vier Größen aber ändert es sich nicht u. s. f.

32. Das Quadrat und jede gerade Potenz einer Größe hat daher immer das Zeichen + vor sich. Bekommt es das Zeichen —, so zeigt dieses an, daß bey der Verbindung von Größen, zu welcher sie gehört, Bedingungen vorhanden sind, welche nicht gestatten, die Größen, von welchen jene abhängt, ganz willkührlich anzunehmen. Z. B. wenn $x+y=a$ und $xy=b$ seyn soll, so ist die Bedingung dabey, daß b kleiner als $\frac{1}{4}aa$ sey. Oder, wenn $x+y=a$ und $x^3+y^3=b$, so ist dabey die Bedingung, daß $4b$ größer als $a^3$ sey.

33. Die unmöglichen Größen sind eigentlich nur Zeichen eines Widerspruchs in den individuellen Bedingungen einer Aufgabe. Man behandelt sie als wahre Größen, um den algebraischen Sätzen die völligste Allgemeinheit zu geben. Aus den unmöglichen Größen entstehen mögliche da, wo in der allgemeinen Rechnung keine irrationale Größen bleiben.

34. Der Logarithme einer verneinten Zahl iſt einerley mit dem Logarithmen derſelben als poſitiv betrachtet; denn die Verneinung bezieht ſich bloß auf den bey der Rechnung zum Grunde gelegten Fall, der durch Veränderung der Vorzeichen in einen andern ähnlichen verwandelt wird. Wenn dieſer andere verwandte Fall der Rechnung untergelegt wird, ſo wird die verneinte Größe poſitiv. Die Sache hat gar keine Schwierigkeit, wenn der Logarithme nur Hülfsmittel der numeriſchen Rechnung iſt. Iſt der Logarithme aber ſelbſt eine Größe, die in einer Verbindung mit andern vorkommt, ſo möchte die Möglichkeit deſſelben auf der Möglichkeit der Zahl, deren Verhältniß zur Einheit er angiebt, ankommen. Der log $-xx$ iſt unmöglich; der log $-x$ aber möglich, es müßte denn gezeigt werden, daß irgend eine Bedingung nicht erlaubte, $x$ negativ zu nehmen.

## VI.

## Auszüge und Recenſionen neuer Bücher.

### 1. Glenie's Conſtructionen verſchiedner geometriſcher Aufgaben.

(Fortſetzung der Nachricht von Glenie's Antecedental-Calcul, Heft 3. S. 352-356.

17. Herr Glenie fügt ſeinem Antecedental-Calcul noch Conſtructionen bey, wie er ſich ausdrückt, *of problems in Solid Geometry, by common or plane Geometry:* Aufgaben des dritten Grades durch Verzeichnungen des zweyten Grades aufgelöſt.

18. Die erſte derſelben iſt folgende: „Ueber einer gegebenen geraden Linie ein ebenes Dreyeck zu verzeichnen, von deſſen

„deſſen beyden andern Seiten die Würfel zuſammen ſo viel be„tragen, als der Würfel der gegebenen Grundlinie.“ Folgendes iſt ſeine Conſtruction:

BC ſey die gegebene gerade Linie. Man halbire ſie in G, und ſetze da auf ſie ein unbegränztes Perpendikel. Auf demſelben nehme man $GH = BC\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{31}}$, und beſchreibe um das Dreyeck BHC, den Kreis BHCR. Dann nehme man $GF = BC\frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$, und ziehe mit BC durch F eine Parallele, welche den Kreis in A ſchneidet. Dahin gerade Linien BA, CA gezogen, machen mit der gegebenen Grundlinie das verlangte Dreyeck.

II. Aufgabe. „Ueber der gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu machen, da die Summe der Würfel der beyden „andern Seiten ſoviel beträgt, als zweymahl der Würfel der „Grundlinie.“

III. Aufgabe. „Ueber der gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu machen, da die Summe der Würfel der beyden „andern Seiten dreymahl ſo viel beträgt, als der Würfel der „Grundlinie.“

20. Für jede dieſer beyden Aufgaben giebt Hr. Gl. auch eine Verzeichnung durch einen Kreis, den eine Parallele mit BC ſchneidet. Ich gehe, ſagt er, mit gleicher Leichtigkeit ſo ohne Ende fort.

Jede ſolche Aufgabe läßt ſich, vermittelſt der ebenen Geometrie, auf mannichfaltige Art verzeichnen, und zwiſchen jedem Paare derſelben läßt ſich eine unbeſtimmte Anzahl andrer verzeichnen. Z. E. zwiſchen der erſten und zweyten: „Ein Drey„eck, wo die Summe der Würfel der beyden Seiten, zu der „Grundlinie ihrem, eine gegebene Verhältniß zwoer gleichar„tigen Größen A : B hat, nur daß ſolche zwiſchen die Verhält„niſſe 2 : 1 und 3 : 1 fällt.“

21. Solche Ausdrückungen, wie $BC\frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$ zu nehmen, erleichtert ſehr ein Aufſatz von mir, über die Theilung gerader Linien, Flächen, Körper, in den *Philoſ. Tranſact. Vol.* 66.

IV. Aufg. „Ueber einer gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu beschreiben, so, daß der Würfel einer der beyden „übrigen Seiten, den Würfel der andern, um den Würfel der „Grundlinie übertrifft.

V. Aufg. „Ueber... zu beschreiben, so, daß der Würfel „einer der beyden Seiten, den Würfel der andern, um das Dop„pelte des Würfels der Grundlinie übertrifft.“.

VI. Aufg. „Ueber .... um das Dreyfache des Würfels „der Grundlinie übertrifft.“

23. Gleich leicht, sagt Hr. Gl., würde ich ohne Ende fortgehen, solche Aufgaben durch ebene Geometrie zu verzeichnen, hätte ich nur Zeit genug dazu. Seit vier Jahren bin ich im Besitz geometrischer Grundlehren, dadurch sich Millionen derselben verzeichnen lassen..... Dies ist ein geometrisches Feld, in welches weder Alte noch Neuere scheinen geblickt zu haben, unbegränzt und voll unzählbarer Mannichfaltigkeit; reine Geometrie läßt sich dadurch unendlich mehr erweitern, als durch alles, was Sir Isaac Newton u. a. scharfsinnige Männer, über krumme Linien von unterschiedenen Ordnungen geschrieben haben.

Noch einen Begriff zu geben, wie weit sich dieses erstrekket, fügt er folgende beyden Aufgaben zum Beschlusse bey:

„Ueber einer gegebenen Grundlinie ein Dreyeck zu ma„chen I) daß die Summe der Würfel der beyden andern Sei„ten, zur Grundlinie ihrem, eine gegebne Verhältniß A : B „hat, nur daß 4 A größer ist als B.“

II) „Daß der Ueberschuß des Würfels der einen Seite „über der andern ihren, zum Würfel der Grundlinie, eine „gegebene Verhältniß hat.“

24. Hiemit endigt Hr. Gl. seine Schrift. Von dem Wege, auf diesem, allen Geometern noch ganz unbemerkten Felde fortzukommen, sagt er nicht das geringste, die Constructionen ganz ohne Beweis, ausgenommen, davon ich eine angeführt habe. Seine hie (21) beygebrachte Erläuterung erinnerte mich daher an eine Geschichte, die in meiner Jugend erzählt ward. Ein Rathsherr sollte im Namen des Corporis einen Bericht an den Regenten abfassen. Ich will es ihm dictiren, sagte der Bürgermeister, der wegen seiner wahren und großen Verdienste bekannt war, aber auch wegen seiner Originalität. Schreibe er: Allerdurchlauchtigster, Großmächtigster, Allergnädigster König und Herr.... Das übrige wird er schon selbst wissen.

„deſſen beyden andern Seiten die Würfel zuſammen ſo viel be„tragen, als der Würfel der gegebenen Grundlinie.“ Folgendes iſt ſeine Conſtruction:

BC ſey die gegebene gerade Linie. Man halbire ſie in G, und ſetze da auf ſie ein unbegränztes Perpendikel. Auf demſelben nehme man $GH = BC\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{31}}$, und beſchreibe um das Dreyeck BHC, den Kreis BHCR. Dann nehme man $GF = BC\frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$, und ziehe mit BC durch F eine Parallele, welche den Kreis in A ſchneidet. Dahin gerade Linien BA, CA gezogen, machen mit der gegebenen Grundlinie das verlangte Dreyeck.

II. Aufgabe. „Ueber der gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu machen, da die Summe der Würfel der beyden „andern Seiten ſoviel beträgt, als zweymahl der Würfel der „Grundlinie.“

III. Aufgabe. „Ueber der gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu machen, da die Summe der Würfel der beyden „andern Seiten dreymahl ſo viel beträgt, als der Würfel der „Grundlinie.“

20. Für jede dieſer beyden Aufgaben giebt Hr. Gl. auch eine Verzeichnung durch einen Kreis, den eine Parallele mit BC ſchneidet. Ich gehe, ſagt er, mit gleicher Leichtigkeit ſo ohne Ende fort.

Jede ſolche Aufgabe läßt ſich, vermittelſt der ebenen Geometrie, auf mannichfaltige Art verzeichnen, und zwiſchen jedem Paare derſelben läßt ſich eine unbeſtimmte Anzahl andrer verzeichnen. Z. E. zwiſchen der erſten und zweyten: „Ein Drey„eck, wo die Summe der Würfel der beyden Seiten, zu der „Grundlinie ihrem, eine gegebene Verhältniß zweyer gleichar„tigen Größen A : B hat, nur daß ſolche zwiſchen die Verhält„niſſe 2 : 1 und 3 : 1 fällt.“

21. Solche Ausdrückungen, wie $BC\frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$ zu nehmen, erleichtert ſehr ein Aufſatz von mir, über die Theilung gerader Linien, Flächen, Körper, in den *Philoſ. Tranſact. Vol.* 66.

IV. Aufg. „Ueber einer gegebenen Grundlinie ein „Dreyeck zu beſchreiben, ſo, daß der Würfel einer der beyden „übrigen Seiten, den Würfel der andern, um den Würfel der „Grundlinie übertrifft.

V. Aufg. „Ueber... zu beſchreiben, ſo, daß der Würfel „einer der beyden Seiten, den Würfel der andern, um das Dop„pelte des Würfels der Grundlinie übertrifft.“.

VI. Aufg. „Ueber .... um das Dreyfache des Würfels „der Grundlinie übertrifft.“

23. Gleich leicht, ſagt Hr. Gl., würde ich ohne Ende fortgehen, ſolche Aufgaben durch ebene Geometrie zu verzeichnen, hätte ich nur Zeit genug dazu. Seit vier Jahren bin ich im Beſitz geometriſcher Grundlehren, dadurch ſich Millionen derſelben verzeichnen laſſen..... Dies iſt ein geometriſches Feld, in welches weder Alte noch Neuere ſcheinen geblickt zu haben, unbegränzt und voll unzählbarer Mannichfaltigkeit; reine Geometrie läßt ſich dadurch unendlich mehr erweitern, als durch alles, was Sir Iſaac Newton u. a. ſcharfſinnige Männer, über krumme Linien von unterſchiedenen Ordnungen geſchrieben haben.

Noch einen Begriff zu geben, wie weit ſich dieſes erſtrekket, fügt er folgende beyden Aufgaben zum Beſchluſſe bey:

„Ueber einer gegebenen Grundlinie ein Dreyeck zu ma„chen I) daß die Summe der Würfel der beyden andern Sei„ten, zur Grundlinie ihrem, eine gegebne Verhältniß A: B „hat, nur daß 4 A größer iſt als B.“

II) „Daß der Ueberſchuß des Würfels der einen Seite „über der andern ihren, zum Würfel der Grundlinie, eine „gegebene Verhältniß hat.“

24. Hiemit endigt Hr. Gl. ſeine Schrift. Von dem Wege, auf dieſem, allen Geometern noch ganz unbemerkten Felde fortzukommen, ſagt er nicht das geringſte, die Conſtructionen ganz ohne Beweis, ausgenommen, davon ich eine angeführt habe. Seine hie (21) beygebrachte Erläuterung erinnert mich daher an eine Geſchichte, die in meiner Jugend erzählt ward. Ein Rathsherr ſollte im Namen des Corporis einen Bericht an den Regenten abfaſſen. Ich will es ihm dictiren, ſagte der Bürgermeiſter, der wegen ſeiner wahren und großen Verdienſte bekannt war, aber auch wegen ſeiner Originalität. Schreibe er: Allerdurchlauchtigſter, Großmächtigſter, Allergnädigſter König und Herr.... Das übrige wird er ſchon ſelbſt wiſſen.

25. Ob dieſes ganz neue geometriſche Feld auch eßbare Früchte trage, davon erwähnt Hr. Gl. nichts. Eher ſcheint es nur Blumen zu zeigen, daran ſich die Augen des Verſtandes weiden. Und da müßte doch einige Anleitung vorhanden ſeyn, ſolche Blumen zu ziehen und zu brechen, etwas von der Analyſis ſolcher Aufgaben, die eigentlich den Verſtand ergötzen, nicht eine Conſtruction, deren Grund ihm im geringſten nicht gewieſen wird, nicht einmal dargethan, daß ſie das leiſtet, was ſie leiſten ſoll.

26. Das letzte bey der Conſtruction, die ich in (18) beygebracht habe, doch einigermaßen zu prüfen, habe ich mich ſo verhalten:

Es ſey $BC = a$, das ich auch $= 1$ ſetzen werde, $GH = m.a$; alſo $GR = \frac{a}{4m}$; des Kreiſes Durchmeſſer $HR = \frac{4m^2+1}{4m}.a$; der Halbmeſſer halb ſo groß.

27. Der Winkel im Abſchnitte, $BAC = \alpha$, iſt die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte, der BC zur Sehne hat, alſo $\sin\alpha = \frac{4.m}{4m^2+1}$; $\cos\alpha = \frac{4m^2-1}{4m^2+1}$; $\cot\alpha = \frac{4m^2-1}{4m}$

28. Nun ſey $GF = n.a$; welches des Punctes A Höhe über BC iſt. Stellt man ſich das gleiche Perpendikel von A auf BC vor, das der BC in einem Punkt begegne, welcher von G um x nach C zu liegt, ſo theilt es BAC in zween Winkel, einen $\frac{1}{2}\alpha + \epsilon$, deſſen Tangente $= \frac{\frac{1}{2}+x}{n}$;

den andern $\frac{1}{2}\alpha - \epsilon$, deſſen Tangente $= \frac{\frac{1}{2}-x}{n}$

$$\text{Es iſt } \frac{\frac{\frac{1}{2}+x}{n} + \frac{\frac{1}{2}-x}{n}}{1 - \frac{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}{n^2}} = \text{tang } \alpha.$$

Daraus $\frac{1}{4} - n^2 + n.\cot\alpha = x^2$.

29. Auch $BA = c = n.\ \mathrm{sec}\left(\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon\right)$

$$CA = b = n.\ \mathrm{sec}\left(\frac{1}{2}\alpha - \varepsilon\right).$$

30. Nun für die (18) angenommene Zahlen

$$m = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{31}};\quad n = \frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$$

Ich finde $\log m = 0{,}7798954 - 1$
$\log n = 0{,}7149546 - 1$
alſo $m = 0{,}60241$; $n = 0{,}51874$.

31. Ferner $\frac{4m^2+1}{4m} = \frac{38}{3\cdot\sqrt{155}}$
davon der Logarithme $= 0{,}0074965$
und der Hälfte Logarithme $= 0{,}7064665 - 1$;

Sind des Durchmeſſers HR, und ſeiner Hälfte Logarithmen für $a = 1$. Die Linien ſelbſt $= 1{,}0174$ und $0{,}30870$.

32. Ferner $10 - \log\frac{4m}{4m^2+1} = 9{,}9925035$ giebt (27) $\alpha = 79°\,23'\,5''$; Auch iſt (27) $\cot\alpha = \frac{7}{3\sqrt{155}}$.

33. Alſo $\log\cot\alpha = 0{,}2728109 - 1$
$\log n = 0{,}7149546 - 1$
$\log(n.\cot\alpha) = 0{,}9877655 - 2$
auch $2\log n = 0{,}4299092 - 1$.

So kömmt für (28)

$\frac{1}{4} = 0{,}25$
$n.\cot\alpha = 0{,}097222$
$0{,}347222$
$-n^2 = -0{,}26909$
$x^2 = 0{,}078132$
$\log 0{,}078132 = 0{,}8928289 - 2$
Halb $= 0{,}4464144 - 1$
giebt $x = 0{,}2792$.

Solchergeſtalt

$$10 + \log\left(\frac{1}{2} + x\right) = 9,8918273$$
$$- \log n = - 0,7149576 + 1$$
$$\log \text{tang}\left(\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon\right) = 10,1768697$$

Alſo $\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon = 56° 21' 26''$

Daher $\frac{1}{2}\alpha - \varepsilon = 23\ \ 1\ 39$

34. Nun $10 + \log n = 9,7149546$
$- \log \cos\left(\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon\right) = - 9,7435201$

$\log b = 0,9714345 - 1$
dreymahl $= 0,9143035 - 1$

$10 + \log n - \log \cos\left(\frac{1}{2}\alpha - \varepsilon\right) = \log c = 0,7510171 - 1$

Dreymahl $= 0,2530513 - 1$

Daher $b = 0,93634$; $c = 0,56366$;
$b^3 = 0,82092$; $c^3 = 0,17908$;
davon die Summe $= 1$, wie gehörig.

35. Dieſe Rechnung iſt nur Prüfung, nicht Beweis, denn ſie giebt, vermittelſt der Logarithmen, alles nur beynahe wahr. Indeſſen trifft ſie doch, bey ſo vielen Zwiſchenrechnungen, ſo genau mit dem zu, was Gl. Conſtruction verſpricht.

36. Die II. und III. Aufgabe (19) haben eben ſolche Figuren, wie ich hier für die erſte gezeichnet habe, nur andere Verhältniſſe der Linien. Die Buchſtaben, deren ich mich (26) bedient habe, ſetzen mich in Stand, was jeder eigen iſt, kurz darzuſtellen. Allemahl wird die gerade Linie BC in G, durch ein Perpendikel $GH = m.\ BC$ halbirt, ein Kreis durch B, H, C, beſchrieben, den eine Parallele mit BC im Abſtande $GF = n.\ BC$ gezogen, in A ſchneidet, ſo ſind BA, AC, die geſuchten Seiten, und es ſind

| Aufg. | m | n |
|---|---|---|
| I. | $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{31}}$ | $\frac{\sqrt{(5.31)}}{24}$ |
| II. | $\sqrt{\left(\frac{15}{11}\right)}$ | $\frac{4}{9}\sqrt{\left(\frac{11}{15}\right)}$ |
| III. | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

37. Von der 4; 5; 6; Aufgabe (22) giebt Hr. Gl. die Auflöſungen mit zugehöriger Figur. Ich bringe ſolche hie bey, damit man alles hie habe, was er über dieſen Gegenſtand lehret.

B C iſt die gegebene Grundlinie, in G halbirt.

IV. Aufg. Man nehme $GE = BC.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{31}{3}}$; und in einem durch E gezogenen Perpendikel $ED = BC\frac{\sqrt{19}}{8}$

V. Man nehme $GF : GE = \sqrt{63} : \sqrt{31}$;
das Perpendikel, $FL : ED = \sqrt{51} : \sqrt{19}$.

VI. Man nehme $GH : GE = \sqrt{95} : \sqrt{31}$;
das Perpendikel $HK : ED = \sqrt{83} : \sqrt{19}$.

So ſind D, L, K, die Scheitel der geſuchten Dreyecke.

38. Daß höhere Gleichungen ſich unter gewiſſen Bedingungen erniedrigen laſſen, iſt nicht unbekannt. Die Conſtruction cubiſcher Gleichungen durch Kreis und Parabel, iſt davon ein Beyſpiel. Ein Zuwachs für die Analyſis wäre es alſo immer, die Bedingungen zu entdecken, unter welchen eine Gleichung zwiſchen den Würfeln der drey Seiten, einen Grad niedriger wird. Uebrigens zeigt ſich wenigſtens in den Beyſpielen, die Hr. Gl. beybringt, nichts, das berechtigte, dieſen Zuwachs mit der Unterſuchung der krummen Linien, wie er zu thun ſcheinet, zu vergleichen. Die Geſtalten der krummen Linien ergötzen den Verſtand durch Erforſchung ihrer unendlichen Mannichfaltigkeit; viele von ihnen laſſen ſich auf mathematiſche Phyſik und nützliche Künſte anwenden. Man ſieht nichts dergleichen in Hr. Gl. Conſtructionen. Nur einen neuen Theil zu *Jacob de Billy* Par. 1660 erſchienenem Buche: Diophantus Geometra.

A. G. Käſtner.

2. Della Specola aſtronomica de' regj ſtudj di Palermo. Libri quattro, di *Giuſeppe Piazzi.*

(Fortſetzung der Recenſ. S. 357–369).

Im zweyten Buche beſchreibt Hr. P. die Inſtrumente. Sie ſind weder groß noch zahlreich, das vorzüglichſte iſt der ganze Kreis von Ramsden, den er zweymahl angefangen, und eben ſo oft wieder zurückgelegt hatte. Im Jänner 1788 nahm er ihn auf dringendes Bitten des anweſenden Verfaſſers aufs neue vor, und brachte ihn endlich im Auguſt 1789 glücklich zu Stande. Von dieſem Hauptwerkzeuge giebt nun Hr. P. eine ſehr deutliche und vollſtändige Beſchreibung mit Abbildungen. Von den übrigen bekannten Inſtrumenten führt er bloß ihre Beſtimmungen, Würkungen und Maße an. Von dem ganzen Kreiſe wollen wir, ſo viel es ſich ohne Kupfer thun läßt, einen klaren Begriff geben. Das ganze Inſtrument beſtehet vorzüglich aus einem Horizontal- oder Azimuthalkreis, und einem Vertical- oder Höhenkreis; der letztere iſt zwiſchen vier ſenkrechten metallnen Säulen an einer Axe aufgehängt, die ſamt dieſen Kreis ſich um den Mittelpunkt des Azimuthal- oder horizontal liegenden Kreiſes herum bewegen laſſen. Dieſe vier Säulen, welche 6 Fuß 6 Zoll Höhe, und 3, 6 Zoll im Durchmeſſer haben, ſtehen auf einer viereckigten, dicken, 2 Fuß 1, 3 Zoll langen, und 1 Fuß 4, 8 Zoll breiten Platte von Prinzmetall; eine ähnliche Platte hält ſie oben zuſammen, nur mit dem Unterſchiede, daß die obere etwas in der Mitte ausgeſchnitten iſt, um ungehindert nach dem Zenith ſehen zu können. Zwiſchen dieſe zwey Platten und den vier Säulen iſt der eigentliche Stand des Höhenkreiſes; die untere Platte mit ihren darauf ſtehenden Säulen und Höhenkreis ſitzt auf der größern Grundfläche eines abgekürzten Kegels, 14, 2 Zolle im Durchmeſſer. Die untere Fläche dieſes Kegels hält nur 5 Zoll im Durchmeſſer, und an dieſe letztere iſt der Azimuthalkreis, mittelſt zehn Speichen, befeſtiget. Dieſer Kreis hat 3 Fuß im Durchmeſſer, iſt von 180° zu 180°, und jeder Grad von 10 zu 10 Minuten abgetheilt. Dieſer ganze nun beſchriebene Apparat bildet die Verticalaxe des Inſtruments, die zugleich Axe des Azimuthalkreiſes iſt. Der untere Pol dieſer Axe, worauf ſich das ganze Inſtrument drehet, iſt unter dem Mittelpunkt des Azimuthalkreiſes befindlich, und endiget ſich in eine Spitze von gehärtetem

tem Stahl, die ſich in einer metallnen Pfanne dreht. Um aber ſowohl die erforderlichen Stellungen zu Berichtigung dieſer Axe, als auch eine ſanfte und leichte Kreisbewegung des Inſtruments hervorzubringen, ſo iſt dieſe untere Pfanne erſtlich auf einem eiſernen horizontal liegenden Kreiſe oder Reif von ungefähr 3 Fuß Durchmeſſer im Mittelpunkt befeſtiget. Auf dieſem erſten Kreis, der in das ſteinerne Poſtament mit Bley eingegoſſen iſt, ſind in gleicher Entfernung auf dem äußern Rande drey Friktionsrollen befindlich, auf welchen ſich ein zweyter ähnlicher Kreis oder Reifen herum bewegt, den man nach einer Richtung, z. B. von Morgen nach Abend, mittelſt Stellſchrauben, juſtiren kann. Dieſer zweyte Reif hat eben wieder ſolche Friktionsrollen wie der erſte, und ein dritter Kreis, der eine Juſtirung von Mittag nach Mitternacht hat, dreht ſich auf dieſem herum. Dadurch wird nicht nur die Stellung der Axe zu rechten Winkeln, ſondern auch, vermittelſt der untern liegenden Friktionsrollen, die leichte, ſanfte, und ſtäte horizontale Kreisbewegung der ganzen Maſchine bewirkt. Auf dem letzten eiſernen Kreiſe iſt einer von Mahagonyholz, 3 Fuß 2 Zoll im Durchmeſſer, und 3 Zoll Höhe befeſtiget, auf welchem eine meßingene Balluſtrade ſteht, die zwanzig meßingene 1 Fuß 2 Zoll hohe, und 1 Zoll dicke, im Kreiſe herumgeſtellte Säulchen bilden, die unten und oben von zwey meßingenen Reifen zuſammengehalten werden, und welche nicht nur den Azimuthalkreis, wenn man um das Inſtrument herumgehet, vor Zufällen ſchützt, ſondern vorzüglich auch dazu dient, um es da anzufaſſen, wenn man das Inſtrument im Horizonte herumdrehen, und auf irgend ein Azimuth ſtellen will; auch dient es noch, um das mikroſkopiſche Mikrometer für den Azimuthalkreis darauf zu ſetzen, welcher ſehr vortheilhaft zwiſchen zwey Säulchen des Geländers angebracht wird. Noch bleibt zu erklären übrig, wie der obere Pol befeſtiget iſt, welches auf folgende Art geleiſtet wird: An der obern Platte, die an die Kapitäle der vier erwähnten Säulen feſtgemacht und ausgeſchnitten iſt, iſt in der Mitte ein Ring befeſtigt, der $1\frac{1}{2}$ Zoll über die Platte hinaus reicht, und gleichſam eine Röhre bildet, auf deſſen Winkel der Gegenpol der vertikalen Axe trifft. Vier ebenfalls meßingene Säulen, 7 Fuß hoch und 4 Zoll dick, ſind zu rechten Winkeln um das Inſtrument geſtellt, unten mit Bley in Stein eingegoſſen, oben tragen ſie vier Bögen übers Kreutz geſpannt, die in der Mitte mittelſt eines Ringes verbunden ſind. In dieſen Ring paſt nun jener, der an der

Platte feſt ſitzt, ſehr genau, iſt ſo zu ſagen in dieſem eingerieben, und bewegt ſich in demſelben ſanfte, wenn das ganze Inſtrument auf ſeinem unterſten Pol im Kreis herumgedreht wird; oben am Ringe angebrachte Federn machen dieſe Bewegung ſehr leicht, ohne alles Reiben, Schlottern und Stocken.

Der Vertikal- oder Höhenkreis iſt eigentlich das vorzüglichſte und weſentlichſte Stück am ganzen Inſtrumente. Seine vornehmſten Theile ſind: ſeine Axe, die erſtlich aus einem Zylinder, als Mittel- oder Kernſtück beſtehet, woran zu beyden Seiten, wie bey einem Mittagsfernrohr, zwey abgekürzte Kegel befeſtigt ſind, die ſich in wohlpolirte ſtählerne Zapfen (Tourillons) endigen, und die Pole dieſer Horizontalaxe ausmachen; das Fernrohr, das durch den Mittelpunkt des erſtbenannten Zylinders geht; acht Speichen, die um den Zylinder herum befeſtigt ſind, und die an ihren Enden zwey meßingene Kreiſe tragen, davon einer zur Beſeſtigung, Symmetrie und Gleichheit des Gewichts iſt, der zweyte aber die Theilungen oder den Gradbogen trägt. Dieſe Axe ruht zwiſchen den vier Säulen, auf vier Stützen; zwey davon, die äußerſten, ſind die Pfannen ſelbſt, worin die ſtählernen Zapfen der Axe laufen. Dieſe Pfannen liegen auf Streben, die zwiſchen zwey Säulen angebracht und an dieſelben angeſchraubt ſind; die Pfannen (coüssinets) ſind wie bey einem Mittagsfernrohre prismatiſch und von chineſiſchen Kryſtal. Da aber der Kreis mit ſeiner ganzen Laſt von viel zu beträchtlichem Gewichte für die Pfanne allein wäre, ſo ſind noch zu deſſen Erleichterung zwey Stützen angebracht, zwey kleine Säulen nämlich, die von der untern viereckigten Platte zu beyden Seiten des Kreiſes, bis an die Kegel, die die Axe bilden, heranreichen, und ſie unterſtützen helfen. Damit aber die Kreisbewegung auf den Pfannen dennoch ungehindert geſchehen könne, ſo liegt dieſer Theil der Axe des Höhenkreiſes wieder auf Friktionsrollen, die an den beyden Säulen angebracht ſind, und die man nach Gefallen heben oder ſenken kann, ſo, daß nur ein beliebiger Theil des Gewichts den Pfannen überlaſſen werden kann. Uebrigens kann man, vermittelſt Zwingen und Auslöſungen, dem Inſtrument nach Erforderniß eine ſchnelle und auch eine langſame Bewegung mittheilen.

Das

Das oberwähnte in der Balluſtrade angebrachte mikroſkopiſche Mikrometer, iſt ein aus zwey Gläſern zuſammengeſetztes Mikroſkop, in deſſen Brennpunkte ein Fadenmikrometer mit einem beweglichen und einem unbeweglichen Faden befindlich iſt. Der bewegliche Faden, oder vielmehr der Läufer, iſt mittelſt einer Uhrkette, die über ein geſpanntes Federgehäus, wie bey einer Taſchenuhr, gezogen iſt, befeſtiget, welches die Kette, den beweglichen Läufer mit ſeinem Faden, folglich die Mikrometerſchraube an ihr Mütterchen immer ſtraf anziehet, und dadurch den todten Gang, beym Vor- und Rückdrehen der Mikrometerſchraube aufhebt. (Einen deutlichen Begriff von dieſem ſchönen Mechanismus kann man aus dem I. Supplem. Band zu den Aſtronom. Jahrbüchern, S. 190 erhalten, wo auch eine Abbildung befindlich iſt.) Der Schraubenkopf trägt ein Theilſcheibchen von 60 Eintheilungen mit einem Stellzeiger, jede Theilung beträgt eine Sekunde auf dem Kreis; die Umgänge der Schrauben ſind im Mikroſcop ſelbſt auf einer Skale ſichtbar. Dieſer Mikrometer hat übrigens vier Adjuſtierſtellungen, und unter dem Objektiv einen Illuminateur, um die Theilungen des Kreiſes zu beleuchten. Zwey ähnliche Mikrometer ſind zwiſchen zwey Säulen, der eine oben, der andre unten, diametral ſo angebracht, daß ſie mit ihren Fäden auf die Theilungen des Höhenkreiſes treffen, und die kleinern Theile bis auf die Sekunde beſtimmen. Das Senkbley hängt neben dieſen Mikrometern, in einem hölzernen Behältniß (Garde-filet) und der Faden dieſes Pendels geht durch die Brennpunkte zweyer kleinen, unten und oben beſonders angebrachten Mikroſkope. Das Fernrohr, achromatiſch mit doppeltem Objectiv, hat 5 Fuß Focallänge und 3 Zoll Oefnung. Es iſt gut, aber nicht eines von den beſten, die aus Ramsden's Werkſtätte gekommen ſind. Dazu gehören ſechs Oculare von 50 bis 170maliger Vergrößerung, von denen eines prismatiſch iſt, um bequem damit im Zenith beobachten zu können, weil man immer die ſenkrechte Stellung des Körpers beybehalten kann. Im Brennpunkte dieſes Fernrohrs ſind zwey Fäden eingezogen, die ſich zu rechten Winkeln kreuzen; ihre Beleuchtung des Nachts geſchieht durch die Axe, gerade auf dieſelbe Art, wie ſie in dem Berliner Jahrbuch 1793. S. 143 beſchrieben iſt. Recenſent übergeht die kleinern Theile, die ohne Zeichnung nicht verſtändlich zu machen ſind, ſo wie alle die Berichtigungen, die vorgenommen werden müſſen, bevor das Inſtrument in dem beobachtungsfähigen Zuſtand geſetzt wird.

Haupt-

Hauptberichtigungen ſind ſechs. 1°. Berichtigung der Vertikalaxe. 2°. Der Horizontalaxe. 3°. Optiſche Berichtigung der mikroſkopiſchen Mikrometer. 4°. Der Mikrometer. und ihrer Zeiger bey beyden Kreiſen und des Senkbley's. 5°. Der Kollimazionslinie, in Betracht der Horizontalaxe. 6°. Derſelben, in Betracht der Vertikalaxe. So mannichfaltig und verſchieden die Quellen der Irrthümer bey einem ſolchen Inſtrumente ſeyn können, ſo ſchätzt ſie Hr. P., wenn alle Berichtigungen mit gehöriger Sorgfalt gemacht worden, bey den aller ungünſtigſten Umſtänden, wenn ſie alle auf eine Seite zuſammentreffen, dennoch nicht höher als auf drey Raumſecunden. Der Herr Verfaſſer zählt bey dieſer Gelegenheit die Vortheile auf, die den ganzen Kreiſen, über alle andere in der praktiſchen Aſtronomie bisher üblich geweſenen Inſtrumenten, den Vorzug geben: 1°. ſagt er, bleiben die Eintheilungen des Gradbogens, dieſer ſo weſentliche Theil, ganz unberührt, kein Vernier, keine Alhidade oder ſonſtiges Stück Meſſing, läuft und ſchleift längſt dieſes Gradbogens, wie bey einem Quadranten, drückt, reibt, oder ſcheuert ihn. 2°. Die Theilungen und Unterabtheilungen werden nicht auf dem Gradbogen ſelbſt, ſondern im Felde der Mikroſkope, wo ſich ihr anſehnlich vergrößertes Bild zeigt, abgeleſen und abgemeſſen. 3°. Quadranten ſind bekanntlich Unvollkommenheiten in der Fläche ihrer Gradbögen, in dem Centro, um welche ſich ihre Fernröhre bewegen, und in den Theilungen des Gradbogens ſelbſt unterworfen, die um ſo gefährlicher ſind, je ſchwerer man ſie entdecken kann; davon iſt nichts bey ganzen Kreiſen zu befürchten, die ſich um dieſelben Axen bewegen, auf welchen ſie ſelbſt abgedrehet und auch eingetheilt worden ſind. 4°. Beym ganzen Kreiſe iſt nicht, wie beſonders bey Mauerquadranten wenn ſie von Süden nach Oſten verwendet werden, eine Beugung der Theile zu befürchten, da er, vermöge ſeiner Bauart, nicht der Gefahr unterworfen, daß er ſeine Figur ändert. 5°. Die Theilungsfehler laſſen ſich in einem ganzen Kreiſe ſogleich entdecken; man darf den Kreis nur eine halbe Umdrehung machen laſſen, und dieſelbe Theilung wieder leſen, und der Fehler offenbaret ſich ſogleich. 6°. Man kann ganze Kreiſe mit derſelben Genauigkeit und Schärfe, wie ein Mittagsfernrohr in die Mittagsfläche bringen. 7°. Man kann in einem und demſelben Augenblicke Höhe und Azimuth, folglich den Ort jedes himmliſchen Gegenſtandes auch außer der Mittagsfläche beſtimmen. 8°. Zu allen Stunden des Tages oder der

Nacht

Nacht kann man die Wirkung der Strahlenbrechung in jeder beliebigen Höhe beſtimmen, wenn man blos Höhe und Azimuth eines Geſtirns beobachtet, deſſen Abweichung genau bekannt iſt. Hr. P. hat von dieſer letzten Art ſchon eine Menge Beobachtungen gemacht, die ihn aber bisher noch nicht ganz befriedigt haben. Unter dieſen acht aufgezählten Vortheilen vermiſt Recenſent dennoch einen, der ſeines Erachtens, mit unter die weſentlichſten zu rechnen iſt, und darinn beſtehet, daß der Beobachter am ganzen Kreiſe eine gemachte Beobachtung, ſo oft es ihm beliebt, wieder von vorn meſſen, und aus mehrern wiederholten Meſſungen das Mittel nehmen kann; ein Vortheil, der bey Quadranten nicht angehet, weil bey dieſen das äußere Mikrometer an dem Fernrohre ſelbſt angebracht iſt. Denn, ſo wie man damit die Unterabtheilungen durch die Umgänge der Mikrometerſchraube mißt, ſo verſtellt ſolche zugleich das Fernrohr, und der Beobachter kann folglich dieſelbe Meſſung nicht mehr wiederholen. Dabey hat auch die Mikrometerſchraube nicht nur die Meſſung allein zu verrichten, ſondern ſie muß auch das ſchwere Amt über ſich nehmen, und das ganze Fernrohr ſelbſt, ſamt der daran befindlichen nicht leichten Equipage mit fortſchleppen helfen. Nicht ſo iſt es bey den mikroſkopiſchen Mikrometern. Das Fernrohr ſamt dem Kreiſe bleibt nach gemachter Beobachtung immerfort unbewegt ſtehen, die Mikrometer ſind ganz unabhängig davon, der fixe Faden derſelben zeigt unverrückt den Punkt der Beobachtung auf dem Theilungsbogen an; mit dem beweglichen Faden kann man bis zum nächſten Theilungspunkt die Meſſung, ſo oft als es nur gefällig iſt, und ohne ſonſt etwas zu verſtellen, wiederholen; denn man darf nur bey jeder neuen Meſſung den beweglichen Faden allemal auf den unbeweglichen zurückbringen. Bey Quadranten können auch gemachte Beobachtungen verlohren gehen, wenn man ſich bey Schraubenumgängen verzählt oder zweifelhaft wird; das Fernrohr iſt nun einmal verſtellt, und die Beobachtung unwiderbringlich verloren, wie Recenſent ſelbſt mehrmalen zu ſeinem Verdruſſe erfahren hat. Solche Zufälle können ſich bey ganzen Kreiſen nicht ereignen.

Im zweyten Kapitel beſchreibt Herr P. ſein Mittagsfernrohr. Es iſt wie gewöhnlich gebaut, achromatiſch, mit doppeltem Objectiv, von 3 Zoll Oeffnung und 5 Fuß Brennweite, das Feld ungefähr 40 Minuten. Fünf Vertikalfäden im Brennpunkte eingezogen, werden auf dieſelbe Art, wie beym ganzen

Kreiſe

Kreiſe, durch die Axe erleuchtet, bey den Okularen ſind Vergrößerungen von 80 bis 200. Herr P. klagt über Dunkelheit dieſes Fernrohrs. Er kann bey Tage nur Sterne der erſten Größe, einige der zweyten, und ſehr wenige der dritten ſehen, (das glaubt Recenſent gern, das Fernrohr hat nicht Licht genung, auf 5 Fuß Focallänge iſt ſeine Oeffnung viel zu klein). Dies Inſtrument iſt in der ſchon beſchriebenen Stube zwiſchen zwey marmornen Pfeilern, an welche die Pfannen befeſtiget ſind, aufgerichtet. Nach Mitternacht, in einer Entfernung ungefähr einer italiäniſchen Meile, hat Hr. P. auf dem Dache eines Hauſes eine eiſerne Stange, mit einer Spalte in ihrer Mitte, errichten laſſen, um ſich derſelben als ein Meridian-Abſehen zu bedienen. Allein, wenn die Kollimazionslinie des Durchgangsinſtruments gerade auf die Mitte dieſer Spalte trifft, ſo weicht das Fernrohr noch vom Meridian 0″,44 gegen Abend ab; wie er ſich davon durch vielfältige Beobachtungen unter und über den Pol, mit hohen und niedrigen Sternen, verſichert hat. Wegen dieſer kleinen Abweichung wollte er auch die Stange nicht wieder verrücken laſſen, ſondern richtet ſein Inſtrument immer darnach, und zieht es vor, davon Rechnung zu tragen, und die beobachteten Durchgänge nach einer Tafel zu verbeſſern, die er ſich zu dieſem Behufe nach den de Lambriſchen Formeln (Conn. d. temps 1792. p. 251) berechnet hat.

Auch mit einem 7zölligen Hadleyſchen Sextanten von Ramsden hatte ſich Hr. P. verſehen. Ob er gleich meynt, ein ſolches Inſtrument könne auf einer Sternwarte von keinem großen Nutzen ſeyn, ſo widerſpricht er ſich doch ſelbſt gewiſſermaßen, wenn er auf der andern Seite uns erzählet, daß er ſich dieſes Werkzeuges ſehr lange bedient habe, um correſpondirende Sonnenhöhen zu Erfindung der wahren Zeit zu nehmen, und ſich nicht erinnere, bey dieſen Höhen je einen größern Unterſchied als den einer Zeitſecunde gefunden zu haben. (Aller Ehren werth! und wahrlich mehr, als ein geübter Beobachter von einem zweyfüßigen Quadranten erwartet. Hat doch Chriſtian Mayer bey einer ſo wichtigen Beobachtung, wie die des Durchgangs der Venus durch die Sonne 1769 war, am Tage des Durchgangs ſelbſt, den 23 May, mit einem 2½füßigen Quadranten, bey ſeinen correſpondirenden Sonnenhöhen, Unterſchiede von vier Zeitſecunden gehabt!! Expoſ. utriusque obſervat. et Veneris et Eclips ☉ factae Petropol. Petropol. 1769.

1769. p. 9). Die Theilungen des Gradbogens ſind ſo fein und ſo genau, daß man ſicher 7″ darauf leſen kann; auch gehören dazu, ein künſtlicher Horizont von ſchwarzem Planglaſe (dieſe Planglaſer ſind dunkelroth, ſehen nur ganz ſchwarz aus, da ſie auf einer Seite matt geſchliffen ſind) ſamt einer Waſſerwaage à bulle d'air, um auf dem feſten Lande mit dem Sextanten beobachten zu können. Dieſe beyden letzten Stücke ſind von Hr. Haas (einem gebornen Würzburger, und Ramsden's Zögling). Kaum war Hr. P. von ſeiner Reiſe aus England zurück, ſo ſuchte er vorerſt mit dieſem Sextanten die Polhöhe von Palermo zu beſtimmen, und war nicht wenig darüber verwundert, daß er ſie nur ungefähr 38° 6′ fand, da man ſie doch vordem durchgehends, ſelbſt auch die Mayländer Ephemeriden, zwiſchen 38° 9′ und 38° 10′ geſetzt hatte. Er bezweifelte anfänglich ſeine Beobachtungen mit dem Sextanten, indem er ſich nicht überreden konnte, daß die Breite von Palermo ſo ſchlecht ſollte bekannt geweſen ſeyn; allein nicht wenig war er erſtaunt, eine ſo genaue Uebereinſtimmung zu finden, nachdem er dieſe Breite mit ſeinem ganzen Kreiſe beſtimmt hatte. Aus ſeiner eignen Erfahrung zieht er nun den Schluß, daß die Summe der Fehler des Sextanten, des Horizonts und der Beobachtung, zuſammengenommen nie auf 30″ gienge. Gerade ſo groß ſchätzte ſchon Herr von Zach die correſpondirenden Fehler bey dieſem Inſtrument (Jahrbuch 1794. S. 81), und dies beweiſt abermal die ſo oft angerühmte Brauchbarkeit, Zuverläßigkeit, Wohlfeilheit und Behendigkeit dieſes vortrefflichen Werkzeuges, beſonders auf Reiſen. Recenſent erwartet itzt einen ganzen Spiegelkreis aus England, von welchem er ſich noch größern Nutzen und größere Genauigkeit verſpricht. Er wird ungefähr auf 16 bis 17 Guineen zu ſtehen kommen.

Außer den erwähnten aſtronomiſchen Werkzeugen beſitzt die Sternwarte noch drey Fernröhre. Ein einfaches zweyſchuhiges von 4 Zoll Oeffnung. Ein achromatiſches mit doppeltem Objectiv von 25 Zoll Focallänge und $2\frac{1}{2}$ Zoll Oeffnung mit 36 bis 200maliger Vergrößerung von ganz beſonderer Güte. Beyde ſind von Ramsden. Einen 7ſchuhigen Herſchelſchen Reflector. Herr Dr. Herſchel ſchrieb an Hr. P., daß er vorzüglich gut ausgefallen ſey, und daß er damit den 6ten Saturnustrabanten ſehen könne, wenn er Geduld hat, ihn in den vortheilhafteſten Umſtänden aufzuſuchen, welches er aber bisher nicht gethan hat, da ihn andere Beobachtungen, mit

denen

denen er ſich ernſtlich beſchäftigt hatte, davon abgehalten haben, und erklärt übrigens, daß er nicht gern ohne Noth, und aus bloßer Neugierde, ſeine Inſtrumente quäle. Ein viertes 10ſüßiges achromatiſches Teleſkop wird nächſtens aus London erwartet, da es längſt beſtellt iſt.

Sekunden-Pendeluhren hat die Sternwarte drey, jede mit der Compenſationsſtange und mit Federn, die die Uhr während des Aufziehens im Gange erhalten. Die erſte beſtellte Hr. P. ſelbſt in London bey Alexander Cumming. Sie wurde von ihm angefangen, da er aber mittlerweile ſein Gewerbe als Uhrmacher aufgab, und es ganz ſeinem Schwiegerſohn Grant überließ, ſo vollendete ſie dieſer. Dieſe Uhr hat dies eigene, daß ſie ein von allen übrigen verſchiedenes, und von Hrn. Cumming ſelbſt erfundenes Stoßwerk hat. Herr P. beſchreibt ſolches nebſt einer Zeichnung deutlich; man findet es auch von dem Erfinder ſelbſt beſchrieben, in ſeinen Elements of Clock and Watch-Work, adapted to Practice in two Eſſays. London 1766. S. 78. art. 288. Obgleich die Güte dieſer Uhr nicht zu bezweifeln ſtehet, ſo glaubt Hr. P. dennoch, daß ſie den Grad der Vollkommenheit bey weitem nicht erreiche, den ſich Hr. Cumming von dieſer Erfindung verſprochen hat. Hr. P. erſuchte Hrn. Grafen von Brühl, den Churſächſiſchen Geſandten in London, dieſen ſo eifrigen als thätigen Liebhaber aſtronomiſcher Wiſſenſchaften, und ganz beſonders erfahrnen Kenner in der Uhrmacherkunſt, dieſe neue Pendeluhr ſelbſt zu prüfen. Der Herr Graf war ſo gefällig, und beobachtete ſie auf ſeiner Sternwarte 40 Tage lang, in welcher Zeit ihre äuſſerſten Fehler —0″,18 und +1″,03 betrugen. Hr. P. fand faſt eben daſſelbe zu Hauſe; allein bald nachher blieb ſie ſtehen. Ein geſchickter Uhrmacher in Palermo brachte ſie wieder in Gang; ſie iſt jetzt beym ganzen Kreiſe aufgeſtellt, und geht nach Sternzeit. Die zweyte Pendeluhr iſt von dem berühmten Thomas Mudge, dem größten Künſtler, den England in ſeiner Art gehabt hat. Herr Graf von Brühl überließ dieſe Uhr, deſſen vortrefflichen Gang er ſelbſt mehr als zwey Jahre lang beobachtet hatte, Hrn. P. aus beſonderer Gefälligkeit; ſie ſteht jetzt beym Mittagsfernrohr. Herr P. wollte ſie ebenfalls nach Sternzeit gehen laſſen, konnte aber die Linſe des Pendels nicht genug erhöhen, und ward alſo gezwungen, ſie nach mittlerer Sonnenzeit zu ſtellen. Die dritte Uhr iſt in der Galerie aufgeſtellt, und dem Verfaſſer von Hrn. de la Lande

aus

aus Paris geſchickt worden. Janvier hat ſie verfertiget; ſie hat aber freylich die Vollkommenheiten der vorhergehenden nicht; allein, dagegen muß man auch bedenken, daß ſie zwey Drittheile wohlfeiler im Preiſe iſt. Nichts deſto weniger iſt ſie in ihrer Art gut; ihre größte Abweichung in einem Jahre gieng ungefähr auf 10 Sekunden. Für die Fälle, wo man den Pendelſchlag nicht hören kann, iſt auch ein Zähler vorhanden. Zwey Barometer, eine Menge Thermometer, Hygrometer, Magnetnadeln, Himmelskugeln u. ſ. f. machen den übrigen Apparat aus. Herr P. wünſcht, daß er im Stande wäre, auch eine Beſchreibung eines Aequatorealinſtruments, und eines noch größern ganzen Kreiſes geben zu können. Dieſe Inſtrumente würden ſeine Sternwarte auf das vollſtändigſte ausrüſten. Er hat Hoffnung, auch dieſe einſt noch von des Königs Freygebigkeit zu erhalten.

Das dritte Buch enthält die mit dem ganzen Kreiſe beobachteten Scheitelabſtände aller Sterne der erſten und zweyten Größe, einen großen Theil von der dritten, eben ſo viel von der vierten, und nur ſehr wenige von der fünften und ſechsten Größe, wie auch der obern Planeten in ihren Oppoſitionen, und der beyden untern in ihren größten Ausweichungen. Dieſe Beobachtungen gehen vom May 1791 bis May 1792. Jeder Stern wurde wenigſtens viermahl beobachtet, zweymahl mit der nach Oſten gekehrten Fläche des Kreiſes, und zweymahl mit der nach Weſten gekehrten. Gemeiniglich ſind auch beyde entgegengeſetzte Einſtellungen, ſo wohl am obern als untern Mikroſkop, abgeleſen worden. Zwey auf dieſe Art beobachtete Scheitelabſtände deſſelben Sterns mit einmal verwandtem Inſtrument, ſind wenigſtens nothwendig, wenn man eine äußerſt genaue Beſtimmung zu erhalten wünſcht. Obgleich ſich Hr. P. nur hauptſächlich die Beobachtungen der Zenithdiſtanzen mit dem ganzen Kreiſe hat angelegen ſeyn laſſen, ſo hat er demungeachtet die Beobachtungen der geraden Aufſteigungen, inſonderheit der Planeten, nicht vernachläßiget. Er ſelbſt hat ſowohl am ganzen Kreiſe, als auch ſein Gehülfe, Hr. Dr. Niccolo Cariotti, am Mittagsfernrohre, die Zeiten der Durchgänge beobachtet, wird aber dieſe und mehrere andere Beobachtungen zu einer andern Zeit bekannt machen. Die jetzt vor uns liegenden Beobachtungen nehmen 100 Folioſeiten ein, und ſind eine höchſt ſchätzbare Sammlung, um Abweichungen der beobachteten Sterne daraus herzuleiten; auch können ſie denje-

nigen Aſtronomen von großem Nutzen ſeyn, die mit Mauerquadranten ähnliche Beobachtungen gemacht haben. Sie können daraus die Fehler ihrer Quadranten am beſten beſtimmen und kennen lernen.

Das vierte Buch handelt von den drey Hauptelementen einer Sternwarte: der Breite, der Länge, und der mittlern Strahlenbrechung daſelbſt. Die Breite von Palermo war ehedem, wie ſchon oben erwähnt worden, ſehr unrichtig beſtimmt worden. Hr. P. kennt die Urheber dieſer Angaben nicht; Recenſent glaubt aber, daß die eine von dem oberwähnten Henri Michelot herrühre, der die Breite dieſer Stadt in ſeinem Portulan, S. 328. auf 38° 9′ ſetzt, und ſo geben ſie auch die Mayländer Ephemeriden an. Man weiß, wie ſchwer heut zu Tage die Beſtimmungen der Polhöhen werden, weil man ſie bis auf eine Sekunde genau zu wiſſen begehrt. Die Polhöhen der erſten und berühmteſten Sternwarten in Europa ſind lange Zeit auf viertel, halbe, ja ganze Minuten ungewiß geblieben (erſt in dieſem 1795ſten Jahre haben die Pariſer Aſtronomen die wahre Polhöhe ihrer Sternwarte durch ganze Kreiſe auf 48° 50′ 11″ feſtgeſetzt, alſo 3″ kleiner, als bisher angenommen worden. *De la Lande* Aſtr. art. 2246). Der Herr Verfaſſer nimmt ſich alſo vor, dieſes ſchwierige Element mit der größten Genauigkeit feſtzuſetzen. Hierzu ſchlägt er die drey einfachſten und allbekannten Wege ein: erſtlich, aus jeder Sternhöhe; zweytens aus Sternen nahe am Scheitel; und drittens aus Circumpolarſternen die Polhöhe herzuleiten. Die erſte Methode ſetzt des Sterns Abweichung und die Strahlenbrechung als bekannt voraus; bey der zweyten darf bloß die Abweichung; und bey der dritten nur die Strahlenbrechung allein bekannt ſeyn. Acht Beobachtungen des Polarſterns unter und über den Pol, und die nicht mehr als anderthalb Sekunden unter ſich differiren, geben für die Polhöhe der Sternwarte im Mittel 38° 6′ 44″. Daſſelbe findet er aus 39 Beobachtungen von ſieben Zenithalſternen, und aus 39 Beobachtungen von andern acht wohlbeſtimmten Sternen; und dennoch glaubt Hr. P. die Gränzen der Ungewißheit bey dieſer Beſtimmung bis auf 1″ bis 2″ ſetzen zu müſſen. Recenſent glaubt dieſe Ungewißheit nicht ſo groß; dies beweiſen ihm die vergliechenen Beobachtungen, die Hr. Graf von Brühl, ſowohl mit Hareſield als Blenheim angeſtellt hat, und wo die Reſultate bis auf 1″ genau zutreffen. Man ſehe des Hrn. Grafens vortreffliche

treffliche Schrift: Inveſtigation of aſtronom. Circles. London 1794. Tab. No. 3. Die allererſten Beobachtungen gaben Hr. P. die Polhöhe freylich nur 38° 6′ 40″ (conn. d. temps 1793. p. 281) um 4″ zu klein.

Im zweyten Kapitel ſetzt Hr. P. ſeine Bemühungen auseinander, die mittlere Strahlenbrechung für die Polhöhe ſeiner Sternwarte zu beſtimmen. Er verſuchte anfänglich die ſchon von Tycho vorgeſchlagene Methode der Zenithdiſtanzen und Azimuthe, allein nach vielen angeſtellten und ſorgfältigſt berechneten Beobachtungen fand er dieſe Beobachtungen auf 4″ bis 5″ unzuverläßig, und folglich beym jetzigen Zuſtande der Aſtronomie zu dieſem Endzwecke gar nicht brauchbar. Er wandte ſich daher zu der Methode der in der Mittagsfläche beobachteten Scheitelabſtände, von der er ſich, nicht mit Unrecht, eine größere Uebereinſtimmung verſprach, obgleich ſie von der Abweichung des Sterns und der Polhöhe abhienge. Letztere hatte er mit einer außerordentlichen Genauigkeit beſtimmt, und von den erſtern wählte er nur ſolche Sterne, deren Abweichungen ſehr genau bekannt ſind. Von dieſen beobachtete er die Scheitelabſtände, zog die Polhöhe davon ab, den Reſt verglich er mit der berechneten ſcheinbaren Abweichung des Sterns, woraus ſich die abſolute Strahlenbrechung ergab, die er auf die mittlere reducirte, nämlich auf einem Barometerſtand von 29,95 engliſchen Zollen, und 55° des Fahrenheitiſchen Thermometers. Nach dieſem Verfahren erhielt er aus ſechs dazu gebrauchten Sternen und 45 Beobachtungen ſechs Reſultate, die ihm, im Mittel für die mittlere Strahlenbrechung, im 45ſten Grad vom Zenith 55″,87 gaben, welche von der bekannten Bradleyſchen Beſtimmung nicht mehr als 1″,03 abweicht. Um dieſes Reſultat noch durch einen andern Weg zu prüfen, ſo bediente ſich Hr. P. einer andern von Hrn. de la Lande (Aſt. art. 2215) vorgeſchlagenen Methode, die Boscovich in eine ſehr einfache Formel gebracht, und deſſen ſich Herr Abbate Reggio zu Beſtimmung der mittlern Strahlenbrechung in Mayland, mit ſo gutem Erfolge bedient hat. Es ſeyen a, a′, b, b′ beobachtete Scheitelabſtände zweyer Circumpolarſterne über und unter dem Pole, und x, x′, y, y′ die zuſtimmenden Strahlenbrechungen; es ſey ferner $a-3x=m$, $a'-3x'=n'$ $b-3y=n$, $b'-3y'=n'$, ſo iſt

$$x = \frac{[(a+a') - (b+b')]\,\mathrm{Tang.}\,m}{(\mathrm{Tang.}\,m+\mathrm{Tang.}\,m') - (\mathrm{Tang.}\,n+\mathrm{Tang.}\,n')} = \frac{d}{d'}\mathrm{Tang.}\,m$$

$$x' = \frac{d}{d'}\mathrm{Tang.}\,m'; \quad y = \frac{d}{d'}\mathrm{Tang.}\,n; \quad y' = \frac{d}{d'}\mathrm{Tang.}\,n'.$$

Nach dieſer Formel fand Herr P. aus vier dazu gebrauchten Circumpolarſternen, die mittlere Strahlenbrechung im 45° = 56″, 40, und aus einer andern Zuſammenſtellung 56″,20. Aus dieſen beyden, und aus obiger Beſtimmung, ſetzt er das Mittel 56″,0 feſt. Hierauf vergleicht er dieſe Strahlenbrechung mit des Herrn Abbé Oriani's Formel (Ephem. Mediol 1788. p. 164), findet aber, daß ſie die wahre Strahlenbrechung nur bis auf den 40ten Grad vom Zenithe genau angiebt, von da an werden die Werthe der Formel zu klein. Hieraus zieht er nun den Schluß, daß unter allen Hypotheſen über Strahlenbrechung, die Bradleyſche, der Erfahrung gemäß, den Beobachtungen am allermeiſten Genüge leiſte, und daher ſo wohl an Genauigkeit als Einfachheit nicht leicht von andern übertroffen werde. Doch bemerkt Hr. P. daß ſeine erſt beſtimmte mittlere Strahlenbrechung bey einem Südoſtwinde (Scirocco) noch um etwas vermindert werden müſſe: dieſe ſonderbare Bemerkung hat er jedesmal bey Beobachtungen gemacht, die während eines ſolchen Windes gemacht worden. Beſonders deutliche Spuren dieſer Wirkung hat er den 17. April 1792 bey einem ſehr heißen Scirocco gehabt, wo das Thermometer auf 83° ſtieg. Er ſetzt dieſes durch ſeine an dieſem Tage gemachten Beobachtungen umſtändlich aus einander, und zeigt auf eine ſehr wahrſcheinliche Weiſe, daß dieſe beobachtete Verminderung der Strahlenbrechung von keiner andern Urſache, als von dieſem Winde, oder durch ihn herbeygeführten Dünſten, herrühren könne. So oft als dieſer Wind wehet, zeigen ſich die Sterne ſchwankend, und mit einem Hof umgeben; die Luft iſt dabey nicht feuchte, wie man ſonſt anderwärts allgemein bemerkt, ſondern in Palermo ſehr trocken, und elektriſchen Verſuchen nichts weniger als hinderlich. Herr P. behält ſich vor, dieſe Umſtände näher zu unterſuchen und zu verfolgen. (Herr de la Lande hat ſchon die Vermuthung geäußert (Conn. d. temps 1793. p. 279), daß die Strahlenbrechung in Italien bey demſelben Barometer- und Thermometerſtand geringer als in Paris ſey; ſie iſt kleiner in Mayland, und noch kleiner in Palermo. Herr Cagnioli hat in

in Verona unter dem 45ſten Grad der Breite gefunden, daß die Strahlenbrechung daſelbſt um ein 25 Theil geringer als zu Paris iſt).

Im dritten Kapitel beſtimmt Herr P. die Länge ſeiner Sternwarte. Hierzu bediente er ſich zuerſt der Sonnenfinſterniß vom 3ten April 1791, die er in Palermo beobachtet hatte. Aus den correſpondirenden Beobachtungen, in Paris, Mayland und Petersburg angeſtellt, berechnete er die wahren Zeiten der wahren Zuſammenkunft; dieſe mit jener, die ſich aus ſeiner eignen Beobachtung ergab, verglichen, gaben für den Meridianunterſchied zwiſchen Paris und Palermo, aus Hrn. Mechain's Beobachtung 44′ 4″, aus Herrn de la Lande's 44′ 1″, aus Herrn Oriani's 44′ 6″, aus Herrn Rumouski 44′ 2″, öſtlich von Paris, woraus das arithmetiſche Mittel 44′ 3″ folgt. Recenſent hat dieſe Länge noch aus der Greenwicher und Mannheimer Beobachtung derſelben Sonnenfinſterniß hergeleitet. Aus der erſten hat Hr. Mechain nach zwey Hypotheſen der Abplattung die wahre Zuſammenkunft berechnet (Berl. J. B. 1794. S. 96). Hiernach wäre die Meridiandifferenz von Paris und Palermo 44′ 9″ (nach der Axen-Verhältniß 299: 300) und 44′ 12″ nach dem Verhältniß 229: 230. Herr Barry hat dieſelbe Zuſammenkunft für Mannheim berechnet (Berl. J. B. 1795. S. 190), mit Palermo verglichen, kommt Meridiandifferenz 44′ 6″; das Mittel aus allen drey Beſtimmungen 44′ 9″. Sechs Sekunden größer als aus Hr. P. Zuſammenſtellung. Die zweyte Beobachtung, aus welcher der Herr Verfaſſer die Länge ſeiner Sternwarte zu beſtimmen ſucht, iſt die Bedeckung des Jupiters vom Monde, die ſich den 7ten April 1792 ereignet hatte. Er vergleicht die Zeiten der mittlern Zuſammenkunft, die er aus ſeiner, und aus der Pariſer, Gothaer und Mayländer Beobachtung berechnet hat. Bey der Gothaiſchen Beobachtung aber hat ſich Herr P. geirrt; denn dieſe Beobachtung iſt nicht, wie er vorausſetzt, auf der Seeberger Sternwarte, ſondern 6″,5 in Zeit weſtlicher, auf dem herzoglichen Schloß Friedenſtein, auf der kleinen Sternwarte, beobachtet worden, wie man aus dem Berl. aſtron. J. B. 1795, wo dieſe Beobachtung S. 249 ſteht, und S. 252 erſehen kann. Nach dieſer Berichtigung ſtimmen auch die Zeiten der Zuſammenkunft beſſer, und die Gothaiſche Beobachtung giebt alsdann für Meridianunterſchied, von Palermo auf Paris reducirt, 44′ 9″,

die Mayländer 44′2″, und die Pariſer 43′51″. Herr P. ſetzet zwar (den Irrthum von Gotha mit eingeſchloſſen) abermal im Mittel den Meridianunterſchied 44′3″, wie bey der Sonnenfinſterniß; allein Recenſent geſtehet, er würde hier die Pariſer Beobachtung, als ſehr abweichend, lieber ganz verwerfen, und nur aus Gotha und Mayland das Mittel auf 44′6″ ſetzen. Vergleicht nun Recenſent dieſelbe Beobachtung auch noch mit der Mannheimer (A. J. B. 1795. S. 249), ſo kommt 44′7″; nimmt er das Mittel aus allen, ſo erhält er endlich für den wahrſcheinlichſten Mittagsunterſchied 44′6″ oder 7″, und dieſe Angabe hält er für richtiger und genauer, als 44′3″, die Hr. P. feſtſetzt.

Den Beſchluß machen Witterungsbeobachtungen. Sie gehen vom 10ten May 1791 bis 30ſten April 1792. Den 3ten April 1792 bemerkte man um 4½ Uhr Abends zwey ſehr leichte Erdſtöße, die 3 bis 4″ dauerten, und den 10ten deſſelben Monats ſah man um 5¼ Uhr des Morgens Feuer auf dem Aetna.

Das Werk iſt ziemlich ſchön und korrekt gedruckt. Druckfehler, außer den auf dem letzten Blatte angezeigten, haben wir nur wenige bemerkt. Nur noch auf eine Eigenheit im Tagebuch der Beobachtungen müſſen wir die Leſer aufmerkſam machen, weil ſie beym erſten Anblick zu Irrungen Anlaß geben kann. Der Herr Verfaſſer zählt nämlich die Tage, wie ſich's gehört, nach aſtronomiſcher Rechnung, das iſt, er fängt den Tag mit dem Mittage an; allein den Wochentag bezeichnet er nach bürgerlicher Rechnung. Daher kommt es, daß auf demſelben Datum eines Tages, z. B. ein Sonnabend, und auch ein Sonntag fällt; früh Morgens iſt Sonnabend, der Nachmittag iſt Sonntag.

VII.

# VII.

## Auszüge aus Briefen, verſchiedene Nachrichten und Anzeigen.

### 1. Ueber die vorgebliche, Herrn Dr. Herſchel öffentlich zugeſchriebene, Beobachtung eines fünffachen Saturnringes; von Herrn O. W. von Zach.

Eine Nachricht davon hat mir Herr de la Lande ſchon in einem ſeiner vorigen Briefe gegeben, der im III. Heft des Archivs, S. 380 abgedruckt worden. Schon da bezweifelte ich ſie ſehr in der zweyten Note, und ſchrieb auch meinen Zweifel Herrn de la Lande, der nach Hrn. Pictets Nachricht noch immer daran glaubte. Allein, ſeitdem hat ſich die Sache aufgeklärt, und ich erhielt von Herrn Herſchel ſelbſt einen beſondern Abdruck der Abhandlung, davon hier die Rede iſt, und daraus ergiebt ſich, daß die ganze Nachricht ein Misverſtand iſt, der durch einen Sprachfehler entſtanden iſt, wie mir Hr. de la Lande in einem ſeiner folgenden Briefe ſelbſt meldet. Es hat nämlich Herr Pictet das engliſche Wort *Belt* (Streifen) mit Ring verwechſelt; und anſtatt quintuple Belt, auf franzöſiſch *Bande* quintuple zu überſetzen, *Anneau* quintuple geſetzt. Das ſonderbarſte dabey iſt, daß dieſe falſche Nachricht allenthalben, und ſogar durch politiſche, Zeitungen, verbreitet worden. Die erſte Quelle, woraus ſie geſchöpft ſeyn mag, iſt wohl das gegenwärtige Archiv, wo dieſe angebliche Entdeckung zuerſt, jedoch zugleich mit dem Korrektiv meiner Note, bekannt gemacht worden iſt. Dennoch hat es einem Correſpondenten der Allgem. Litt. Zeit. gefallen, dieſe Nachricht, nicht nur mit Verſchweigung der Quelle, ſondern ſogar mit einem Grade von Zuverläſigkeit einzuberichten, der dieſer Nachricht nicht zukommt, da jetzt klar am Tage liegt, daß ſie falſch, und nur durch einen Sprachirrthum veranlaßt worden iſt. In No. 73 des Intelligenzblatts, Mittwochs den 5ten July 1795, wird vorgegeben, daß die Nachricht, Herr Herſchel habe den Saturn nunmehr aus fünf Ringen zuſammengeſetzt gefunden, aus Briefen von England ſey. Allerdings wird man in England am beſten wiſſen, was Hr. Herſchel Neues am Himmel entdeckt hat; ob man aber da ein in Paris gemachtes quid pro quo eben ſo genau weiß, und ſolches denſelben Irrthum veranlaſſen kann, daran zweifle ich ſehr! und doch wird dieſe Nachricht als wahr, und als wirklich aus England erhalten, einberichtet! So wie dieſe irrige Nachricht im Intelligenzblatt der Allgem. Litt. Zeit. ſtehet, ſteht ſie auch von Wort zu Wort in der Frankfurter Kaiſerl. Reichs-Ober-Poſt-Amts-Zeitung vom 15ten Auguſt 1795, und wer weis, in wie vielen andern Provinzialzeitungen. Obgleich wahre Erfindungen und Entdeckungen aller Art, ſo wie das reelle Verdienſt, nichts an ihrem Werthe dadurch

durch verlieren, daß sie falsch angekündiget, verunstaltet, oder übertrieben werden, so geben doch solche gelehrte Nachrichten, die sogar durch politische Zeitungen verbreitet werden, wenn sie nachher wieder zurückgenommen werden müssen, bey itzigen Zeiten zu allerley gehässigen Consequenzenmachereyen Stoff und Anlaß. Es giebt Menschen, die Kenntnisse, Wissenschaften und Gelehrsamkeit aller Art fürchten und hassen; diese ergreifen denn jede auch noch so unbedeutende Gelegenheit, um dadurch das (ihrer Vorstellung nach!) Schwankende, Einseitige, Unnütze, Ungewisse und Schädliche aller Wissenschaften zu beweisen, und so gelehrte Kenntnisse überhaupt, so viel sie immer können, in Verachtung zu bringen, selbst, wäre es möglich, sie lächerlich zu machen. Bey solchen gelten sodann weder Vorstellungen, noch Berichtigungen, noch Gründe. Eine andere Gattung Menschen macht sich daraus ein Geschäft, alles Große und Hervorragende herabzuwürdigen, bloß weil es auf einer Höhe stehet, welche die Tadelsucht dieser faulen Ehrgeitzigen nicht erreichen kann; und da sie zu großen Männern, wie Newton und Leibnitz, nicht hinan können, so sollen jene zu ihnen herunter. Nicht als ob Leute dieser Art vom Werthe der Wissenschaften gar nicht überzeugt wären; sie haben blos zu wenig Talent oder ausdaurende Geduld, selbst etwas zu leisten, und auf diesem Wege die Aufmerksamkeit ihrer Zeitgenossen, wie sie wohl wünschten, auf sich zu ziehen. Dadurch erwacht bey solchen Menschen Eifersucht, Neid und Verkleinerungssucht, und so lassen sie keine Gelegenheit (wie etwa die gegenwärtige) ungenutzt vorbey, um das Verdienst zu Schatten zu stellen. Jeder Freund der Wahrheit muß es daher um so mehr für Pflicht halten, da, wo Irthum für Wahrheit ausgegeben wird, diesen zu zerstreuen, und ich glaube mich in gegenwärtigem Falle hiezu um so mehr berufen, da ich diese Nachricht veranlaßt habe, und nicht zugeben kann, daß dadurch die ruhmvollen Arbeiten und Bemühungen meines, obschon über alle solche Vertheidigungen und Ehrenrettungen erhabenen Freundes, des Herrn Dr. Herschels, in ein falsches Licht gesetzt werden. Ich habe auch diese Gelegenheit um so freudiger ergriffen, da ich längst, und aus mannichfaltigen Ursachen gewünscht habe, ein Wort zu seiner Zeit zu sagen.

## 2. Auszüge aus einigen Briefen des Herrn de la Lande an Herrn O. W. M. v. Zach.

Paris, den 9. Februar 1795.

Die Vereinigung der Gelehrten, welche die Wiederherstellung der Akademie bewirken sollte, hat den 19ten Pluviose (7ten Februar) statt gehabt. Die Versammlung war sehr zahlreich; ich habe sie eigentlich veranlaßt, und habe sie mit der Erlaubnis des Comité des öffentlichen Unterrichts zusammenberufen. Die Bürger Nouet und Perny haben ein astronomisches Memoire vorgelesen, in welchem sie die Polhöhe der Nationalsternwarte mit einem ganzen Kreise beobachtet, auf 48° 50′ 11″ setzen. Sie müssen daher von allen meinen überschickten Sternabweichungen 3″ von den nördlichen abziehen, und eben soviel zu

zu den ſüdlichen hinzuſetzen. Duc la Chapelle iſt jetzt in Paris, er iſt ein ſehr eifriger Aſtronom, und obgleich er ſehr jung, reich, und Einnehmer ſeines Diſtrikts iſt, ſo widmet er doch der Aſtronomie ſehr viele Zeit. Talon, Direktor des Depôt de la Marine et de la guerre verſchaft dieſem Etabliſſement einen großen Wirkungskreis, der von außerordentlichem Nutzen iſt. Laplace, Delambre und Mechain ſind mit 5000 livres dabey angeſtellt. Beauchamps geht nach Aſien; er iſt zum Conſul in Maſcate in Arabien mit 10000 Livres Gehalt ernannt; er wird daſelbſt Beobachtungen machen, um die Geographie Aſiens zu verbeſſern. Seine Inſtrumente ſind noch immer in Bagdad *).

Paris, den 27. Februar 1795.

Meine Geſchichte der Aſtronomie für 1794 iſt noch nicht abgedruckt, und ich habe ſie noch ſehr mit den Nachrichten vermehret, die Sie mir zu überſenden die Güte hatten. Auch dem ſeel. P. Firmiſſner werde ich durch ihre Hülfe ein kleines Denkmal darin ſtiften. Mein Elo ge von Bailly habe ich vor acht Tagen ſchon abgeſendet; es ſteht auch in der Décade philoſophique et littéraire. Sie verpflichten mich ſehr, wenn Sie eine deutſche Ueberſetzung davon veranſtalten. Ich habe eine Abhandlung über die große Kälte dieſes Jahres geſchrieben, die ge druckt werden ſoll. Die größte Kälte hatten wir hier den 23ſten Jene ner

*) Herr Beauchamps war ehedem Vicaire général de Babylone, und hatte in Bagdad eine Sternwarte errichtet, wo er viele Beobachtungen, inſonderheit des in unſern Gegenden ſo ſelten ſichtbaren Merkurs, angeſtellt hat. In Caſbine oder Casvine hatte er 1787 die ſüdliche Spitze des Caſpiſchen Meeres, deſſen Lage ſo ſehr unbeſtimmt war, feſtgeſetzt; jetzt geht er, bevor er ſeinen Poſten in Maſcate antritt, nach Konſtantinopel und Tre bizonde, um da die ebenfalls noch ſehr unbekannte öſtliche Küſte des ſchwarzen Meeres zu beſtimmen, über deſſen wahre Lage noch große Ungewißheit herrſcht, wie man aus einem Memoire des Grafen Buache, ſur la poſition de Trebizonde, D'Arz-Roum et de quelques autres Villes de l'Aſie occidentale erſehen kann (Mém. de l'Acad. 1781. p. 421). Es iſt Schade, daß das dortige heiße Klima nicht erlaubt, viele und anhaltende Beobachtungen zu machen. In Bagdad mußte Herr Beauchamps drey der ſchönſten Sommermonate in gänzlicher Unthätigkeit zubringen; er konnte wegen der brennenden, unausſtehlichen Hitze platterdings nichts vornehmen, ſelbſt zur Nachtzeit war es nicht möglich, es vor Hitze in der Sternwarte auszuhalten, und da zu beobachten. Außer ſeinen aſtronomiſchen Arbeiten haben wir auch von Hr. Beauchamps noch zwey andere ſchätzbare Werke, die noch zu größern Hofnungen berechtigen. Das eine iſt eine Relation d'un Voyage en Perſe fait en 1787; das andere: Mémoire ſur les antiquités babyloniennes, qui ſe trouvent aux Environs de Bagdad. Man ſehe das Journal des Sçavans. Decembre 1790. p. 2403). J. J.

Leute von Verdienſt groſſen Antheil daran genommen, und ich hoffe noch immer, daß dieſes die Wiederherſtellung der Akademie herbeyführen wird.

Paris, vom 26ſten März 1795.

Mit nächſtem Poſttage erhalten Sie die Stellungen von 1500 Sternen der 6ten Größe, die nicht in Flamſteed ſtehen, wo nur 1700 ſind. Das iſt nicht die Hälfte von dem, was noch über dieſe 1700 am Himmel iſt, es giebt deren noch von der 7ten und 8ten Größe. Beingen Sie die Verbeſſerung der 3 Sek. noch nicht an meine überſchikten Abweichungen an, bis daß ich durch die Beobachtungen der Circumpolarſterne an einem ganzen Kreiſe, erſt zuverläßig erfahre, ob die Strahlenbrechung in der Polshöhe nicht einer kleinen Verbeſſerung bedarf. De Lambre hat neuerlich ſehr curiöſe Unterſuchungen über die Strahlenbrechung angeſtellt; er wird ſie auf die Beobachtungen, von denen ich Ihnen ſage, anwenden. Ich laſſe mir einen ganzen Kreis verfertigen, der mir hauptſächlich dazu dienen ſoll. Endlich habe ich die Philoſ. Transact. für 1794 zu Geſichte bekommen. Der neue Komet iſt nicht von 1794, ſondern er wurde den 18ten October 1793 entdeckt, Meſſier hatte ihn ſchon den 27ſten Sept. geſehen. Nicht einen fünffachen Ring, ſondern einen fünffachen Streifen (bande) oder Gürtel (ceinture) hat Hr. Herſchel auf dem Saturn entdeckt, und dadurch ſeine Umdrehung 10 Stunden 16′ 0″,4 gefunden. Bey der Sonnenfinſterniß vom Jahr 1793 ſah er zwey Mondsberge von 1½ Meilen Höhe (oder 1245 Toiſen) in die Sonne eintreten. Fordyce giebt eine ſehr weitläuftige Beſchreibung eines neuen Pendels, um die Ausdehnung zu verbeſſern. Hr. Schröter giebt ſeine Beobachtung der Sonnenfinſterniß vom 5ten Sept. heraus; ſie giebt mir Meridiandiſtanz 26′ 17″; allein, mir ſcheint, daß der Anfang nicht mit dem Ende zuſammenſtimmt; auch er hat Mondsberge geſehen, aber von 2800 Toiſen Höhe. Wenn Sie nach England ſchreiben, ſo erkundigen Sie Sich doch, was aus der Reiſe in das Innere von Africa geworden iſt, die ein gewiſſer Hutton im Jahr 1790 auf Koſten der Societät, deren Secretair Hr. Beaufoy iſt, unternommen hat. Seit 1791 habe ich keine Nachrichten mehr erhalten können. Herr Beaufoy iſt auch der Redakteur eines ſehr intereſſanten Memoire's über das Innere von Africa *). Hr. Warens, ein Däne, iſt hier der Unterneh-

mer

men Jettoniers das franzöſiſche Bürgerrecht durch folgende Verſe ertheilt:

Mais en blâmant leur troupe entiére
Ah! Sans doute, je me [illegible]ens;
La ſeule troupe *Jettonniére*
A donné cet arrêt ſi contraire au bon ſens. v. J.

*) Herrn de la Lande's Verdienſte um die Geographie ſind allgemein bekannt; vielleicht weniger das Verdienſt, das er inſonderheit um die Kenntniß des Innern von Africa hat, wie ſeine im Jahr 1791 herausgekommene Conſidérations géographiques ſur l'intérieur de l'Afrique beweiſen, und die der jetzige Generaldi-

rektor

mer eines Magazin encyclopédique, der erſte Band enthält meine Geſchichte der Astronomie für 1794, zu welcher Sie ſo viel beygetragen haben, und die Sie mit Vergnügen leſen werden. Die Vorrückung der Nachtgleichen, die man in England zu 50″,2 anſetzt, iſt nur 50″,1 *), wie ſie de Lambre aus einer großen Menge von Vergleichungen gefunden hat. Itzt gebrauche ich ſie ſo in allen meinen Rechnungen. Man druckt itzt mit Macht an meinem Auszuge der Astronomie (Abregé), den ich mit vielem Fleiß durchgeſehen habe. Ich wünſchte wohl, Sie veranſtalteten eine deutſche oder lateiniſche Ueberſetzung für die Schulen in Teutſchland. Ich bin Ihnen ſehr verbun-



rektor bey dem Marine- und Kriegsdepot, Bürger Talon, neu hat auflegen laſſen. Er ſucht hauptſächlich darinn darzuthun, daß man das Innere von Africa wirklich ganz durchreiſen könne, und ſolches auch in der That durchreiſt wird. Daher intereſſirten Hrn. de la Lande die Entdeckungen in den innern Theilen von Africa, die durch die engliſche africaniſche Geſellſchaft, African aſſociation for promoting the Discovery of the interior parts of Africa veranſtaltet werden, und davon bereits ein Band 1790 in London erſchienen iſt, welchen Hr. Prof. Reinhold Forſter ins Deutſche überſetzt hat (Neue Beyträge zur Kenntniß von Africa; Berlin 1791, in der Voßiſchen Buchhandlung, aus dem 5ten Bande des Magazins von Reiſebeſchreibungen beſonders abgedruckt). Auch findet man in Hrn. Hofrath Zimmermanns Annalen der Geogr. und Statiſt. I. Band V. Stück S. 471 u. f. f. Nachrichten davon. Die Franzoſen, die auch in dieſem Welttheile Beſitzungen haben, haben ſich von jeher darum bekümmert; jedoch vielmehr in den letzten Zeiten, wo vielleicht die engliſche africaniſche Societät ihre Nationaleiferſucht angefacht hat; denn ſeitdem ſind einige wichtige franzöſiſche Werke über Afrika erſchienen: L'Afrique, et le pouple africain conſideré ſous tous leurs rapports avec notre Commerce et nos Colonies par Mr. Lamiral, ancien agent de Commerce en Afrique, à Paris 1789. 8vo. von 400 Seiten, mit 6 Kupfern und einer geographiſchen Karte. Lettre ſur le Privilege de la Compagnie de Sénégal par Mr. de Golberry, Capitaine au Corps-Royal du Genie. Paris 1791, chez Devaux, wo ſehr ſchätzbare Nachrichten vom innern von Africa vorkommen. Es wäre zu wünſchen, daß der nun in Berlin ſich aufhaltende Chevalier Boufflers, der bekanntlich Gouverneur in Goree war, ſeine nähern Kenntniſſe von Africa, die er ſich da geſammelt, niederſchriebe. So wie mir der Chevalier ſelbſt erzählt hat, hat er einige Reiſen auf dem feſten Lande von Africa ins Innere unternommen, und mir manche nicht unerhebliche Nachrichten erzählt. Er ſah und kannte auch in dieſem Welttheile die Herrn Sparrmann und Adanſon. Was aber der Erfolg von Hutton's Sendung geweſen iſt, davon iſt mir bisher nach nichts bekannt geworden. v. Z.

*) Hiernach wäre die Vorrückung in gerader Aufſteigung 45″,9243 + 20″,02423 Sin. AR. Tang. Declin. und in der Abweichung 20″,02423 Coſin AR unter Vorausſetzung der Schiefe der Ekliptik 23° 28′ 0″. v. Z.

den für die Verbesserungen und Zusätze zur neuen Ausgabe meiner Astronomie. Ich bitte damit fortzufahren, ich werde meinen Supplementenband damit bereichern. Ich hatte wohl anfänglich die Absicht in meinen Tafeln auch ein Sternverzeichniß einzurücken; allein die Jupiterstrabantentafeln wurden so voluminös, daß ich mir nicht getraucte, den Band noch stärker zu machen. Uebrigens hat sich für die Sternbestimmungen ein ganz neues Feld eröffnet, daß ich besser zu thun glaubte, wenn ich damit noch wartete *). Hr. Bernard ist noch immer Ingenieur en chef in Toulon, Hr. Thulis hat dessen Platz an der Sternwarte in Marseille. Wir erfahren so eben aus einem Briefe des Hrn. Méchain vom 2ten März, daß er von Genua abgeht, um nach Paris zu kommen, von da er, wie de Lambre, seine Gradmessung zwischen Orleans und Perpignan fortsetzen wird. Man druckt jetzt den dritten Band der Reisen in die Alpen des Hrn. de Saussure. Er ist durch das Fallen unserer Assignaten zu Grunde gerichtet, allein er hat noch das Vermögen seiner Frau, und ist nicht ganz unglücklich. Er hat Anfälle von Paralysie gehabt, er macht noch immer physikalische Versuche auf seinem Landgute, und es scheint nicht, daß er nach England gehen wird. Dem Montucla habe ich Ihre Noten mitgetheilt, er läßt sehr dafür danken. Man fängt jetzt an, an seine Geschichte der Mathematik zu drucken **). In den Wiener Ephemeriden hat Hr. Burg eine große Abhandlung über den Durchmesser des Monds durch Sternbedeckungen gegeben; allein er findet 2 Sec. mehr, als ich für den Halbmesser in diesem Fall; ich habe Mühe, daran zu glauben ***). Sie schreiben mir, daß in den Wiener Ephemeriden von 1794 Herr Triesnecker die Meridiandifferenz 56′ 9″,2 aus der Bedeckung Aldebaran's den 27sten März 1792 gefunden habe; allein, meines Wissens ist diese Bedeckung in Paris nicht beobachtet worden, woher mag sie wohl Herr Triesnecker bekommen haben?

Erklärt

*) Diese Stelle ist Antwort auf eine Anfrage, die ich bey Hrn. de la Lande über den Artikel 2763, im III. Theil der neuesten Ausgabe seiner Astronomie gemacht habe; daselbst verspricht er ein Sternverzeichniß, und eine Tafel ihrer Seculatveränderungen in Länge und Breite. Im Werke selbst erscheint aber nichts hiervon; hier erfährt man [illegible] Gründe, warum dieses unterblieben ist. v. Z.

**) Eine deutsche Ueberse[illegible] einem [illegible] mehrten Ausgabe, [illegible] Octavbänden [illegible]

***) Hrn. B[illegible] auf das [illegible] gen über[illegible] l'Acad[illegible] Herr [illegible] der [illegible] lich[illegible] wo[illegible] n[illegible] g[illegible]

Exiſtirt eine ſolche Beobachtung, ſo ſchicken Sie mir ſolche doch *). Ich habe mir jetzt einen 18zolligen Kreis verfertigen laſſen, der ſchöner als alle, die man bisher gemacht hat, ausgefallen iſt, um damit die Fehler meines Mauerquadranten in verſchiedenen Punkten zu verificiren. Ramsden giebt ſich noch nicht mit der Gattung ganzer Kreiſe ab, womit man die Beobachtungen auf den verſchiedenen Punkten des Theilkreiſes vervielfältigen kann. Inzwiſchen da die erſte Idee doch von Mayer iſt, ſo dürfte dieſes einem Engländer nicht ſo ſchwer ankommen **). Das Werk des Bürgers Dupuis über den Urſprung der alten Religionen durch die Phyſik und Aſtronomie, wird nun bald in 4 Bänden 4to erſcheinen. Es enthält ſehr ſonderbare und curiöſe Reſultate, wie ſie ſchon aus ſeiner Abhandlung ſchließen können, die im 4ten Bande der zweyten Auflage meiner Aſtronomie befindlich iſt.

Paris, den 1ſten Auguſt 1795.

Den 25ſten July hat die Nationalconvention die Commiſſion über die Meereslänge (Bureau de Longitude) dekretirt. Ich und mein Neffe ſind dabey angeſtellt; dieſe Stelle trägt mir 8000, und meinem Neffen 4000 Livres ein. Wir haben alſo, ſtatt der 1500 Livres, die wir vordem hatten, nun 12000 Livres. Wir ſind ſchon in der vollſten Thätigkeit. Es werden dadurch ganz vortreffliche Sachen, ſowohl für die Aſtronomie als für die Schiffahrt, zu Stande gebracht werden. De Lambre iſt ſeit Anfangs July mit ſeiner Triangelreihe zwiſchen Bourges und Orleans beſchäftigt. In der neuen Ausgabe des kleinen Flamſteediſchen Atlaſſes, davon ich Ihnen ſchon geſchrieben habe, habe ich ein neues Sternbild eingeführt; ich nenne es den Mauerquadranten (Le Mural) ***). Ich habe ihm ſeinen Platz zwiſchen dem Drachen, dem Bootes und dem Hercules angewieſen, um das Andenken des Inſtruments zu erhalten, womit die ungeheure Arbeit der 30,000 Sternbeſtimmungen vollendet worden. Wenn Sie Herrn Bode ſchreiben, ſo bereden Sie ihn doch, daß er dieſes Sternbild in ſeine neuen Karten aufnehme, wir haben auch ſeine Friedrichs Ehre (Trophée de Fréderic) aufgenommen. Was macht

*) Dieſe Beobachtung iſt wirklich in Paris gemacht worden, und ſtehet in den Wiener Ephemeriden 1794. S. 306. wo Hr. Triesnecker die ihm mitgetheilten Zeiten der Beobachtung, ſowohl des Ein- als Austritts anführet. Von wem er dieſe Beobachtung erhalten, wer, und wo ſolche in Paris angeſtellt worden, davon wird nichts gemeldet. v. Z.

**) Meine Abhandlung über dieſen Gegenſtand, von Seite 450-470 des gegenwärtigen Stücks des Archivs, giebt mehrere Aufſchlüſſe über die Beobachtungsmethode bey ganzen Kreiſen. v. Z.

***) Herr de la Lande fügte ſeinem Briefe nur eine ſehr grobe Zeichnung dieſes neuen Sternbildes bey. Ich habe darnach eine genauere entworfen, woraus man die Geſtalt und Lage dieſer neuen Conſtellation beſſer erſehen kann. Man ſehe die hier beygefügte Kupfertafel, unten rechter Hand. v. Z.

macht Poczobut in Wilna? Ich habe in ewiger Zeit nichts mehr von ihm gehört; beobachtet er immer noch? Den 25ſten July hat mein Neffe die Oppoſition des Jupiters beobachtet, und den Irrthum der de Lambreſchen Tafeln, die in meiner Aſtronomie ſtehen, nur 15 Secunden in der Länge gefunden. Dagegen war der Irrthum der Tafeln bey der untern Conjunction der Venus mit der Sonne 32 Secunden. Den 26ſten July iſt die Akademie der Wiſſenſchaften wieder eingeſetzt und hergeſtellt worden, unter dem Titel: Inſtitut national. Können Sie Ihren Freund, Grafen von Brühl in London nicht dahin vermögen, daß er die Vollendung unſers ſo lange beſtellten Mittagsfernrohrs bey Ramsden betreibe; er hat ſchon ſeit acht Jahren einen Vorſchuß von 1000 Thaler (Ecus) auf Abrechnung erhalten, allein der Mann muß immerfort angetrieben werden; Sie würden dadurch der Aſtronomie überhaupt einen ſehr großen Dienſt erweiſen, denn wir haben viele Beobachter und ſehr ſchlechte Inſtrumente auf der großen Sternwarte der Republik. Wenn Sie nach Leipzig ſchreiben, ſo bitte ich Herrn Prof Hindenburg zu ſagen, daß ich ſeine Abhandlungen über die combinatoriſche Analytik erhalten habe, und daß ich ihm recht ſehr dafür danke. Auch la Grange, la Place und de Lambre haben ihre Exemplare erhalten, laſſen inzwiſchen danken, bis ſie ſolches ſelbſt thun werden.

---

Leipzig,

gedruckt bey Chriſtian Friedrich Solbrig.

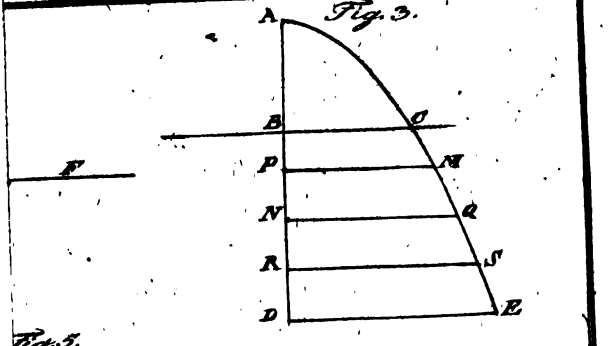



Fig. 3.

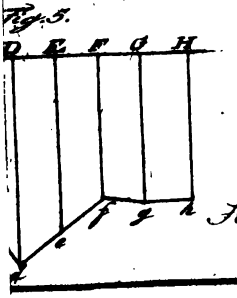



Fig. 4.

Hennert über die Geschw. des Wassers.

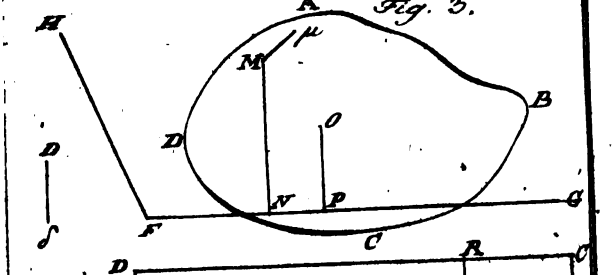



Fig. 3.

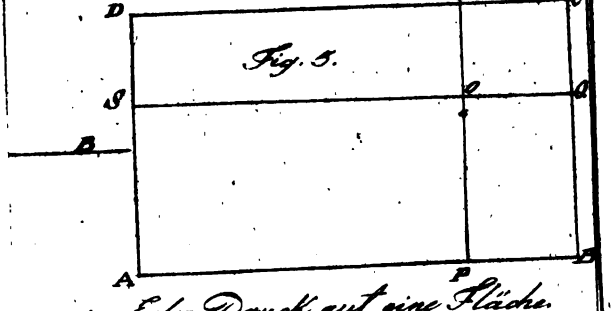
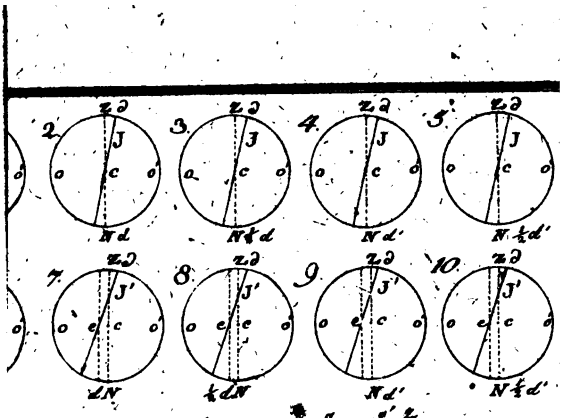



Fig. 5.

6 Euler Druck auf eine Fläche.



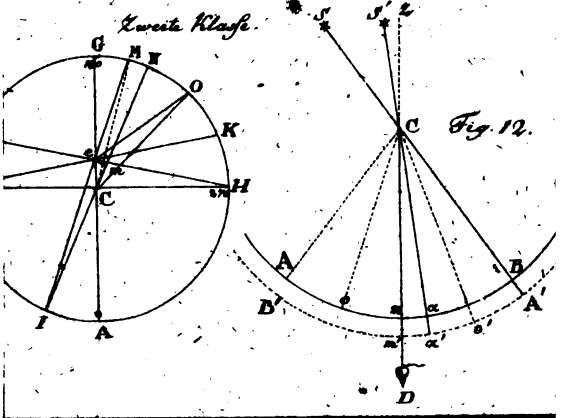
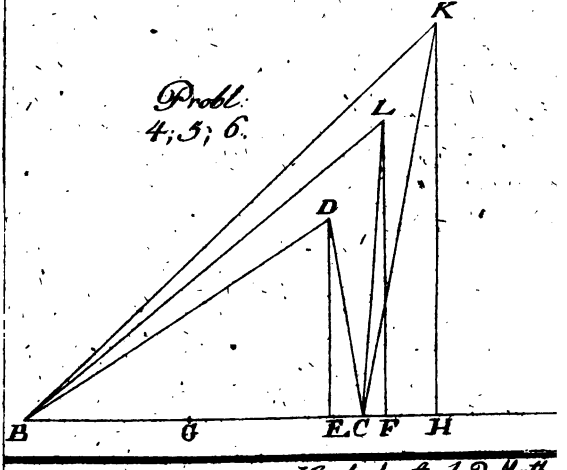
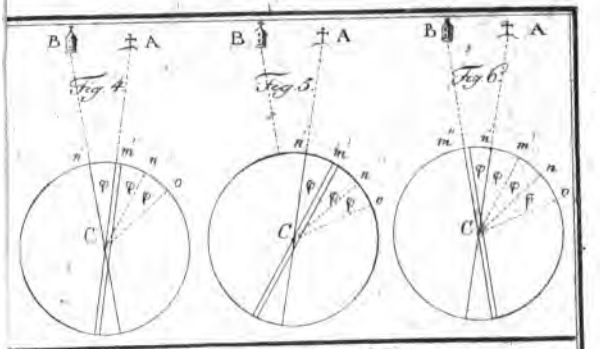
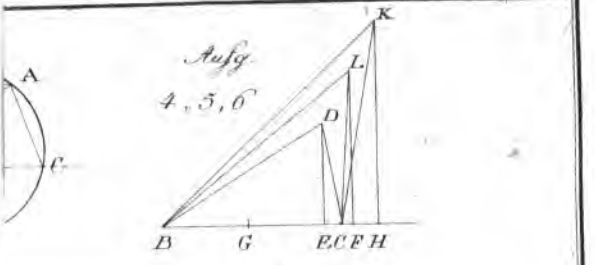




Fig. 12.

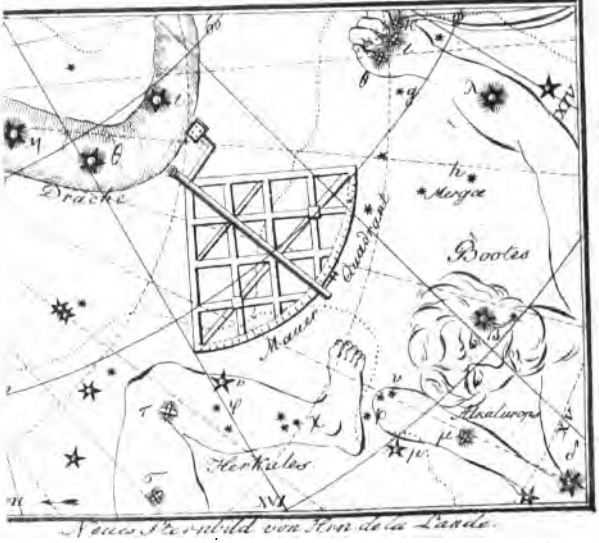



Hindenb. Arch. D. Math.

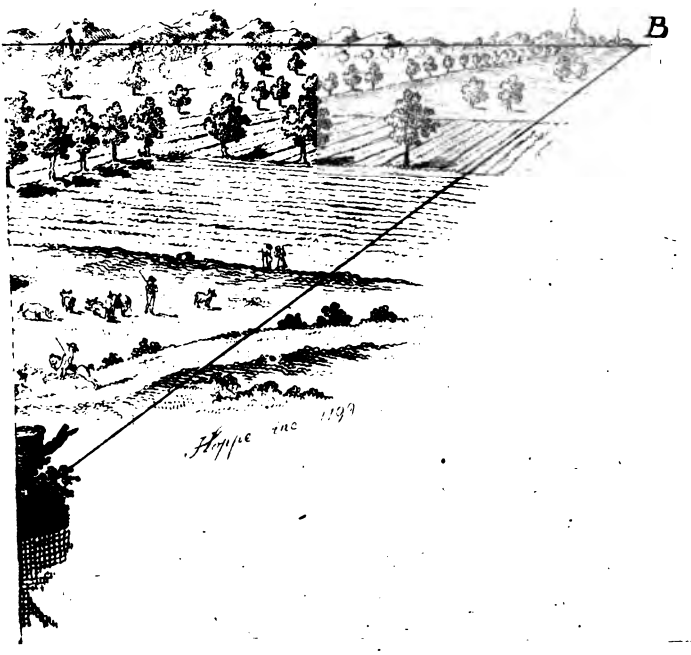
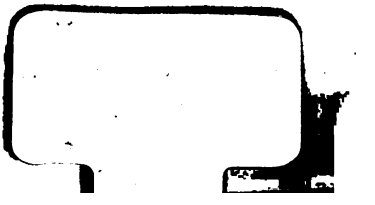



struction von Aufgaben.




Neues Sternbild von Hrn de la Lande.


B